

MICROWAVE CIRCUITS

JEROME L. ALTMAN

*Technical Staff Member, The Mitre Corporation
Lecturer, Northeastern University*

D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC
PRINCETON, NEW JERSEY, TORONTO, NEW YORK, LONDON

1964



Дж. Л. АЛЬТМАН

Устройства сверхвысоких частот

Перевод с английского

Под редакцией проф. И. В. Лебедева

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1968

Предисловие редактора

Книга написана на основе учебного курса по технике СВЧ. Вопросы рассматриваются на современном уровне и излагаются понятно и доступно. В книге много справочного материала.

Исходя из своего опыта, автор рассматривает часто встречающиеся в практике пассивные элементы СВЧ: двойные тройники, гибридные (мостовые) соединения, аттенюаторы, фазовращатели, поляризаторы, соединительные элементы, объемные резонаторы, фильтры, модулирующие устройства и т. д. Анализ таких элементов и соответствующих им эквивалентных цепей полезен не только инженерам по технике СВЧ, но и специалистам более узкого профиля, занимающимся конструированием магнетронов, твердотельных приборов или антенн.

Достоинство книги в единстве подхода и логичности изложения. Автор использует аппарат векторного анализа, дифференциальных уравнений, теории комплексного переменного и теории матриц.

Это ценное пособие для студентов, аспирантов электротехнических факультетов вузов, инженеров, работающих в области СВЧ, и радиофизиков.

Редакция литературы по новой технике

Последнее десятилетие ознаменовалось широким внедрением техники и приборов сверхвысоких частот (СВЧ) во многие отрасли науки и техники. Начав свое развитие в радиолокации, техника СВЧ распространилась на радиосвязь, телевидение, телеметрию, промышленную электронику, ускорительную технику и на другие отрасли современной радиоэлектроники. Успешно развиваются радиоастрономия и радиоспектроскопия, также целиком базирующиеся на достижениях техники СВЧ. Наконец, возникновение и бурное развитие квантовой электроники и лазерной техники во многих отношениях связано с использованием техники и приборов СВЧ.

Круг специалистов, в той или иной степени связанных со сверхвысокими частотами, непрерывно расширяется. Одновременно растет и теоретический уровень работ, в большом числе публикуемых на страницах научных журналов и других изданий. Умение пользоваться специфическими методами теории и техники СВЧ требуется теперь не только от специалистов, работающих в узких областях радиотехники и электроники. Все чаще с такой проблемой сталкиваются научные работники, ведущие разработки и исследования во многих областях физики твердого тела и плазмы, оптики, химии, медицины и т. п. Поэтому, несмотря на обилие специальной литературы, ощущается потребность в книгах, в которых систематически излагались бы основные теоретические положения и понятия техники СВЧ.

Предлагаемая вниманию читателя книга Дж. Альтмана отличается от многих ранее выпущенных книг углубленным и последовательным изложением основных проблем передающих линий, полых резонаторов и замедляющих систем СВЧ-диапазона. Изложение ведется в основном с позиций эквивалентных схем. Вопросы теории поля, на которые традиционно делался основной упор в ранних пособиях по технике СВЧ, здесь в значительной мере опущены. Предполагаются известными также теория обычных электрических цепей с сосредоточенными постоянными и классическая теория длинных линий. Особенно подробно в книге рассматриваются методы, основывающиеся на применении матричного анализа. При

чтении этих разделов читателю можно дополнительно рекомендовать пособие [47].

Не все разделы книги изложены достаточно подробно. Это относится в особенности к главам и параграфам, посвященным замедляющим системам и применению ферритов в технике СВЧ. Для более глубокого изучения указанных вопросов могут быть использованы изданные в нашей стране монографии [41—43].

Читателям, не имеющим предварительной подготовки по основам техники СВЧ, материал книги может показаться сухим. В этих случаях можно рекомендовать, например, предварительное ознакомление с книгами [36, 37] или [48].

При переводе сохранены принятые автором обозначения, за исключением некоторых традиционных обозначений, используемых в отечественной литературе. Список литературы, указанной автором, пополнен отечественными изданиями [36—48].

Книга рекомендуется научным работникам, аспирантам и инженерам, ведущим работы в области техники СВЧ или ее применения. Книга полезна также студентам высших учебных заведений на заключительной стадии соответствующей специализации.

Перевод выполнен Дмитренко И. М. (гл. 1, приложения I, IV, V), Ломизе Л. Г. (гл. 6, 8, приложения X—XIII, XVI, XVII, XIX), Нечаевым Н. Н. (гл. 4, приложения II, III, VI—IX, XIV, XV), Подшиваловым В. Н. (гл. 2), Собениным Н. П. (гл. 3, 7, приложение XVIII) и Щедриным И. С. (гл. 5).

И. В. Лебедев

Из предисловия автора

Содержание книги близко к курсу «Применение сверхвысоких частот», который автор читает в Северо-восточном университете (Бостон, шт. Массачусетс). Этому курсу предшествуют четырехсеместровые лекции, охватывающие теорию электромагнитного поля и передающих линий и изучение полей в волноводах и объемных резонаторах. Поэтому, за исключением первых параграфов книги, где вводятся общие определения, вопросы теории поля здесь не рассматриваются.

Основная задача как при чтении курса, так и при написании книги заключалась в таком отборе материала, чтобы за ограниченное время (в данном случае в ограниченном числе страниц) возможно лучше представить наиболее важные практические аспекты техники СВЧ. Этот вопрос в свою очередь непосредственно связан с методом изложения: либо предложить обширный, но поверхностный обзор техники СВЧ, либо более подробно рассмотреть отдельные устройства.

Исходя из личного опыта, автор решил остановиться на таких пассивных элементах СВЧ, как двойные тройники, гибридные соединения, аттенюаторы, фазовращатели, поляризаторы, соединительные элементы, объемные резонаторы, фильтры, модулирующие устройства и т. д. Эти устройства наиболее часто встречаются в практике инженера независимо от того, занимается ли он системами или отдельными компонентами техники СВЧ. Кроме этого, анализ таких элементов и соответствующих им эквивалентных схем полезен и для более узких специалистов, занимающихся, например, конструированием магнетронов, твердотельных приборов СВЧ или антенн.

Литература по технике СВЧ на первый взгляд довольно обширна, однако это изобилие скорее кажущееся, чем действительное. Буквально тысячи статей в различных периодических изданиях адресованы специалистам с очень узким профилем. Учебных статей мало, и они редко выходят за пределы обычного обзора. Рассмотрение выводов уравнений считается старомодным, и читатель многие положения должен принимать на веру или тратить много времени и усилий, чтобы проделать отсутствующие промежуточные выкладки.

Нередко читатель, желающий узнать истину, переадресуется ссылками от одной статьи к другой. Новые идеи на страницах технических журналов часто очень остроумны и всегда довольно просты, но они могут показаться очень сложными для читателя, не имеющего соответствующей подготовки.

В настоящей работе автор попытался собрать разбросанный материал и расположить его последовательно по степени трудности независимо от того, рассматривались ли эти вопросы в учебниках и в другой литературе или нет. Ссылки на литературу делаются редко и главным образом для того, чтобы читатель мог познакомиться при необходимости с первоисточником; пренебрежение ими ни в коей мере не отражается на ясности изложения материала. Однако в самой книге автор широко пользуется перекрестными ссылками, чтобы показать, как различные частные вопросы связаны с наиболее общими идеями, лежащими в основе теории цепей СВЧ. Эти немногие основные идеи по возможности используются на протяжении всей книги. При этом многие совершенно различные явления объясняются на основе одних и тех же принципов.

«Уровень» книги — понятие чисто субъективное. По-видимому, его лучше считать «средним». Автор надеется, что для рядового читателя, прочитавшего какой-либо раздел книги, основные выводы этого раздела будут ясны и он не станет возвращаться назад, чтобы понять, откуда следуют эти выводы, а приступит к дальнейшему изучению предмета.

Автор полагает, что назначение его книги состоит в том, чтобы сэкономить у читателя как можно больше времени и подготовить его для самостоятельных исследований. Практически этого можно достигнуть при более широком подходе, т. е. основное внимание уделять фундаментальным положениям и наиболее общим методам. Поэтому описательный материал и фактические данные сведены к минимуму. Они могут быть найдены во многих учебниках и справочниках, ссылки на которые даны в тексте.

Изложение носит математический характер и ведется с использованием векторного анализа, дифференциальных уравнений, теории функций комплексного переменного и матричной алгебры. Однако для чтения книги достаточно обычной институтской математической подготовки. Выводы и промежуточные выкладки даются как можно полнее.

Обширные приложения преследуют двоякую цель: во-первых, вынести в конец книги пространные выкладки, нарушающие целостность изложения, и, во-вторых, изложить в одном месте общие для разных частей книги принципы и представления.

Важную роль играет вопрос о системе обозначений. По возможности используются «принятые» обозначения, однако в некоторых случаях они вступают между собой в конфликт при рассмотрении

смежных областей. Выбор сделан в пользу увеличения числа условных обозначений, чтобы уменьшить возможные недоразумения. Основные условные обозначения приведены в начале книги. Читатель может обращаться к нему всякий раз, когда у него возникнут какие-либо сомнения. Кроме того, обозначения поясняются в тексте, когда встречаются впервые или длительное время не употреблялись.

Книга предназначена для студентов электротехнического профиля и инженеров, работающих в области СВЧ. Она также полезна физикам. Хотя последним ближе вопросы теории электромагнитного поля, тем не менее изложенные методы будут небезынтересны и для них.

Дж. Альтман

Октябрь 1964 г.

СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- A, B, C, D** — векторы;
 A — затухание (отношение мощностей);
 A_0 — комплексная величина;
 A, B — действительная величина;
 A, B, C — рассматриваемое сечение;
 $A(\omega), B(\omega)$ — полиномы, определяющие $|\Gamma|^2$;
 $[A], [B], [C]$ — матрицы;
 A, B, C, D — коэффициенты четырехполюсника;
 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{D}$ — нормированные коэффициенты четырехполюсника;
 \mathcal{A} — затухание, дБ;
 \mathcal{A}_{ij} — алгебраическое дополнение элемента матрицы, стоящего в i -й строке в j -м столбце;
 a, b — ширина (a) и высота (b) прямоугольного волновода; внутренний и внешний радиусы коаксиальной линии; нормированная падающая волна $[a]$ и нормированная отраженная волна $[b]$;
 a, b, c, d, e — коэффициенты;
 a^i — i -й собственный вектор;
 a_h — коэффициент, используемый при определении параметров фильтра нижних частот;
 a_{2i} — вычет функции $x(\omega)$;
 a_x, a_y, a_z — единичные векторы в направлениях x, y, z ;
 \mathbf{B} — вектор магнитной индукции;
 B — реактивная проводимость (ненормированная);
 \bar{b} — нормированная реактивная проводимость;
 \bar{b}_e — эквивалентная нормированная реактивная проводимость;
 b_h — коэффициент, используемый при определении параметров фильтра нижних частот;
 $\bar{b}_{1,2}$ — нормированная реактивная проводимость на границах полосы пропускания;
 b_{2i-1} — вычет функции $\bar{b}(\omega)$;
 C — емкость; переходное ослабление;
 \bar{C} — нормированная емкость;

- C_0 — емкость резонатора;
 C_0 — эквивалентная емкость резонатора;
 $C_n(x)$ — полином Чебышева;
 c — скорость света в свободном пространстве;
 \mathbf{D} — вектор электрической индукции;
 D — направленность;
 d — длина;
 da — вектор, перпендикулярный к поверхности интегрирования, величина которого равна da ;
 da — дифференциал поверхности;
 $d\mathbf{l}$ — вектор, направленный по касательной к линии интегрирования, величина которого равна $d\mathbf{l}$;
 \mathbf{E} — вектор напряженности электрического поля;
 E — комплексная амплитуда вектора \mathbf{E} ;
 E_r, E_θ, E_z — составляющие вектора \mathbf{E} в цилиндрической системе координат;
 E_x, E_y, E_z — составляющие вектора \mathbf{E} в прямоугольной системе координат;
 E_t — поперечная составляющая вектора \mathbf{E} ;
 E_t — комплексная амплитуда вектора \mathbf{E}_t ;
 $E(z)$ — комплексная амплитуда суммарного поперечного электрического поля \mathbf{E} ;
 E_0 — начальное значение комплексной амплитуды E_t ;
 E_m — амплитуда вектора \mathbf{E} (действительная величина);
 E_{xm} — амплитуда составляющей поля E_x ;
 f — частота, ω ;
 G — активная проводимость; коэффициент усиления;
 $[G]$ — матрица симметрического оператора;
 $[\mathcal{G}]$ — матрица преобразования;
 \bar{g} — нормированная активная проводимость;
 g^i — i -е собственное значение матрицы $[G]$;
 g_{pq} — элементы матрицы $[G]$;
 g_h — коэффициент, используемый при определении параметров фильтра нижних частот;
 \mathbf{H} — вектор напряженности магнитного поля;
 H — комплексная амплитуда вектора \mathbf{H} ;
 H_r, H_θ, H_z — составляющие вектора \mathbf{H} в цилиндрической системе координат;
 H_x, H_y, H_z — составляющие вектора \mathbf{H} в прямоугольной системе координат;
 H_t — поперечная составляющая вектора \mathbf{H} ;
 H_t — комплексная амплитуда вектора \mathbf{H}_t ;
 $H(z)$ — комплексная амплитуда суммарного поперечного магнитного поля;
 H_0 — начальное значение комплексной амплитуды H_t ;

- h — высота пластины;
 I или $I(z)$ — реально существующий или условный ток;
 I_0 — начальная комплексная амплитуда $I(z)$;
 $[I]$ — единичная матрица;
 \mathbf{i} — вектор плотности тока;
 i или $i(z)$ — нормированный ток;
 i_0 — начальная комплексная амплитуда $i(z)$;
 i, j, k — целые числа (индексы перечисления);
 J — ось симметрии;
 $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода;
 j — мнимая единица;
 K — переходное ослабление на единицу длины;
 k — постоянная распространения в безграничном пространстве, заполненном диэлектриком; коэффициент связи;
 \bar{k} — нормированный коэффициент связи резонатора;
 k_c — критическое волновое число;
 L — индуктивность; пространственный период;
 \bar{L} — нормированная индуктивность;
 L_0 — индуктивность резонатора;
 L_0 — эквивалентная индуктивность резонатора;
 l — длина резонатора;
 m, n — целые числа, определяющие число вариаций поля в волноводе по координатам x, y или θ, r ;
 n — коэффициент трансформации; индекс перечисления (обычно последний);
 P — средняя активная мощность; плоскость;
 P_0 — мощность, отдаваемая генератором;
 $P_{1,2}$ — мощность, рассеиваемая на границах полосы пропускания резонатора;
 $P_{рез}$ — мощность, рассеиваемая в резонаторе;
 $P_{вн}$ — мощность, рассеиваемая во внешних нагрузках;
 $P_{сист}$ — мощность, рассеиваемая в резонаторе и в нагрузках;
 p — отношение длин волн;
 p, q — целые числа (индексы перечисления);
 $p(s), q(s)$ — полиномы, определяющие $\Gamma(s)$;
 Q — добротность;
 Q_0 — ненагруженная добротность;
 $Q_{вн}$ — внешняя добротность;
 Q_n — нагруженная добротность;
 R — сопротивление;
 R_0 — сопротивление резонатора;
 R_0 — эквивалентное сопротивление резонатора;
 R_s — поверхностное сопротивление;
 r, θ, z — цилиндрические координаты;

- \bar{r} — нормированное сопротивление резонатора;
 S — площадь; коэффициент стабилизации;
 $[S]$ — матрица рассеяния;
 s — число ячеек замедляющей системы;
 s^i — i -е собственное значение матрицы рассеяния;
 s_{pq} — элемент матрицы рассеяния;
 T — время, за которое сигнал проходит двойную длину резонатора; проходящая мощность;
 t — время; толщина;
 $t(j\omega)$ — коэффициент передачи по напряжению;
 U — средняя накопленная энергия;
 u_1, u_2, u_3 — обобщенные криволинейные координаты;
 V — скалярная функция; объем;
 V или $V(z)$ — реально существующее или условное напряжение;
 V_i — начальное напряжение;
 V_0 — начальное комплексное значение $V(z)$;
 v или $v(z)$ — нормированное напряжение;
 v_0 — начальное комплексное значение $v(z)$; нормированное напряжение при резонансе;
 $v_{1,2}$ — нормированное напряжение на границах полосы пропускания;
 v_i — нормированное начальное напряжение;
 $v_{гр}$ — групповая скорость в волноводе;
 $\omega(z)$ — волновая функция;
 X — реактивное сопротивление;
 x — относительная девиация частоты; неопределенный коэффициент;
 \bar{x} или $\bar{x}(\omega)$ — нормированное реактивное сопротивление;
 x_e — эквивалентное нормированное реактивное сопротивление;
 x, y, z — прямоугольные координаты;
 Y или $Y(z)$ — проводимость, определяемая через V и I ;
 Y_0 — характеристическая проводимость, определяемая через V и I ;
 Y_{pq} — элемент матрицы проводимостей;
 Y_e — сосредоточенная проводимость;
 Y_c — характеристическая проводимость периодической системы;
 Y_{c0}, Y_{c1} — действительная и мнимая составляющие характеристической проводимости периодически нагруженной линии;
 Y_0 — характеристическая проводимость, определяемая через E и H ;
 \mathcal{Y} или $\mathcal{Y}(z)$ — проводимость, определяемая через E и H ;

- \bar{y} или $\bar{y}(z)$ — нормированная проводимость;
 y_{pq} — элемент матрицы нормированных проводимостей;
 y_e — эквивалентная нормированная проводимость;
 Z или $Z(z)$ — сопротивление, определяемое через V и I ;
 Z_0 — характеристическое сопротивление, определяемое через V и I ;
 Z_{pq} — элемент матрицы сопротивлений;
 Z_e — сосредоточенное сопротивление;
 Z_c — характеристическое сопротивление периодически нагруженной линии;
 Z_{c0}, Z_{c1} — составляющие характеристического сопротивления периодически нагруженной линии;
 \mathcal{Z} или $\mathcal{Z}(z)$ — сопротивление, определяемое через E и H ;
 \mathcal{Z}_0 — характеристическое сопротивление, определяемое через E и H ;
 \bar{z} или $\bar{z}(z)$ — нормированное сопротивление;
 z_{pq} — элемент матрицы нормированных сопротивлений;
 \bar{z}_e — эквивалентное нормированное сопротивление;
 $\bar{z}_{1,2}$ — нормированное сопротивление на границах полосы пропускания;
 α — постоянная затухания, *непер/м*; коэффициент;
 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — элементы матрицы рассеяния;
 α, β, δ — коэффициенты, характеризующие произвольную дифференциальную секцию;
 $\bar{\alpha}$ — нормированное затухание резонатора;
 α_T — полное затухание, *непер*;
 β — фазовая постоянная; коэффициент, используемый при определении параметров фильтра нижних частот;
 Γ — коэффициент отражения;
 Γ_0 — значение коэффициента отражения в сечении нагрузки;
 γ — постоянная распространения в волноводе и в замедляющей системе; коэффициент, используемый при определении параметров фильтра нижних частот;
 γ_0 — постоянная распространения при резонансе; постоянная распространения основной гармоники в периодической замедляющей системе;
 γ_e — постоянная распространения в периодической замедляющей системе;
 $\gamma_{1,2}$ — волноводная постоянная распространения на границах полосы пропускания;
 Δ — детерминант системы уравнений;
 $\Delta\omega$ — полоса пропускания;

- ϵ — диэлектрическая проницаемость; максимальное отражение в полосе пропускания; разностная величина; величина, используемая при расчете чебышевских фильтров;
 ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость свободного пространства;
 ϵ' — относительная диэлектрическая проницаемость (действительная часть);
 ϵ'' — мнимая часть комплексной диэлектрической проницаемости;
 η_0 — характеристическое сопротивление свободного пространства;
 θ — пространственный угол (см. r , θ , z); электрический угол, фазовый угол;
 λ — длина волны в безграничном пространстве, заполненном диэлектриком;
 λ_0 — резонансная длина волны, измеренная в безграничном пространстве, заполненном диэлектриком;
 $\lambda_{кр}$ — критическая длина волны;
 $\lambda_{в}$ — длина волны в волноводе;
 $\lambda_{в0}$ — длина волны в волноводе при резонансе;
 $\lambda_{в1, 2}$ — длина волны в волноводе на границах полосы пропускания;
 μ — магнитная проницаемость;
 μ_0 — магнитная проницаемость свободного пространства;
 ρ — объемная плотность электрических зарядов;
 σ — удельная проводимость;
 τ — постоянная времени резонатора;
 φ , ψ — фазовый угол, электрический угол;
 Ω — максимальная девиация частоты;
 ω — угловая частота, рад/сек;
 ω_c — комплексная частота;
 ω_0 — резонансная частота;
 $\omega_{1, 2}$ — частота на границах полосы;
 ω_s — частота сигнала;
 ω_m — частота модуляции.

Основные соотношения теории цепей СВЧ

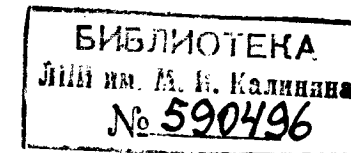
§ 1.0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей вводной главе дается переход от понятий теории электромагнитного поля к наиболее общим понятиям теории цепей СВЧ. Эти понятия сами по себе не представляют практического интереса, однако они необходимы для ясного понимания принципов работы устройств СВЧ, изучение которых составляет основное содержание книги.

Предполагается, что читатель знаком с электромагнитной теорией волноводов и резонаторов. Несмотря на это, приводятся основные соотношения этой теории (§ 1.1), а также дается краткий обзор наиболее важных понятий, используемых при анализе бесконечных и нагруженных волноводов (§ 1.2, 1.3).

Некоторые из приведенных результатов выводятся в процессе изложения, в других случаях читатель отсылается к соответствующей литературе. Большое внимание уделяется ясному и точному определению каждого символа, используемого в тексте, так как терминология, вопрос о которой иногда кажется тривиальным, может оказаться серьезным препятствием к ясному пониманию предмета. Отметим, например, разницу между \mathcal{E}_0 — характеристическим сопротивлением, определяемым через электрическое и магнитное поля E и H , и Z_0 — характеристическим сопротивлением, определяемым либо через напряжение V и ток I , либо через «условное напряжение» и «условный ток», а также принципиальное различие между пространственными векторами и комплексными числами. В первых параграфах, посвященных двухполосникам, зависимость от координаты z для любых комплексных величин, модуль и фаза которых зависят от z , записывается явно, например, в виде $E(z)$. При записи же комплексных скалярных величин, у которых только фаза зависит от координаты z , эта зависимость опускается. В параграфах, посвященных многополосникам, а также в последующих главах этого не делается, так как подобная запись приводит к излишней громоздкости. Кроме того, можно надеяться, что основные понятия уже будут твердо усвоены.

В § 1.4 вводятся понятия нормированного напряжения и нормированного тока (эти токи и напряжения связаны с реальными напряжениями и токами, однако смешивать их нельзя) и приводится



методика расчета этих величин в случае известных полей в волноводе. Начиная с этого параграфа, от рассмотрения полей можно отказаться и все внимание уделить устройствам СВЧ как многополосникам; такое рассмотрение, за некоторыми исключениями, проводится по всей книге. В § 1.5 получены наиболее важные свойства цепей СВЧ, аналогичные свойствам цепей с сосредоточенными постоянными. Большинство свойств матрицы сопротивлений можно непосредственно перенести на матрицу рассеяния, которая в последующих главах используется довольно часто.

Одновременно с чтением гл. 1 полезно ознакомиться и с приложениями I и II.

§ 1.1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

В теории электромагнитного поля [1—7] рассматриваются соотношения между следующими четырьмя основными величинами:

\mathbf{E} — вектором напряженности электрического поля, в/м ; \mathbf{D} — вектором электрической индукции, к/м^2 ; \mathbf{H} — вектором напряженности магнитного поля, а/м ; \mathbf{B} — вектором магнитной индукции, вб/м^2 , и скалярной величиной ρ — объемной плотностью электрического заряда¹⁾.

Плотность тока \mathbf{i} в а/м^2 определяется из уравнения непрерывности через плотность заряда

$$\operatorname{div} \mathbf{i} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.1.1)$$

Все перечисленные выше величины зависят от пространственных координат и времени; задачей теории электромагнитного поля является определение этих зависимостей для определенных граничных условий.

Для данной среды эти величины не являются независимыми, а связаны следующим образом:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad (1.1.2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (1.1.3)$$

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E}. \quad (1.1.4)$$

Диэлектрическая проницаемость ϵ определяется уравнением (1.1.2). Она может быть действительной, если среда не имеет потерь и изотропна (т. е. свойства среды во всех направлениях одинаковы), или комплексной, если среда обладает потерями. В этом случае ее называют комплексной диэлектрической проницаемостью.

¹⁾ В дальнейшем изложении все уравнения, если не сделаны особые оговорки, записываются в системе единиц СИ.

Если среда анизотропна по отношению к электрическому полю, то ϵ является тензором, и в общем случае векторы \mathbf{D} и \mathbf{E} имеют разные направления. Таким же образом определяется и магнитная проницаемость среды μ , которая может быть действительной, комплексной или тензорной величиной. Аналогично можно трактовать и удельную проводимость σ , выражаемую в сименсах ($\text{ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$).

Свободное пространство характеризуется следующими значениями этих величин: диэлектрической проницаемостью $\epsilon_0 = 1/36\pi \times 10^{-9} \text{ ф/м}$, магнитной проницаемостью $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ гн/м}$ и характеристическим сопротивлением $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377 \text{ ом}$.

В вакууме электромагнитные волны распространяются со скоростью $c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/сек}$.

Предполагается, что читатель хорошо знаком с понятием «комплексная величина», однако оно настолько часто встречается в книге, что следует сделать несколько замечаний.

Вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} является прежде всего *пространственным вектором*. Он характеризуется направлением и величиной, изменяющейся во времени. Кроме того, его можно рассматривать и как векторную сумму пространственных составляющих. Каждая из составляющих имеет величину, зависящую как от времени, так и от пространственных координат. При синусоидальной зависимости от времени эта величина выражается через функцию координат и $\cos(\omega t + \varphi)$. Например, в декартовых координатах

$$\mathbf{E} = a_x E_x + a_y E_y + a_z E_z, \quad (1.1.5)$$

где

$$E_x = E_{xmf}(x, y, z) \cos(\omega t + \varphi); \quad (1.1.6)$$

a_x, a_y, a_z — единичные векторы, направленные по осям координат; E_{xmf} — действительная величина; $f(x, y, z)$ — функция координат; функция $\cos(\omega t + \varphi)$ определяет зависимость от времени; φ — начальный фазовый угол.

Отметим, что E_x в уравнении (1.1.6) является действительной величиной. Напряженность E_x в точке с координатами x, y, z на самом деле *изменяется во времени* по гармоническому закону $\cos(\omega t + \varphi)$. Уравнение (1.1.6) можно записать в комплексной форме

$$E_x = E_{xmf}(x, y, z) e^{j(\omega t + \varphi)}, \quad (1.1.6')$$

которая не имеет физического смысла, так как в действительности величина E_x не изменяется во времени по закону $e^{j(\omega t + \varphi)}$. При такой форме записи подразумевается, что E_x равна действительной части выражения $E_{xmf}(x, y, z) e^{j(\omega t + \varphi)}$. Следовательно, в зависимости от контекста E_x можно рассматривать как действительное или комплексное число, а \mathbf{E} — как простой или комплексный вектор.

Подобные рассуждения, конечно, не применимы к диэлектрической проницаемости ϵ . Если среда изотропна, то ϵ определяется уравнением (1.1.2) только в том случае, когда величины \mathbf{D} и \mathbf{E} изменяются с одинаковой частотой. Следовательно, ϵ является комплексной величиной, не зависящей от времени. В частном случае ϵ может быть чисто действительным числом. Сопротивление, проводимость и коэффициент отражения являются другими примерами комплексных величин, не зависящих от времени. Действительные величины составляющих электромагнитного поля \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} рассматриваются как комплексные главным образом для того, чтобы ввести перечисленные выше важные комплексные характеристики, не зависящие от времени.

Все основные законы электромагнитного поля вытекают из четырех уравнений Максвелла ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{i} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.7)$$

Любая задача электромагнитного поля заключается в принципе в решении уравнений (1.1.7) с помощью уравнений (1.1.2) — (1.1.4), если начальные условия заданы, а величины ϵ , μ и σ известны в любой точке пространства. Как известно, решение таких задач затруднительно, за исключением тех частных случаев, когда граничные условия особенно просты. Однако эти простые случаи имеют наибольшее практическое значение и включают распространение волн в свободном пространстве, линиях передач, волноводах и объемных резонаторах.

Если среда изотропна, свободна от электрических зарядов и ее проводимость равна нулю, то уравнения Максвелла путем

¹⁾ Читатель должен быть хорошо знаком с элементарными операциями векторного анализа. Для многих полезных следующих определений трех наиболее общих операций пространственного дифференцирования. Градиент скалярного поля V , записываемый в виде $\operatorname{grad} V$, есть вектор, направленный в сторону наибольшего изменения поля и пропорциональный производной от поля по этому направлению. Дивергенция вектора \mathbf{A} ($\operatorname{div} \mathbf{A}$) представляет собой полный поток этого вектора из бесконечно малого объема, отнесенный к этому объему. Ротор вектора \mathbf{A} , записываемый в виде $\operatorname{rot} \mathbf{A}$, есть вектор, пропорциональный циркуляции вокруг некоторой бесконечно малой площади, отнесенный к этой площади и перпендикулярный к ней. Зачастую такие аналогии можно провести дальше и записать кратко, но менее строго: градиент — производная; дивергенция — поток; ротор — циркуляция (линейный интеграл вокруг площади).

несложных преобразований сводятся к волновым уравнениям

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

При синусоидальной зависимости электромагнитного поля от времени уравнения (1.1.8) записываются в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} &= 0, \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

где $k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ — постоянная распространения в безграничном пространстве, заполненном диэлектриком.

Чтобы упростить решение, можно ввести скалярный или векторный потенциал. Если потенциал выбран правильно, то он полностью определяет структуру поля, и путем простого дифференцирования можно найти выражения для всех составляющих поля. Следовательно, задача заключается в определении этой потенциальной функции.

Мощность и энергию при известных \mathbf{E} и \mathbf{H} можно вычислить с помощью следующих соотношений:

поток средней активной мощности из объема, ограниченного поверхностью S (da направлен из объема),

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S [\mathbf{E} \mathbf{H}^*] da \right\}; \quad (1.1.10)$$

средняя электрическая энергия, накопленная в объеме V ,

$$U_E = \frac{1}{4} \int_V \epsilon \mathbf{E} \mathbf{E}^* dv = \frac{1}{4} \int_V \epsilon |E|^2 dv^1); \quad (1.1.11)$$

средняя магнитная энергия, накопленная в объеме V ,

$$U_H = \frac{1}{4} \int_V \mu \mathbf{H} \mathbf{H}^* dv = \frac{1}{4} \int_V \mu |H|^2 dv; \quad (1.1.12)$$

средняя мощность омических потерь в объеме V

$$P_D = \frac{1}{2} \int_V \sigma \mathbf{E} \mathbf{E}^* dv = \frac{1}{2} \int_V \sigma |E|^2 dv. \quad (1.1.13)$$

Величины E и H являются комплексными амплитудами векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . Временной множитель автоматически выпадает из конечного

¹⁾ Если среда анизотропна, то $U_E = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{D} \mathbf{E}^* dv$, $U_H = \frac{1}{4} \int_V \mathbf{B} \mathbf{H}^* dv$.

результата, так как если величина изменяется по закону $e^{j\omega t}$, то комплексно-сопряженная ей величина изменяется как $e^{-j\omega t}$. Читатель может также проверить, что выражение $\operatorname{Re} EH^*$ равно произведению модуля E на модуль H и косинус разности фаз этих векторов на комплексной плоскости. Когда сдвиг фаз между E и H равен 90° , $\operatorname{Re} EH^* = 0$.

Приведенные выше краткие и простые выражения для основных физических величин — мощности и энергии — являются еще одним доводом в пользу применения этой до некоторой степени искусственной системы обозначений.

§ 1.2. БЕСКОНЕЧНЫЙ ВОЛНОВОД¹⁾

Однородный бесконечный волновод с точки зрения теории цепей является самой простой структурой. То, что бегущие волны не отражаются и поток мощности не встречает преград, является условием согласования. Это идеальное и своеобразное условие служит тем эталоном, которого стараются достичь в реальных передающих системах.

Волновые уравнения (1.1.8) для бесконечного полого волновода или двухпроводной линии могут быть решены обычными методами [1].

Волновод прямоугольного сечения

Волны типа $TE^2)$

$$\begin{aligned} E_x &= A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_y &= -A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_z &= 0, \\ H_x &= \pm A^\pm \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_y &= \pm A^\pm \left(\frac{n\pi}{b} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_z &= A^\pm \frac{k_c^2}{\gamma} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm). \end{aligned} \quad (1.2.1)$$

¹⁾ Если не делаются особые оговорки, то под волноводом в наиболее широком смысле этого слова принято понимать полые металлические трубы, двух- или многопроводные линии или диэлектрические линии.

²⁾ В уравнениях (1.2.1)–(1.2.5) используется двойной знак: верхний соответствует распространению волны в положительном направлении оси z , нижний — в отрицательном.

Волны типа TM

$$\begin{aligned} E_x &= \pm A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_B} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_y &= \pm A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_B} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_z &= -A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k_c^2}{k} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \sin(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_x &= -A^\pm \left(\frac{n\pi}{b} \right) \sin \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_y &= A^\pm \left(\frac{m\pi}{a} \right) \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{n\pi y}{b} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Волновод круглого сечения

Волны типа TE

$$\begin{aligned} E_r &= A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right) \left(\frac{m}{r} \right) J_m(rk_c) \sin(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_\theta &= A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right) k_c J'_m(rk_c) \cos(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_z &= 0, \\ H_r &= \mp A^\pm k_c J'_m(rk_c) \cos(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_\theta &= \pm A^\pm \left(\frac{m}{r} \right) J_m(rk_c) \sin(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_z &= A^\pm \frac{k_c^2}{\gamma} J_m(rk_c) \cos(m\theta) \sin(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm). \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

Волны типа TM

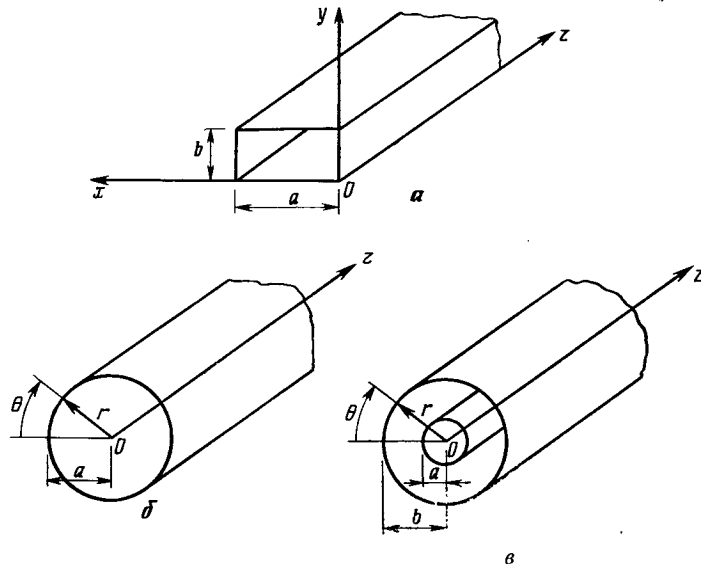
$$\begin{aligned} E_r &= \pm A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_B} \right) k_c J'_m(rk_c) \cos(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_\theta &= \mp A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_B} \right) \left(\frac{m}{r} \right) J_m(rk_c) \sin(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ E_z &= -A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{k_c^2}{k} \right) J_m(rk_c) \cos(m\theta) \sin(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_r &= A^\pm \left(\frac{m}{r} \right) J_m(rk_c) \sin(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_\theta &= A^\pm k_c J'_m(rk_c) \cos(m\theta) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\ H_z &= 0. \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

Коаксиальная линия

Волны типа ТЕМ

$$\begin{aligned}
 E_r &= \pm A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right) \left(\frac{1}{r} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\
 E_\theta &= 0, \\
 E_z &= 0, \\
 H_r &= 0, \\
 H_\theta &= A^\pm \left(\frac{1}{r} \right) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm), \\
 H_z &= 0.
 \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

В этих уравнениях ТЕ, ТМ и ТЕМ относятся соответственно к поперечным электрическим, магнитным и электромагнитным



Ф и г. 1.2.1. Системы координат и размеры волноводов.
 а — прямоугольный волновод; б — волновод круглого сечения; в — коаксиальная линия.

волнам; m, n — индексы типов волн, связанные соответственно с координатами x или θ, y или r ; A^\pm — действительная величина, значение которой определяется полной мощностью, передаваемой

по волноводу; γ — постоянная распространения¹⁾; $\lambda_{\text{в}}$ — длина волны в волноводу; λ — длина волны в безграничном пространстве, заполненном рассматриваемым диэлектриком; k_c — критическое волновое число; $J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода m -го порядка от аргумента x ; φ^\pm — начальный фазовый угол.

Подробный анализ уравнений (1.2.1) — (1.2.5) выявляет три важных свойства, которые позволяют перейти к понятиям «цепей».

Свойство I. Отрезок волновода длиной d можно характеризовать передаточной функцией $e^{-i\gamma d}$.

Каждую составляющую поля в любом случае можно записать в форме $A^\pm f(u_2, u_3) \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)$, где A^\pm — действительная величина; $f(u_2, u_3)$ — функция только поперечных координат; $\cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)$ определяет зависимость от времени и продольной координаты. Здесь важно отметить, что, хотя величина самой составляющей будет изменяться в зависимости от t при заданном z или от z при заданном t по синусоидальному закону, амплитуда этой синусоиды для заданных поперечных координат остается постоянной вдоль координаты z .

Запишем теперь составляющие поля в комплексной форме $A^\pm f(u_2, u_3) e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)}$. При этом уравнения (1.2.1) примут вид:

$$\begin{aligned}
 E_x &= A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_{\text{в}}}{\lambda} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)}, \\
 E_y &= -A^\pm \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_{\text{в}}}{\lambda} \right) \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)}, \\
 E_z &= 0, \\
 H_x &= \pm A^\pm \left(\frac{m\pi}{a} \right) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)}, \\
 H_y &= \pm A^\pm \left(\frac{n\pi}{b} \right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)}, \\
 H_z &= -jA^\pm \frac{k_c^2}{\gamma} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi^\pm)}.
 \end{aligned} \tag{1.2.1'}$$

Свойство I станет очевидным, если учесть, что фаза волны уменьшается на величину γd (увеличивается на $-\gamma d$), если z изменяется от 0 до d (положительная волна) или от 0 до $-d$ (отрицательная волна).

¹⁾ Определение постоянной распространения, принятое здесь, несколько⁰ отличается от определения, проводимого во многих других работах. При данной системе условных обозначений волна распространяется без затухания, если γ — действительное число; волна не распространяется, если γ — мнимое число ($\gamma = \beta - j\alpha$, где β — фазовая постоянная, α — затухание). Эта символика подчеркивает симметрию времени t и расстояния z , частоты ω и постоянной распространения γ .

Свойство II. В бесконечном волноводе поперечные электрическое и магнитное поля ортогональны в пространстве и совпадают по фазе. Отношение любой поперечной составляющей электрического поля к поперечной составляющей магнитного поля есть постоянная действительная величина, не зависящая от положения поперечного сечения и различающаяся в некоторых случаях только знаком¹⁾.

Это отношение называется *характеристическим сопротивлением* волновода \tilde{Z}_0 , выраженным в терминах полей²⁾. Величина \tilde{Z}_0 является положительной для волн, распространяющихся в положительном направлении оси z , и отрицательной — для противоположного направления. Таким образом, для любого типа волн в прямоугольном волноводе

$$\frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x} = \tilde{Z}_0. \quad (1.2.6)$$

В случае круглого волновода

$$\frac{E_r}{H_\theta} = -\frac{E_\theta}{H_r} = \tilde{Z}_0. \quad (1.2.7)$$

Как видно из уравнений (1.2.1) — (1.2.5), сопротивление \tilde{Z}_0 для волн типа *TE* определяется выражением

$$\tilde{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda}, \quad (1.2.8)$$

для волн типа *TM*

$$\tilde{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\lambda}{\lambda_B}, \quad (1.2.9)$$

а для волн типа *TEM*

$$\tilde{Z}_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}. \quad (1.2.10)$$

Для двухпроводных линий с воздушным наполнением (тип колебаний *TEM*) имеем

$$\tilde{Z}_0 = \eta_0. \quad (1.2.10')$$

Свойство III. Продольные составляющие волн типов *TE* и *TM* не входят в выражения активной мощности. Мощность можно выразить либо через поперечную составляющую E_t вектора E ,

¹⁾ Это различие в знаке, пренебрегаемое некоторыми авторами, не должно смущать читателя. Отношение E_t к H_t положительно в том случае, когда энергия распространяется в положительном направлении оси z , и отрицательно в противоположном случае. В обоих случаях используется правосторонняя система координат.

²⁾ Другое определение характеристического сопротивления см. в § 1.6.

либо через поперечную составляющую H_t вектора H и сопротивление \tilde{Z}_0 .

В общем случае [см. уравнение (1.1.10)] средний по времени поток активной мощности, проходящей через поперечное сечение волновода, определяется как действительная часть интеграла по поперечному сечению вектора Пойнтинга

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da \right\} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_S [\mathbf{E}_t \mathbf{H}_t] da \right\}. \quad (1.2.11)$$

Таким образом, продольная составляющая (H_z для волн типа *TE* и E_z для волн типа *TM*) не играет абсолютно никакой роли в передаче мощности в направлении оси z . В поперечном же направлении передачи мощности нет, так как продольные и поперечные составляющие поля сдвинуты относительно друг друга по фазе на 90° .

Поскольку в бесконечном волноводе \mathbf{E}_t и \mathbf{H}_t совпадают по фазе и ортогональны друг другу, \mathbf{E}_t можно выразить через \mathbf{H}_t и \tilde{Z}_0 , и наоборот. Таким образом,

$$P = \frac{1}{2} \int |E_t| |H_t| da = \frac{1}{2\tilde{Z}_0} \int |E_t|^2 da = \frac{\tilde{Z}_0}{2} \int |H_t|^2 da, \quad (1.2.12)$$

где $|E_t|$ — модуль комплексной амплитуды вектора \mathbf{E}_t .

С точки зрения передачи энергии бесконечно протяженный волновод аналогичен длинной линии с характеристическим сопротивлением \tilde{Z}_0 ; величина $\int |E_t|^2 da$ аналогична $|V|^2$; выражение $\int |H_t|^2 da$ аналогично $|I|^2$, где V — напряжение, а I — ток. Полевая задача о распространении электромагнитной энергии может быть рассмотрена более простыми и более известными методами теории цепей.

§ 1.3. ДВУХПОЛЮСНИК

Если волновод содержит неоднородность или включен на некоторую нагрузку, то в направлении оси z должны быть наложены граничные условия. Решением волновых уравнений (1.1.8) является линейная комбинация волн, распространяющихся в положительном направлении оси z (падающие волны), и волн, распространяющихся в отрицательном направлении (отраженные волны). Так как обычно число типов волн, которые могут распространяться в волноводе, ограничено одним (только в этом случае возможно простое аналитическое решение задачи), то в дальнейших выкладках предполагается, что в правильно сконструированном волноводе на некотором

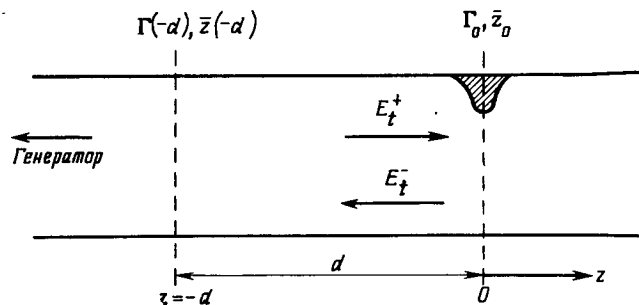
расстоянии от неоднородности существуют только одна падающая и одна отраженная волны, причем *поперечные эпюры этих волн одинаковы*. Падающая поперечная электрическая волна имеет вид

$$E_t^+ = |E_0^+| e^{j(\omega t - \gamma z + \varphi^+)} = E_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)}, \quad (1.3.1)$$

а отраженная

$$E_t^- = |E_0^-| e^{j(\omega t + \gamma z + \varphi^-)} = E_0^- e^{j(\omega t + \gamma z)}. \quad (1.3.2)$$

Величины $|E_0^+|$ и $|E_0^-|$ являются условными амплитудами падающей и отраженной волн и пропорциональны напряженностям поперечных электрических составляющих соответствующих волн.



Ф и г. 1.3.1. Двухполюсник: обозначения и система координат.

Разность начальных фаз ($\varphi^- - \varphi^+$) определяется только характером неоднородности. Это позволяет рассматривать E_0^+ и E_0^- как комплексные функции аргументов φ^+ и φ^- ; в выражениях для E_t^+ и E_t^- начальные фазовые углы φ^+ и φ^- при этом явно не входят. Продольная составляющая электрического поля, равная нулю для волн типа *TE*, не рассматривается также и для волн типа *TM*, так как она не играет никакой роли в передаче энергии.

Для простоты, не теряя общности, рассмотрим неоднородность, расположенную в плоскости $z = 0$. Коэффициент отражения Γ_0 в этом случае определяется как отношение отраженной поперечной электрической волны к падающей поперечной волне в месте неоднородности

$$\Gamma_0 = \frac{E_t^-}{E_t^+} = \frac{E_0^-}{E_0^+}. \quad (1.3.3)$$

Величина Γ_0 имеет модуль $|E_0^-/E_0^+|$ и фазу $\varphi^0 = \varphi^- - \varphi^+$. В том случае, когда рассматриваются поперечные магнитные поля, отно-

шение напряженностей отраженной и падающей волн равно $-\Gamma_0$ (а не Γ_0)¹⁾

$$\frac{H_t^-}{H_t^+} = \frac{H_0^-}{H_0^+} = -\Gamma_0. \quad (1.3.4)$$

Комплексная амплитуда суммарного поперечного электрического поля $E(z)$ равна сумме поперечной составляющей падающей волны E_t^+ и поперечной составляющей отраженной волны E_t^-

$$E(z) = E_t^+ + E_t^- = E_0^+ [e^{j(\omega t - \gamma z)} + \Gamma_0 e^{j(\omega t + \gamma z)}]. \quad (1.3.5)$$

Аналогично для суммарного магнитного поля

$$H(z) = H_t^+ + H_t^- = H_0^+ [e^{j(\omega t - \gamma z)} - \Gamma_0 e^{j(\omega t + \gamma z)}]. \quad (1.3.6)$$

Вынося $e^{j(\omega t - \gamma z)}$ за скобки из уравнений (1.3.5) и (1.3.6), получим

$$E(z) = E_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 + \Gamma_0 e^{j2\gamma z}] = E_t^+ [1 + \Gamma_0 e^{j2\gamma z}], \quad (1.3.7)$$

$$H(z) = H_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 - \Gamma_0 e^{j2\gamma z}] = H_t^+ [1 - \Gamma_0 e^{j2\gamma z}]. \quad (1.3.8)$$

Огибающая поля $E(z)$ или $H(z)$, определяемая уравнениями (1.3.7) и (1.3.8), т. е. зависимость максимальной амплитуды поля от координаты z , называется *стоячей волной*. Она не зависит от времени и, если волновод не имеет потерь, является периодической кривой с периодом, равным половине длины волны. Уравнение этой кривой имеет вид $|1 + \Gamma_0 e^{j2\gamma z}|$.

Коэффициент отражения в плоскости z составляет

$$\Gamma = \left(\frac{E_t^-}{E_t^+} \right)_z. \quad (1.3.3')$$

Модуль его равен $|\Gamma_0|$, а фаза является непрерывной функцией координаты z . Из уравнения (1.3.7) следует

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{j2\gamma z}. \quad (1.3.9)$$

Определив таким образом коэффициент отражения Γ , можно записать уравнения (1.3.7) и (1.3.8) следующим образом:

$$E(z) = E_t^+ [1 + \Gamma], \quad (1.3.7')$$

$$H(z) = H_t^+ [1 - \Gamma]. \quad (1.3.8')$$

Назовем *коэффициентом стоячей волны напряжения* (КСВН) отношение максимального значения $E(z)$ (Γ — действительная

¹⁾ Это соотношение можно легко обосновать, рассматривая уравнения (1.2.1) — (1.2.5), в которых для волн типа *TE* электрические составляющие поля не меняют знака при изменении направления распространения, а магнитные составляющие меняют, и, наоборот, для волн типа *TM* электрические составляющие меняют знак с изменением направления распространения, а магнитные составляющие нет.

и положительная величина) к минимальному значению $E(z)$ (Γ — действительная и отрицательная величины)

$$\text{КСВН} = \frac{1+|\Gamma|}{1-|\Gamma|} = \frac{1+|\Gamma_0|}{1-|\Gamma_0|}. \quad (1.3.10)$$

На фиг. 1.3.2 приведена графическая интерпретация образования стоячей волны.

Абсолютное входное сопротивление в сечении z в терминах поля, обозначаемое через $\bar{z}(z)$, определяется как отношение $E(z)$ к $H(z)$ в рассматриваемом сечении линии

$$\bar{z}(z) = \frac{E(z)}{H(z)} = \frac{E_0^+ [1+\Gamma]}{H_0^+ [1-\Gamma]}. \quad (1.3.11)$$

Будем называть *нормированным* сопротивлением $\bar{z}(z)$ отношение абсолютного сопротивления к характеристическому сопротивлению линии

$$\bar{z}(z) = \frac{z(z)}{z_0} = \frac{1+\Gamma}{1-\Gamma}, \quad (1.3.12)$$

так как $z_0 = E_0^+ / H_0^+$.

Из уравнения (1.3.11) можно получить выражение для Γ

$$\Gamma = \frac{\bar{z}(z) - 1}{\bar{z}(z) + 1}. \quad (1.3.13)$$

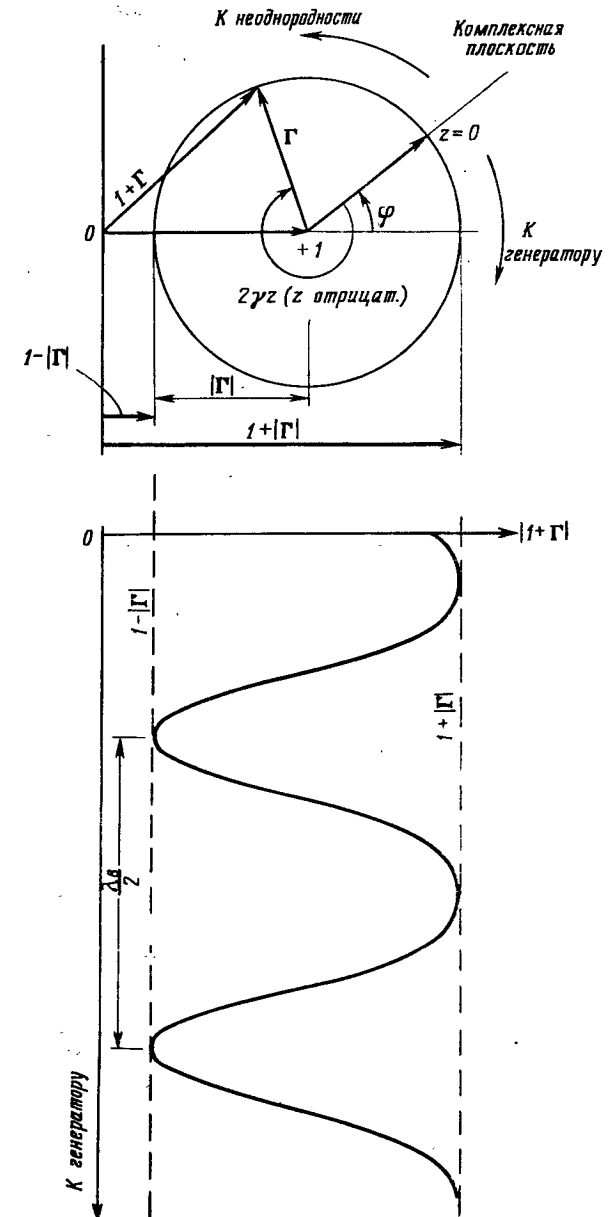
Средняя передаваемая мощность P , как и ранее, определяется уравнением (1.2.11). Однако теперь поперечные составляющие $E_t = E(z)$ и $H_t = H(z)$ могут находиться в разных фазах, хотя они по-прежнему ортогональны в пространстве. Величину P можно выразить через падающие волны E_0^+ и H_0^+ и коэффициент отражения Γ , воспользовавшись соотношениями (1.3.7') и (1.3.8'), так как E_0^+ и H_0^+ находятся в одинаковых фазах, а Γ не зависит от поперечных координат,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int E(z) H(z)^* da \right] = \frac{1}{2} \text{Re} \left[\int E_0^+ H_0^+ (1+\Gamma) (1-\Gamma)^* da \right] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} [(1+\Gamma) (1-\Gamma)^*] \int E_0^+ H_0^+ da. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

Поскольку выражение $\frac{1}{2} \int E_0^+ H_0^+ da$ определяет падающую мощность, а $\text{Re} [(1+\Gamma) (1-\Gamma)^*] = 1 - |\Gamma|^2$, имеем

$$P_{\text{перед}} = P_{\text{пад}} (1 - |\Gamma|^2). \quad (1.3.15)$$

Передаваемую мощность можно выразить либо через $E(z)$ и $\bar{z}(z)$, либо через $H(z)$ и $\bar{z}(z)$ точно так же, как в предыдущем пара-



Фиг. 1.3.2. Стоячая волна $|1+\Gamma|$ и ее образование.

графе мощность была выражена через E_t и ξ_0 или через H_t и ξ_0 , т. е.

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int E(z) H(z)^* da \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int E(z) \frac{E(z)^*}{\xi(z)^*} da \right] = \\ = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\xi(z)^*} \int |E(z)|^2 da \right], \quad (1.3.16)$$

так как $E(z) E(z)^* \equiv |E(z)|^2$.

Полное сопротивление в любом сечении z можно выразить непосредственно через сопротивление при $z=0$ или через сопротивление в любом другом сечении.

Пусть в плоскости неоднородности нормированное сопротивление равно $\bar{z}(0)$. Из уравнения (1.3.13) коэффициент отражения в этой плоскости составляет

$$\Gamma_0 = \frac{\bar{z}(0) - 1}{\bar{z}(0) + 1}. \quad (1.3.17)$$

Тогда в произвольном сечении z коэффициент отражения равен

$$\Gamma = \Gamma_0 e^{j2\gamma z} = \frac{\bar{z}(0) - 1}{\bar{z}(0) + 1} e^{j2\gamma z}. \quad (1.3.18)$$

Подставив уравнение (1.3.18) в уравнение (1.3.12), получим соотношение между нормированным сопротивлением в произвольном сечении z [$\bar{z}(z)$] и нормированным сопротивлением в плоскости неоднородности [$\bar{z}(0)$]¹⁾

$$\bar{z}(z) = \frac{1 + \left(\frac{\bar{z}(0) - 1}{\bar{z}(0) + 1} \right) e^{j2\gamma z}}{1 - \left(\frac{\bar{z}(0) - 1}{\bar{z}(0) + 1} \right) e^{j2\gamma z}} = \frac{\bar{z}(0) \cos \gamma z - j \sin \gamma z}{\cos \gamma z - j \bar{z}(0) \sin \gamma z}. \quad (1.3.19)$$

Рассмотрим два частных случая. Когда коэффициент отражения равен нулю, волновод считается *согласованным*. Из уравнения (1.3.11) $\bar{z}(z) = 1$ для любого значения z . В другом важном частном случае волновод закорочен в сечении $z=0$. Граничные условия при этом требуют, чтобы $E(0) = 0$; тогда из уравнения (1.3.7') получим $\Gamma_0 = -1$ и из уравнения (1.3.12) $\bar{z}(0) = 0$. Нормированное сопротивление в произвольном сечении на расстоянии d

¹⁾ Аналогичным образом можно выразить $\bar{z}(z)$ не через $\bar{z}(0)$, а через $\bar{z}(z_1)$ — нормированное сопротивление в сечении z_1 , т. е.

$$\bar{z}(z) = \frac{z(z_1) \cos \gamma(z - z_1) - j \sin \gamma(z - z_1)}{\cos \gamma(z - z_1) - j z(z_1) \sin \gamma(z - z_1)}. \quad (1.3.19')$$

от места короткого замыкания, согласно уравнению (1.3.19), равно

$$\bar{z}(-d) = j \operatorname{tg} \gamma d. \quad (1.3.20)$$

Выражения для проводимостей могут быть получены точно таким же способом, как и выражения для сопротивлений.

Характеристическая проводимость \mathcal{Y}_0 определяется как величина, обратная ξ_0 ,

$$\mathcal{Y}_0 = \frac{1}{\xi_0} = \frac{H_t^+}{E_t^+}. \quad (1.3.21)$$

Абсолютная проводимость $\mathcal{Y}(z)$ определяется как величина, обратная $\xi(z)$,

$$\mathcal{Y}(z) = \frac{1}{\xi(z)} = \frac{H(z)}{E(z)}. \quad (1.3.22)$$

Нормированная проводимость $\bar{y}(z)$ есть величина, обратная $\bar{z}(z)$,

$$\bar{y}(z) = \frac{1}{\bar{z}(z)} = \frac{\mathcal{Y}(z)}{\mathcal{Y}_0} = \frac{1 - \Gamma}{1 + \Gamma}. \quad (1.3.23)$$

Из этого соотношения можно получить выражение для Γ

$$\Gamma = \frac{1 - \bar{y}(z)}{1 + \bar{y}(z)}. \quad (1.3.24)$$

Можно также получить соотношение между нормированной проводимостью в произвольном сечении волновода $\bar{y}(z)$ и нормированной проводимостью в сечении $z=0$

$$\bar{y}(z) = \frac{\bar{y}(0) \cos \gamma z - j \sin \gamma z}{\cos \gamma z - j \bar{y}(0) \sin \gamma z}. \quad (1.3.25)$$

Если $\bar{y}(0) = 1$ (волновод согласован), то $\bar{y}(z) = 1$ для любого сечения; если же волновод закорочен в плоскости $z=0$ [$\bar{y}(0) \rightarrow \infty$], то

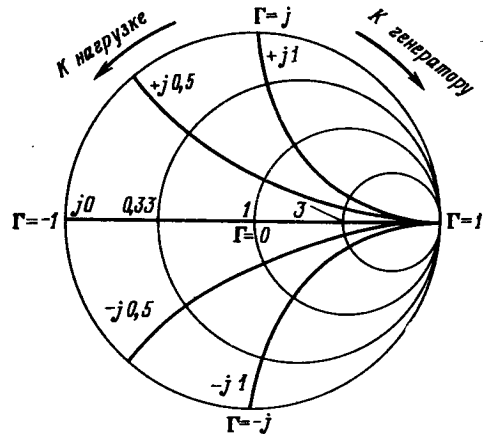
$$\bar{y}(-d) = -j \operatorname{ctg} \gamma d. \quad (1.3.25')$$

Решения уравнений (1.3.19), (1.3.12) и (1.3.13) можно легко найти с помощью круговой диаграммы [5], которая представляет собой график значений нормированного сопротивления $\bar{z}(z)$ на плоскости коэффициента отражения (фиг. 1.3.3). Круговая диаграмма находит широкое применение. В частности, она позволяет решить следующие задачи:

а. Определить коэффициент отражения Γ и нормированное входное сопротивление $\bar{z}(z)$ в любом сечении волновода, если известны положение и величина неоднородности или нагрузки; кроме того, может быть определена величина КСВН.

б. Решить обратную задачу [графически решить уравнение (1.3.19)], т. е., зная КСВН и положение минимума стоячей волны, определить либо коэффициент отражения неоднородности Γ , либо ее сопротивление $\bar{z}(z_1)$.

в. Согласовать любую неоднородность с помощью реактивной проводимости, т. е. найти величину проводимости и сечение, в которое она должна быть помещена (см. приложение V).



Ф и г. 1.3.3. Круговая диаграмма в полярной системе координат.

г. Проанализировать работу передающих линий, имеющих неоднородное заполнение (окна, обтекатели антенн, диэлектрические уплотнения); при этом необходимо отметить, что абсолютное сопротивление иногда можно рассматривать как изменяющееся непрерывно (§ 1.6), в то время как нормированное сопротивление так рассматривать нельзя.

В заключение отметим, что наиболее важным типом двухполюсников являются резонаторы. Ввиду их важности и сложности они будут рассмотрены отдельно.

§ 1.4. НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКИ НА ВХОДЕ МНОГОПОЛЮСНИКОВ

В § 1.2 и 1.3 был дан переход от понятия «поле» к понятию «цепь» для однородных волноводов и волноводов, на конце которых включена произвольная нагрузка. Этот переход осуществляется через мощность, которая остается инвариантной независимо от принятой точки зрения.

Желательно обобщить это понятие цепи на произвольно нагруженный двухполюсник и определить «напряжение» и «ток» неза-

висимо от поперечных координат, однако в полном соответствии с определениями мощности и сопротивления, выведенными выше. Соотношения между напряжениями и токами, определенные на каждом входе многополюсного соединения, определяют в свою очередь матрицу сопротивлений (проводимостей) многополюсника.

В настоящем параграфе выводятся важные свойства матрицы сопротивлений, которые затем обобщаются на матрицу рассеяния. Элементы матрицы рассеяния, как будет показано в следующей главе, являются линейной комбинацией элементов матрицы сопротивлений.

Определим нормированное напряжение $v(z)$ как величину, пропорциональную суммарному поперечному электрическому полю $E(z)$; коэффициент пропорциональности будет определен позже из соотношения между мощностью и сопротивлением.

Нормированный ток $i(z)$ определим как величину, пропорциональную суммарному поперечному магнитному полю $H(z)$. Коэффициент пропорциональности также определяется из соотношений между мощностью и сопротивлением¹⁾.

Падающей волне $E_t^+ = E_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)}$ соответствует падающая волна напряжения $v^+ = v_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)}$, а отраженной волне $E_t^- = E_0^- e^{j(\omega t + \gamma z)}$ соответствует отраженная волна напряжения $v^- = v_0^- e^{j(\omega t + \gamma z)}$. Величины v_0^+ и v_0^- — комплексные, причем их фазы определяются начальными фазовыми углами φ^+ и φ^- . Аналогичные соотношения имеют место и для магнитных полей и тока. Из уравнений (1.3.7') и (1.3.8') имеем

$$v(z) = v_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 + \Gamma] = v^+ [1 + \Gamma], \quad (1.4.1)$$

$$i(z) = i_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 - \Gamma] = i^+ [1 - \Gamma]. \quad (1.4.2)$$

Соотношение для комплексной мощности

$$P_{\text{компл}} = \frac{1}{2} \int [E H^*] da = \frac{1}{2} \int E(z) H(z)^* da = \frac{1}{2} v(z) i(z)^* \quad (1.4.3)$$

и произвольное (но удобное) определение сопротивления полностью определяют напряжение $v(z)$ и ток $i(z)$ ²⁾.

Может показаться, что более естественно было бы принять отношение $v(z)$ к $i(z)$ равным $\bar{z}(z)$ или даже $Z(z)$ — абсолютному сопротивлению, определенному через отношение V к I (§ 1.6). Однако в случае многополюсников наибольшая общность и наиболее

¹⁾ Никакого другого смысла $v(z)$ и $i(z)$ придавать не следует. При всех типах волн, кроме ТЕМ, аналогия с низкочастотным напряжением и током чисто формальная.

²⁾ Комплексная мощность $P_{\text{компл}}$ представляет собой среднюю за период высокочастотных колебаний мощность, включающую как активную ($\text{Re} P_{\text{компл}}$), так и реактивную ($\text{Im} P_{\text{компл}}$) мощность. Подобная картина имеет место, например, в случае конденсатора или катушки индуктивности при наличии в них активных потерь (см. следующий параграф).

краткая форма записи будут достигнуты, если принять

$$\frac{v(z)}{i(z)} = \bar{z}(z), \quad (1.4.4)$$

т. е. если отношение $v(z)/i(z)$ принять равным нормированному сопротивлению в сечении z .

Уравнение (1.4.3) можно переписать теперь только через $\bar{z}(z)$ и $v(z)$ или $i(z)$

$$P_{\text{номпл}} = \frac{1}{2} \frac{|v(z)|^2}{\bar{z}(z)^*} = \frac{1}{2} \bar{z}(z) |i(z)|^2. \quad (1.4.5)$$

Чтобы получить значения коэффициентов пропорциональности между $E(z)$ и $v(z)$, с одной стороны, и между $H(z)$ и $i(z)$ — с другой, запишем соответствующие поля из уравнений (1.2.1) — (1.2.5) в форме $A_0^\pm f(u_2, u_3) e^{j(\omega t \mp \gamma z)}$, где $A_0^\pm = A^\pm e^{j\varphi^\pm}$ — комплексная величина. Возможность записи составляющих поля в такой форме следует из уравнения (1.3.1).

Тогда вектор суммарного поперечного электрического поля $E(z)$ и вектор суммарного поперечного магнитного поля $H(z)$ можно записать в виде

$$E(z) = a_E [A_0^+ f(u_2, u_3)] (1 + \Gamma) e^{j(\omega t - \gamma z)} \sim v(z), \quad (1.4.6)$$

$$H(z) = a_H \left[\pm \frac{A_0^+}{Z_0} f(u_2, u_3) \right] (1 - \Gamma) e^{j(\omega t - \gamma z)} \sim i(z), \quad (1.4.7)$$

где a_E — единичный вектор в направлении поперечного электрического поля; a_H — единичный вектор в направлении поперечного магнитного поля (a_H ортогонален a_E).

Из уравнений (1.4.6) и (1.4.7) следует, что коэффициент пропорциональности между $E(z)$ и $v(z)$, а также между $H(z)$ и $i(z)$ определяется векторными функциями $f(u_2, u_3)^1$. Обозначим эти функции через $F(u_2, u_3)$ и $G(u_2, u_3)$. Пусть направления их совпадают соответственно с направлениями единичных векторов a_E и a_H . Функции $F(u_2, u_3)$ и $G(u_2, u_3)$, таким образом, ортогональны друг к другу.

Тогда

$$E(z) = F(u_2, u_3) v(z) = F(u_2, u_3) v_0^+ [(1 + \Gamma) e^{j(\omega t - \gamma z)}] = a_E [A_0^+ f(u_2, u_3)] (1 + \Gamma) e^{j(\omega t - \gamma z)}, \quad (1.4.6')$$

$$H(z) = G(u_2, u_3) i(z) = G(u_2, u_3) i_0^+ [(1 - \Gamma) e^{j(\omega t - \gamma z)}] = a_H \left[\pm \frac{A_0^+}{Z_0} f(u_2, u_3) \right] (1 - \Gamma) e^{j(\omega t - \gamma z)}. \quad (1.4.7')$$

¹⁾ Мы хотим получить соотношение между вектором $E(z)$ и скаляром $v(z)$, а не между комплексными скалярами $E(z)$ и $v(z)$, так как ясно, что если поперечное поле раскладывается на более чем одну пространственную составляющую, то коэффициент пропорциональности между $E(z)$ и $v(z)$ должен быть вектором (см., например, волну типа TE_{11} в круглом волноводе).

Таким образом, функция $F(u_2, u_3)$ запишется в виде

$$F(u_2, u_3) = a_E \frac{A_0^+}{v_0^+} f(u_2, u_3), \quad (1.4.8)$$

где A_0^+ и v_0^+ имеют одинаковую фазу. Функция $G(u_2, u_3)$ приобретает вид

$$G(u_2, u_3) = a_H \frac{\pm A_0^+}{Z_0 i_0^+} f(u_2, u_3)^1, \quad (1.4.9)$$

где A_0^+ и i_0^+ (а следовательно, и v_0^+) также имеют одинаковую фазу.

Мощность $P_{\text{номпл}}$ можно выразить либо через $E(z)$ и $Z(z)$ с помощью уравнения (1.3.16), либо через $v(z)$ и $\bar{z}(z)$ с помощью уравнения (1.4.7)

$$P_{\text{номпл}} = \frac{1}{2Z(z)^*} \int_S |E(z)|^2 da = \frac{|1 + \Gamma|^2}{2Z(z)^*} \int_S |A_0^+|^2 |f(u_2, u_3)|^2 da = \frac{|v(z)|^2}{2\bar{z}(z)^*} = \frac{|1 + \Gamma|^2}{2\bar{z}(z)^*} |v_0^+|^2. \quad (1.4.10)$$

Из этого выражения найдем v_0^+

$$v_0^+ = \frac{A_0^+}{\sqrt{Z_0}} \left[\int_S |f(u_2, u_3)|^2 da \right]^{1/2}, \quad (1.4.11)$$

так как v_0^+ имеет ту же фазу, что и A_0^+ .

После подстановки v_0^+ из уравнения (1.4.11) в уравнение (1.4.8) получим выражение для $F(u_2, u_3)$ в явном виде

$$F(u_2, u_3) = a_E \sqrt{Z_0} \frac{f(u_2, u_3)}{\left[\int_S |f(u_2, u_3)|^2 da \right]^{1/2}}. \quad (1.4.12)$$

Векторная функция $F(u_2, u_3)$ зависит только от распределения поперечного поля в сечении волновода S .

Аналогично получаем выражение для $G(u_2, u_3)$

$$G(u_2, u_3) = a_H \frac{1}{\sqrt{Z_0}} \frac{\pm f(u_2, u_3)}{\left[\int_S |f(u_2, u_3)|^2 da \right]^{1/2}}, \quad (1.4.13)$$

Из уравнений (1.4.12) и (1.4.13) непосредственно следует, что

$$\int_S [F(u_2, u_3) G(u_2, u_3)] da = 1. \quad (1.4.14)$$

¹⁾ Относительно знака « \pm » см. сноску на стр. 26. Знак «+» выбирается в том случае, когда векторы a_E , a_H и a_z образуют праввинтовую тройку векторов.

Из уравнений (1.4.10) и (1.4.6') имеем

$$\begin{aligned} P_{\text{компл}} &= \frac{1}{2} \frac{|v(z)|^2}{z(z)^*} = \frac{1}{2} \frac{1}{\mathcal{Z}(z^*)} \int_S |E(z)|^2 da = \\ &= \frac{1}{2} \frac{|v(z)|^2}{\mathcal{Z}(z)^*} \int_S |\mathbf{F}(u_2, u_3)|^2 da. \end{aligned} \quad (1.4.15)$$

Следовательно,

$$\int_S |\mathbf{F}(u_2, u_3)|^2 da = \mathcal{Z}_0. \quad (1.4.16)$$

Аналогично можно показать, что

$$\int_S |\mathbf{G}(u_2, u_3)|^2 da = \frac{1}{\mathcal{Z}_0}. \quad (1.4.17)$$

Используя уравнения (1.4.12) и (1.4.13), можно получить значения функций $\mathbf{F}(u_2, u_3)$ и $\mathbf{G}(u_2, u_3)$ для частных случаев.

1. Прямоугольный волновод, волна типа TE_{10} :

$$\mathbf{F}(x) = a_y \sin \frac{\pi x}{a} \left(\frac{2}{ab} \right)^{1/2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right)^{1/2},$$

$$\mathbf{G}(x) = -a_x \sin \frac{\pi x}{a} \left(\frac{2}{ab} \right)^{1/2} \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right)^{1/2}.$$

2. Круглый волновод, волна типа TE_{11} :

$$\mathbf{F}(r, \theta) = 0,89 \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right)^{1/2} \left[a_r \frac{1}{r} J_1(k_c r) \sin \theta + a_\theta k_c J_1'(k_c r) \cos \theta \right],$$

$$\begin{aligned} \mathbf{G}(r, \theta) = 0,89 \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \right)^{-1/2} \left[-a_r k_c J_1'(k_c r) \cos \theta + \right. \\ \left. + a_\theta \frac{1}{r} J_1(k_c r) \sin \theta \right]. \end{aligned}$$

3. Коаксиальная линия, волна типа TEM :

$$\mathbf{F}(r) = a(r) \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right)^{1/2} \left(\frac{1}{2\pi \ln(b/a)} \right)^{1/2} \frac{1}{r},$$

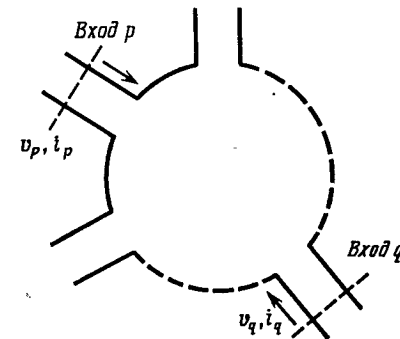
$$\mathbf{G}(r) = a_\theta \left(\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \right)^{-1/2} \left(\frac{1}{2\pi \ln(b/a)} \right)^{1/2} \frac{1}{r}.$$

Функции $\mathbf{F}(u_2, u_3)$ и $\mathbf{G}(u_2, u_3)$ позволяют перейти от поперечных составляющих поля к напряжениям и токам в волноводах любой формы при любом типе волны.

Понятия «напряжение» и «ток» особенно удобны при анализе многополюсных соединений (устройств) даже в том случае, когда эти соединения составлены из неодинаковых волноводов, так как при анализе таких соединений можно использовать методы теории

цепей. Все свойства цепей с сосредоточенными постоянными могут быть перенесены на сверхвысокочастотные соединения.

Рассмотрим $2n$ -полюсник, схематически изображенный на фиг. 1.4.1. Напряжение v_p на входе p ¹⁾ можно рассматривать как сумму «вкладов» от соответствующих токов на входах 1, 2, ..., p , ..., n . Связь этих величин искусственна; она предполагает, что соответствующие магнитные поля на входах 1, 2, ..., p , ..., n «возбуждают» электрические поля на входе p .



Ф и г. 1.4.1. $2n$ -полюсник.

Более того, если магнитное поле на входе q увеличивается вдвое, «вклад» его также удваивается, в то время как вклад от других входов не изменяется. Напряжение v_p является линейной комбинацией токов i_q

$$v_p = \sum_{q=1}^n \bar{z}_{pq} i_q, \quad (1.4.18)$$

где \bar{z}_{pq} — коэффициент, имеющий размерность сопротивления, произведение которого на i_q представляет собой «вклад» тока i_q в напряжение v_p во входном сечении волновода p .

Это свойство линейности непосредственно следует из линейности уравнений Максвелла. Рассмотрим третье уравнение $\text{rot } \mathbf{E} = -\mu(\partial \mathbf{H} / \partial t)$, которое можно считать «уравнением причинности»: поле \mathbf{H} «создает» поле \mathbf{E} таким образом, что ротор \mathbf{E} равен $(-\mu)$, умноженному на производную от \mathbf{H} по времени. Если $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2$, то и поле \mathbf{E} может быть разбито на две части \mathbf{E}_1 и \mathbf{E}_2 таким

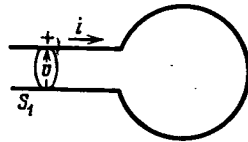
¹⁾ За «вход p » можно принять произвольное, но определенное поперечное сечение волновода p , которое можно считать начальным при отсчете координаты в продольном направлении. В дальнейшем вместо символа $v_p(z_p)$ используется символ v_p , вместо $i_p(z_p) - i_p$, вместо $\bar{z}_{pq}(z_p, z_q) - \bar{z}_{pq}$ и вместо $\bar{y}_{pq}(z_p, z_q) - \bar{y}_{pq}$, хотя эти величины изменяются как по фазе, так и по амплитуде. Это сделано для удобства записи и в то же время абсолютно не меняет сущности дела.

следуют из линейности уравнений Максвелла. Остается показать, что в случае изотропного заполнения многополюсник обратим, т. е.

$$\begin{aligned} \bar{z}_{pq} &= \bar{z}_{qp}, \\ \bar{y}_{pq} &= \bar{y}_{qp}. \end{aligned}$$

Однако сначала необходимо доказать теорему Пойнтинга, которая устанавливает связь между комплексной мощностью, активной мощностью и накопленной энергией, и лемму Лоренца, которая связывает поля двух отдельных решений уравнений Максвелла.

а. Теорема Пойнтинга. Рассмотрим двухполюсник, подсоединенный каким-либо способом к внешней цепи в сечении S_1 ;



Ф и г. 1.5.1. Двухполюсник с плоскостью отсчета S_1 .

входное напряжение u и ток i предполагаются известными. Предположим, что стенки двухполюсника изготовлены из идеальных проводников, однако внутри устройства могут иметь место потери¹⁾.

В случае синусоидальной зависимости от времени уравнения Максвелла (1.1.7) с учетом (1.1.4) могут быть записаны в комплексной форме

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H}, \\ \text{rot } \mathbf{H} &= (\sigma + j\omega\epsilon)\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (1.5.1)$$

Из тождества

$$\text{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] = \mathbf{H}^* \text{rot } \mathbf{E} - \mathbf{E} \text{rot } \mathbf{H}^* \quad (1.5.2)$$

после подстановки уравнения (1.5.1) и уравнения

$$\text{rot } \mathbf{H}^* = (\sigma - j\omega\epsilon)\mathbf{E}^* \quad (1.5.1')$$

получим

$$\begin{aligned} \text{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] &= -j\omega\mu\mathbf{H}^*\mathbf{H} - (\sigma - j\omega\epsilon)\mathbf{E}^*\mathbf{E} = \\ &= -j\omega\mu |H|^2 - (\sigma - j\omega\epsilon) |E|^2. \end{aligned} \quad (1.5.2')$$

Интеграл от дивергенции комплексного вектора Пойнтинга $[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]$ по объему устройства равен поверхностному интегралу

¹⁾ Если проводник не идеальный, необходимо увеличить рассматриваемый объем, в котором имеют место потери, на глубину проникновения. После этого можно снова считать, что стенки устройства изготовлены из идеального проводника; более подробно см. [2].

от этого вектора. Так как стенки устройства являются идеальными проводниками, то вектор \mathbf{E} на стенках параллелен $d\mathbf{a}$ и скалярное произведение $[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] d\mathbf{a}$ равно нулю. Поэтому поверхностный интеграл берем только по поверхности S_1 (фиг. 1.5.1)

$$\begin{aligned} \int_V \text{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] dv &= \int_{S_{\text{полн}}} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da = \int_{S_1} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da^1) = \\ &= j\omega \int_V (\epsilon |E|^2 - \mu |H|^2) dv - \int_V \sigma |E|^2 dv. \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

Умножим обе части равенства на -1

$$-\int_{S_1} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da = j\omega \int_V (\mu |H|^2 - \epsilon |E|^2) dv + \int_V \sigma |E|^2 dv. \quad (1.5.3')$$

Отдельные члены в уравнении (1.5.3') можно интерпретировать следующим образом:

$\int_{S_1} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da$ — удвоенная комплексная мощность, выходящая через сечение S_1 из рассматриваемого двухполюсника;

$-\int_{S_1} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da$ — удвоенная комплексная мощность, поступающая в двухполюсник через сечение S_1 ;

$\int_V \mu |H|^2 dv$ — учетверенная средняя накопленная энергия магнитного поля U_H ;

$\int_V \epsilon |E|^2 dv$ — учетверенная средняя накопленная энергия электрического поля U_E ;

$\int_V \sigma |E|^2 dv$ — удвоенная средняя мощность омических потерь.

Согласно уравнению (1.4.3),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} vi^* &= -\frac{1}{2} \int_S [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da = \text{комплексная мощность, поступающая} \\ &\text{в двухполюсник} = 2j\omega (U_H - U_E) + P. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

¹⁾ В этом выводе мы не можем произвольно задать направление вектора $d\mathbf{a}$; этот вектор, согласно теореме Остроградского — Гаусса, направлен из рассматриваемого объема, т. е. в отрицательном направлении оси z . Этим объясняется кажущееся противоречие в знаках в уравнениях (1.5.4) и (1.4.3); в последнем уравнении $d\mathbf{a}$ направлен по оси z . Заметим также, что направление i на фиг. 1.5.1 выбрано в соответствии с уравнением (1.4.3).

Понятие «комплексная мощность» теперь определено совершенно ясно. Оно включает действительную часть (омические потери) и мнимую часть $2\omega(U_H - U_E)$, которая в свою очередь выражается через накопленную магнитную и электрическую энергии и частоту.

Так как $v = \bar{z}i$, то равенство (1.5.4) можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \bar{z} i i^* = 2j\omega(U_H - U_E) + P,$$

откуда

$$\bar{z} = \frac{4j\omega(U_H - U_E) + 2P}{|i|^2}. \quad (1.5.5)$$

Аналогично получим

$$\bar{y} = \frac{4j\omega(U_E - U_H) + 2P}{|v|^2}. \quad (1.5.6)$$

Если $U_H = U_E$, то величина \bar{z} является чисто действительной, при $P = 0$ (потери равны нулю), сопротивление \bar{z} — чисто мнимая величина.

Теорему Пойнтинга можно обобщить на многополюсные соединения. Рассмотрим $2n$ -полюсник, подсоединенный к внешней цепи в сечениях S_1, S_2, \dots, S_n , соответствующих входам $1, 2, \dots, n$. Входные напряжения v_1, v_2, \dots, v_n и токи i_1, i_2, \dots, i_n определяются по отношению к тем же плоскостям отсчета.

Еще раз найдем интеграл от $\text{div}[\mathbf{E}\mathbf{H}^*]$ по объему, ограниченному идеальным проводником и плоскостями S_1, S_2, \dots, S_n . В результате получим уравнение, подобное (1.5.3), только теперь S_1 необходимо заменить на $S_1 + S_2 + \dots + S_n$

$$\begin{aligned} & - \int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da = \\ & = j\omega \left[\int_V (\mu |H|^2 - \varepsilon |E|^2) dv \right] + \sigma \int_V |E|^2 dv. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Но $-\int_S [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da$ представляет собой сумму удвоенных комплексных мощностей, поступающих во входы $1, 2, \dots, n$. Таким образом,

$$-\frac{1}{2} \int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} [\mathbf{E}\mathbf{H}^*] da = \frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p i_p^* = 2j\omega(U_H - U_E) + P, \quad (1.5.8)$$

где U_H, U_E и P имеют тот же смысл, что и в уравнении (1.5.3').

6. Лемма Лоренца. «Если $(\mathbf{E}^a, \mathbf{H}^a)$ и $(\mathbf{E}^b, \mathbf{H}^b)$ представляют собой два различных решения уравнений Максвелла, удовлетворяющие граничным условиям внутри рассматриваемого соединения (либо два различных типа волн, либо два разных генератора высокочастотных колебаний), то на одной и той же частоте имеет место равенство

$$\text{div} \{[\mathbf{E}^a \mathbf{H}^b] - [\mathbf{E}^b \mathbf{H}^a]\} = 0 \quad (1.5.9)$$

при условии, что устройство имеет изотропное заполнение¹⁾.

Доказательство тривиально

$$\begin{aligned} \text{div} \{[\mathbf{E}^a \mathbf{H}^b] - [\mathbf{E}^b \mathbf{H}^a]\} & \equiv \mathbf{H}^b \cdot \text{rot} \mathbf{E}^a - \\ & - \mathbf{E}^a \cdot \text{rot} \mathbf{H}^b - \mathbf{H}^a \cdot \text{rot} \mathbf{E}^b + \mathbf{E}^b \cdot \text{rot} \mathbf{H}^a. \end{aligned} \quad (1.5.10)$$

Но из уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E}^a & = -j\omega \mu \mathbf{H}^a, & \text{rot} \mathbf{H}^a & = (j\omega \varepsilon + \sigma) \mathbf{E}^a, \\ \text{rot} \mathbf{E}^b & = -j\omega \mu \mathbf{H}^b, & \text{rot} \mathbf{H}^b & = (j\omega \varepsilon + \sigma) \mathbf{E}^b. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в правую часть тождества (1.5.10), получим

$$\begin{aligned} & -j\omega \mu \mathbf{H}^a \mathbf{H}^b - (j\omega \varepsilon + \sigma) \mathbf{E}^a \mathbf{E}^b + \\ & + j\omega \mu \mathbf{H}^a \mathbf{H}^b + (j\omega \varepsilon + \sigma) \mathbf{E}^a \mathbf{E}^b \equiv 0, \end{aligned} \quad (1.5.11)$$

откуда следует равенство (1.5.9).

Проинтегрируем уравнение (1.5.9) по объему устройства и применим теорему Остроградского—Гаусса

$$\begin{aligned} \int_S \{[\mathbf{E}^a \mathbf{H}^b] - [\mathbf{E}^b \mathbf{H}^a]\} da & = 0 = \\ & = \int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} \{[\mathbf{E}^a \mathbf{H}^b] - [\mathbf{E}^b \mathbf{H}^a]\} da, \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

так как вектор \mathbf{E} параллелен da у проводящей поверхности.

Напряжение v_p^a и ток i_p^a , соответствующие полям \mathbf{E}^a и \mathbf{H}^a в сечении S_p , можно найти по правилам, полученным в предыдущем параграфе. Аналогично можно найти напряжение v_p^b и ток i_p^b , соответствующие \mathbf{E}^b и \mathbf{H}^b .

¹⁾ Если в системе имеются анизотропные элементы, тождество (1.5.11) не выполняется. Если, например, μ является тензором (матрицей), то в общем случае

$$\mathbf{H}^a([\mu] \mathbf{H}^b) \neq \mathbf{H}^b([\mu] \mathbf{H}^a),$$

или

$$\mathbf{H}^a \mathbf{V}^b \neq \mathbf{H}^b \mathbf{V}^a.$$

Если два решения соответствуют одному и тому же типу волны, т. е. если предполагается наличие двух генераторов высокочастотных колебаний, так что

$$\int_{S_p} [E^b H^b] da = c \int_{S_p} [E^a H^a] da,$$

где c — комплексный множитель, то уравнение (1.5.12) может быть записано с учетом уравнения (1.5.8) в виде

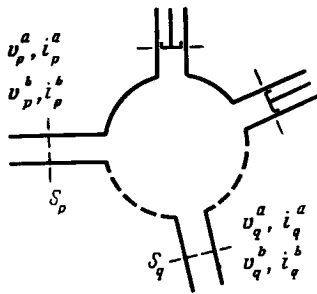
$$\begin{aligned} - \int_{S_1+S_2+\dots+S_n} \{[E^a H^b] - [E^b H^a]\} da = \\ = \sum_{p=1}^n (v_p^{a,b} - v_p^{b,a}) = 0. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Отметим, что в общем случае на любом входе p

$$\int_{S_p} \{[E^a H^b] - [E^b H^a]\} da \neq 0,$$

так как совершенно не обязательно, чтобы между E^a и H^a существовала такая же связь, как и между E^b и H^b .

в. Свойство обратимости (взаимности). Рассмотрим многополюсное соединение (фиг. 1.5.2), у которого закорочены все входы,



Ф и г. 1.5.2. $2n$ -полюсник; все входы закорочены, кроме p и q .

кроме входов p и q . Рассмотрим две пары: напряжение — ток на входе p (v_p^a, i_p^a) и (v_p^b, i_p^b) и соответствующие им две пары на входе q , равные (v_q^a, i_q^a) и (v_q^b, i_q^b). Пусть ко входу p каким-либо способом приложены напряжения v_p^a и v_p^b , а ко входу q — v_q^a и v_q^b .

Тогда из уравнения (1.5.13) получим

$$v_p^a i_p^b - v_p^b i_p^a + v_q^a i_q^b - v_q^b i_q^a = 0. \quad (1.5.14)$$

Но

$$\begin{aligned} i_p^a &= \bar{y}_{pp} v_p^a + \bar{y}_{pq} v_q^a, & i &= [\bar{y}] v \\ i_q^a &= \bar{y}_{qp} v_p^a + \bar{y}_{qq} v_q^a, \\ i_p^b &= \bar{y}_{pp} v_p^b + \bar{y}_{pq} v_q^b, \\ i_q^b &= \bar{y}_{qp} v_p^b + \bar{y}_{qq} v_q^b. \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в уравнение (1.5.14)

$$\begin{aligned} v_p^a (\bar{y}_{pp} v_p^b + \bar{y}_{pq} v_q^b) - v_p^b (\bar{y}_{pp} v_p^a + \bar{y}_{pq} v_q^a) + \\ + v_q^a (\bar{y}_{qp} v_p^b + \bar{y}_{qq} v_q^b) - v_q^b (\bar{y}_{qp} v_p^a + \bar{y}_{qq} v_q^a) = 0 \end{aligned}$$

или

$$(v_p^a v_q^b - v_p^b v_q^a) (\bar{y}_{pq} - \bar{y}_{qp}) = 0. \quad (1.5.15)$$

Так как напряжения $v_p^a, v_p^b, v_q^a, v_q^b$ произвольны и первая скобка не равна тождественно нулю, то

$$\bar{y}_{pq} = \bar{y}_{qp}. \quad (1.5.16)$$

Чтобы показать, что

$$\bar{z}_{pq} = \bar{z}_{qp}, \quad (1.5.17)$$

необходимо рассмотреть многополюсник, у которого все входы, за исключением входов p и q , нагружены на бесконечно большое сопротивление (для этого можно, например, к этим входам подсоединить четвертьволновые закороченные отрезки волноводов). Соотношение (1.5.14) останется в силе, но теперь, чтобы доказать соотношение (1.5.17), необходимо напряжения выразить через токи.

Уравнения взаимности (1.5.16) и (1.5.17) эквивалентны утверждению о том, что матрица сопротивлений $[\bar{z}]$ и матрица проводимостей $[\bar{y}]$ симметричны (приложение I). В заключение отметим, что из симметрии матриц какого-либо устройства не обязательно следует симметрия самого устройства.

г. Теорема Фостера [8]. В приложении II показано, что для двухполюсника без потерь справедливо соотношение:

$$\int_S \{[E dH^*] - [dEH^*]\} da = j\omega \int_V (\mu |H|^2 + \varepsilon |E|^2) dv, \quad (II.7)$$

где dH и dE — приращения векторов H и E при изменении частоты

на величину $d\omega$. Кроме того, там же показано, что

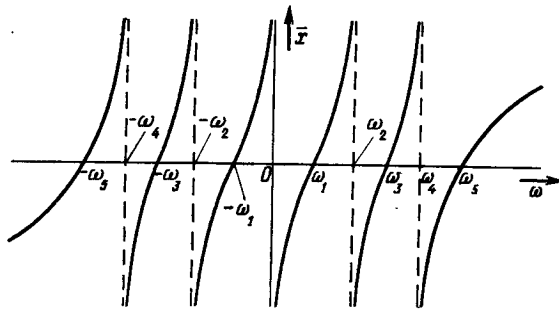
$$\frac{d\bar{x}}{d\omega} = \frac{4(U_E + U_H)}{|i|^2} \geq 0, \quad (1.5.18)$$

где \bar{x} — нормированное реактивное сопротивление соединения, не имеющего потерь ($\bar{z} = j\bar{x}$), и что

$$\frac{d\bar{b}}{d\omega} = \frac{4(U_E + U_H)}{|v|^2} \geq 0, \quad (1.5.19)$$

где \bar{b} — нормированная реактивная проводимость соединения без потерь ($\bar{y} = i\bar{b}$).

Соотношение (1.5.18) выражает тот факт, что наклон кривой зависимости реактивного сопротивления от частоты всегда



Ф и г. 1.5.3. Типичная зависимость реактивного сопротивления от частоты (потери равны нулю).

положителен; из соотношения (1.5.19) следует, что наклон кривой зависимости реактивной проводимости от частоты также всегда положителен.

Из соотношений (1.5.5) и (1.5.18) можно сделать следующие выводы:

а. Для устройства без потерь на частоте $\omega = 0$ реактивное сопротивление равно нулю или $-\infty$. При увеличении ω \bar{x} увеличивается, и если для конечных значений ω \bar{x} стремится к $+\infty$, то при дальнейшем возрастании ω \bar{x} переходит через значение $-\infty$ (фиг. 1.5.3). Между двумя полюсами кривая зависимости реактивного сопротивления от частоты пересекает ось абсцисс; полюса и нули чередуются.

б. Функция $\bar{x}(\omega)$ является нечетной, так как наклон кривой $\bar{x}(\omega)$ всегда положителен, даже при $\omega = 0$. Аналитически это запи-

сывается для любой частоты в виде

$$\frac{d\bar{x}(\omega)}{d\omega} = \frac{d\bar{x}(-\omega)}{d\omega} = \frac{4(U_E + U_H)}{|i|^2}.$$

Следовательно, $\bar{x}(-\omega) = -\bar{x}(\omega)$.

в. Из теории функций комплексных переменных известно, что две функции, имеющие одни и те же нули и полюсы в какой-либо области, равны с точностью до произвольной постоянной (имеют одинаковые разложения в ряд). Следовательно, на комплексной плоскости сопротивление \bar{x} полностью определяется своими полюсами и нулями с точностью до произвольной постоянной.

Запишем соотношение, определяющее \bar{x} , в общей форме

$$\bar{x} = A\omega \frac{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2), \dots, (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2), \dots, (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}, \quad (1.5.20)$$

где

- $\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n-2}$ — положительные полюсы,
- $-\omega_2, -\omega_4, \dots, -\omega_{2n-2}$ — отрицательные полюсы,
- $\omega_1, \omega_3, \dots, \omega_{2n-1}$ — положительные нули,
- $-\omega_1, -\omega_3, \dots, -\omega_{2n-1}$ — отрицательные нули,
- A — постоянная.

Отметим, что разность квадратов $(\omega^2 - \omega_p^2)$ равна произведению двух сомножителей $(\omega - \omega_p)(\omega + \omega_p)$, соответствующих двум частотам $+\omega_p$ и $-\omega_p$.

На основании теории вычетов соотношение (1.5.20) можно записать в виде ряда

$$\bar{x} = L_\infty \omega + \frac{a_0}{\omega} + \frac{2a_2\omega}{\omega^2 - \omega_2^2} + \dots + \frac{2a_{2n-2}\omega}{\omega^2 - \omega_{2n-2}^2}, \quad (1.5.21)$$

где $L_\infty = A$ и коэффициенты $a_0, a_2, \dots, a_{2n-2}$ в соответствии с терминологией теории функций комплексного переменного называются вычетами в полюсах $0, \omega_2, \dots, \omega_{2n-2}$.

Так как $\bar{b} = -1/\bar{x}$, то в соответствии с уравнением (1.5.20) имеем

$$\bar{b} = -\frac{1}{A\omega} \frac{\omega^2(\omega^2 - \omega_2^2), \dots, (\omega^2 - \omega_{2n-2}^2)}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_3^2), \dots, (\omega^2 - \omega_{2n-1}^2)}. \quad (1.5.22)$$

Тогда из уравнения (1.5.21)

$$\bar{b} = C_\infty \omega + \frac{b_0}{\omega} + \frac{2b_1\omega}{\omega^2 - \omega_1^2} + \dots + \frac{2b_{2n-1}\omega}{\omega^2 - \omega_{2n-1}^2}. \quad (1.5.23)$$

Таким образом, полюсы для \bar{x} становятся нулями для \bar{b} , а нули для \bar{x} — полюсами для \bar{b} . Вычеты в полюсе функции реактивного сопротивления $a_0, a_2, \dots, a_{2n-2}$ могут быть вычислены, если известна функция проводимости $\bar{b}(\omega)$.

В окрестности точки ω_{2i} запишем

$$\bar{x} \approx \frac{2a_{2i}\omega}{\omega^2 - \omega_{2i}^2} \quad (1.5.24)$$

и

$$\bar{b} \approx -\frac{\omega^2 - \omega_{2i}^2}{2a_{2i}\omega}. \quad (1.5.25)$$

Наклон кривой функции $\bar{b}(\omega)$ в ее нуле ω_{2i} равен

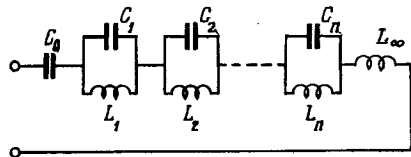
$$\left. \frac{d\bar{b}}{d\omega} \right|_{\omega_{2i}} = -\frac{1}{a_{2i}}, \quad (1.5.26)$$

откуда

$$a_{2i} = -\frac{1}{\left. \frac{d\bar{b}}{d\omega} \right|_{\omega_{2i}}}. \quad (1.5.26')$$

Таким образом, вычеты функции $\bar{x}(\omega)$ могут быть получены, если известны значения производных $d\bar{b}(\omega)/d\omega$.

Первая эквивалентная схема. Уравнение (1.5.21) соответствует ряду параллельных резонансных контуров, соединенных после-



Ф и г. 1.5.4. Первая эквивалентная схема (потери равны нулю).

довательно (фиг. 1.5.4). Типичное слагаемое $2a_{2i}\omega/(\omega^2 - \omega_{2i}^2)$ соответствует параллельному резонансному контуру, причем

$$\omega_{2i}^2 = 1/L_i C_i.$$

Полное сопротивление параллельного резонансного контура без потерь равно

$$\bar{z} = j\bar{x} = \frac{1}{j\omega C_i - \frac{j}{L_i\omega}} = -\frac{j\omega/C_i}{\omega^2 - \omega_{2i}^2},$$

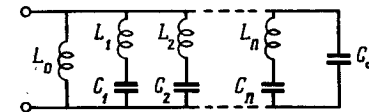
откуда

$$\bar{x} = \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_{2i}^2} \frac{1}{C_i}. \quad (1.5.27)$$

Непосредственное сравнение схемы, изображенной на фиг. 1.5.4, с формулой (1.5.21) показывает, что

$$C_0 = \frac{1}{a_0}, \quad C_i = -\frac{1}{2a_i}, \quad \omega_{2i}^2 = \frac{1}{L_i C_i}, \quad L_\infty = A.$$

Вторая эквивалентная схема. Уравнение (1.5.23) соответствует ряду последовательных резонансных контуров, соединенных



Ф и г. 1.5.5. Вторая эквивалентная схема (потери равны нулю).

параллельно. Типичное слагаемое $2b_{2i-1}\omega/(\omega^2 - \omega_{2i-1}^2)$ соответствует последовательному резонансному $L_i C_i$ -контуру, причем $\omega_{2i-1}^2 = 1/L_i C_i$.

Полная проводимость последовательного резонансного контура без потерь составляет

$$\bar{y} = j\bar{b} = \frac{1}{jL_i\omega - \frac{j}{C_i\omega}} = -\frac{j\omega/L_i}{\omega^2 - \omega_{2i-1}^2},$$

откуда

$$\bar{b} = -\frac{\omega/L_i}{\omega^2 - \omega_{2i-1}^2}. \quad (1.5.28)$$

Из непосредственного сравнения схемы, изображенной на фиг. 1.5.5, с выражением (1.5.22) следует, что

$$L_0 = -\frac{1}{b_0},$$

$$L_i = -\frac{1}{2b_i},$$

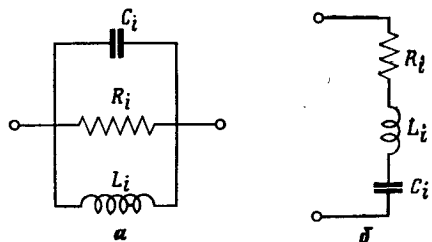
$$\omega_{2i-1}^2 = \frac{1}{L_i C_i},$$

$$C_\infty = -\frac{1}{A}.$$

Во многих практических случаях рабочий диапазон находится около какого-либо одного полюса, а другие полюса находятся

достаточно далеко и не оказывают влияния на реактивное сопротивление в рабочем диапазоне, как следует из уравнений (1.5.24) и (1.5.25). Резонаторы СВЧ, хотя и имеют бесконечно большое число резонансных частот, в рабочем диапазоне частот могут быть представлены простым LC -контуром¹⁾, если пренебречь потерями.

Практически любое СВЧ-устройство имеет потери. Можно привести формальные выводы и для общего случая, когда $\sigma \neq 0$ (см. [8]). При этом вместо $j\omega$ вводится комплексная частота $\omega_{\text{компл}}$. Однако удобнее предположить, что потери невелики и что количество энергии, рассеиваемой за период высокочастотных колебаний, мало по сравнению с запасенной энергией и не оказывает существенного влияния на реактивное сопротивление. Наиболее плодотворный



Ф и г. 1.5.6. Эквивалентные схемы с учетом небольших потерь.
а — первая эквивалентная схема; б — вторая эквивалентная схема.

подход к решению этой задачи состоит в введении понятия добротности Q (подробнее см. гл. 5, посвященную полым резонаторам). Типичный элемент первой эквивалентной схемы состоит в этом случае из параллельного соединения сопротивления R , емкости C и индуктивности L , причем $Q_i = \omega_{2i} C_i R_i$, а элемент второй эквивалентной схемы состоит из последовательного соединения R , L и C , причем $Q_i = \omega_{2i-1} L_i / R_i$.

Проводя грубую аналогию, можно сказать, что теорема Фостера позволяет анализировать сложные многополюсники и синтезировать их из простых элементов подобно тому, как гармонический анализ дает возможность анализировать и синтезировать периодические волны сложной формы путем разложения их на простые синусоидальные волны.

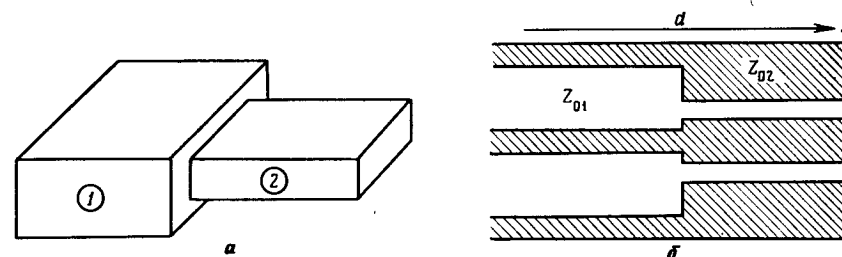
Полый резонатор СВЧ-диапазона (гл. 5) можно представить в виде одной из двух схем, изображенных на фиг. 1.5.6. Конкретный выбор зависит от выбора плоскости эквивалентного представления

¹⁾ В случае реальной цепи, состоящей из сосредоточенных элементов, число полюсов ограничено. Это основное отличие не существенно в том случае, когда рассматривается ограниченный диапазон частоты. Интересно отметить уже теперь, что для рассмотрения *переходных процессов* в устройствах СВЧ нельзя воспользоваться методом эквивалентных схем.

параметров полого резонатора. Если при сильной расстройке резонатора входное сопротивление в этой плоскости стремится к нулю, то используется эквивалентная схема, изображенная на фиг. 1.5.6, а. При стремлении входного сопротивления в плоскости отсчета к бесконечности должна использоваться схема, представленная на фиг. 1.5.6, б.

§ 1.6. СОЕДИНЕНИЕ ДВУХ ВОЛНОВОДОВ РАЗЛИЧНЫХ СЕЧЕНИЙ

Если два волновода 1 и 2 различного сечения соединены между собой (фиг. 1.6.1, а), то возникающая при этом неоднородность приводит к отражению волны. Задача по определению отражения



Ф и г. 1.6.1. Соединение двух волноводов или двух коаксиальных линий с различными размерами поперечного сечения.

может быть решена достаточно точно с помощью матрицы рассеяния или методом эквивалентных схем, которые будут описаны позже. Однако на данном этапе изучения предмета нет возможности определить влияние стыка на распространение электромагнитных волн, так как ни одна из величин \mathbf{E} , \mathbf{H} , v , i , \mathcal{Z}_0 , z не сохраняет непрерывности в месте неоднородности, даже если эта неоднородность незначительна.

С другой стороны, если соединены две различные коаксиальные линии или любые другие линии, работающие на волне типа TEM , то реальное напряжение $V(z)$ и ток $I(z)$ сохраняют непрерывность в месте неоднородности, если эта неоднородность не слишком велика (или в случае низкой частоты). Следовательно, абсолютное сопротивление $Z(z)$, которое определяется как

$$Z(z) = \frac{V(z)}{I(z)}, \quad (1.6.1)$$

также сохраняет непрерывность в месте стыка (фиг. 1.6.1, б). По аналогии с определением «полевого» характеристического сопротивления \mathcal{Z}_0 (§ 1.2) «цепное» характеристическое сопротив-

ление (иногда называемое также волновым сопротивлением) можно определить как

$$Z_0 = \frac{V_0^+}{I_0^+}, \quad (1.6.2)$$

где V_0^+ и I_0^+ — бегущие волны напряжения и тока.

Для коаксиальной линии с радиусом внутреннего проводника a и радиусом наружного проводника b имеем

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{\ln b/a}{2\pi}. \quad (1.6.2a)$$

В случае ленточной линии при расстоянии между лентами b и ширине ленты a ($a \gg b$) характеристическое сопротивление равно

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{b}{a}. \quad (1.6.2b)$$

Поскольку напряжение $V(z)$ пропорционально величине $E(z)$ в соответствии с уравнением

$$V(z) = - \int \mathbf{E}(z) dl, \quad (1.6.3)$$

а ток $I(z)$ пропорционален напряженности $H(z)$ в соответствии с уравнением

$$I(z) = \int \mathbf{H}(z) dl, \quad (1.6.4)$$

где контуры интегрирования находятся в плоскости поперечного сечения линии, постольку можно записать, что

$$\frac{V(z)}{V_0^+} = \frac{E(z)}{E_0^+}, \quad \frac{I(z)}{I_0^+} = \frac{H(z)}{H_0^+}. \quad (1.6.5)$$

Отсюда

$$\frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V_0^+}{I_0^+} \frac{H_0^+}{E_0^+} \frac{E(z)}{H(z)}. \quad (1.6.6)$$

Из уравнений (1.3.11), (1.3.12) и (1.6.1) получаем

$$\frac{V(z)}{I(z)} = Z_0 \bar{z}(z). \quad (1.6.7)$$

Отсюда следует, что нормированное сопротивление $\bar{z}(z)$ характеризует зависимость от координаты z как отношения $V(z)/I(z)$, так и отношения $E(z)/H(z)$ и $v(z)/i(z)$.

Если неоднородность расположена в сечении $z = d$, то из непрерывности $Z(z)$ следует, что

$$Z(d) = \bar{z}_1(d) Z_{01} = \bar{z}_2(d) Z_{02}. \quad (1.6.8)$$

Таким образом, легко получить выражение для нормированного сопротивления $\bar{z}_1(d)$ в линии 1 через нормированное сопротивление в линии 2, равное $\bar{z}_2(d)$, и через характеристические сопротивления рассматриваемых линий.

Абсолютная полная проводимость может быть записана в виде

$$Y_-(z) = \frac{I(z)}{V(z)}. \quad (1.6.9)$$

Можно показать, как это было сделано для сопротивлений, что

$$\frac{I(z)}{V(z)} = Y_0 \bar{y}(z), \quad (1.6.10)$$

где

$$Y_0 = \frac{1}{Z_0}. \quad (1.6.9')$$

В волноводах ни ток I , ни напряжение V нельзя определить строго, так как уравнение Лапласа применить нельзя, даже если ограничиться плоскостью поперечного сечения, как это делается в случае линии передач с волной типа ТЕМ.

Наиболее целесообразно определять сопротивления и проводимости через условные напряжение и ток.

«Напряжение» определяется как интеграл от $E_{t \max}$ вдоль направления этого вектора, так что в случае прямоугольного волновода сечением $a \times b$ на волне типа TE_{10} получаем

$$V = b E_{y \max} = b E_m. \quad (1.6.11)$$

«Ток» можно определить как интеграл от вектора H_t вдоль границы сечения; в случае прямоугольного волновода на волне типа TE_{10} получаем

$$I = \frac{2a E_m}{\pi \xi_0}. \quad (1.6.12)$$

Характеристическое сопротивление, определенное через условный ток и напряжение, в случае прямоугольного волновода, возбужденного на волне типа TE_{10} , равно

$$Z_{0V, I} = \frac{\pi}{2} \frac{b}{a} \xi_0. \quad (1.6.13)$$

При определении характеристического сопротивления через напряжение и мощность [уравнение (1.2.12)] получим

$$Z_{0P, V} = 2 \frac{b}{a} \xi_0. \quad (1.6.14)$$

Если за основу расчета взять мощность и ток, то

$$Z_{0P, I} = \frac{\pi^2}{8} \frac{b}{a} Z_0. \quad (1.6.15)$$

Во всех этих определениях присутствуют множитель Z_0 и коэффициент b/a [ср. с уравнением (1.6.2 б)]. Аналогично характеристической проводимостью Y_0 пропорциональна a/b и Y_0 .

В дальнейшем (§ 4.1, 4.5, гл. 5—7) под характеристическим сопротивлением будет подразумеваться сопротивление $Z_{0V, I}$, определяемое формулой (1.6.13). Там же будет проведена экспериментальная проверка и уточнение этого понятия.

Несмотря на условность, введение понятия характеристического сопротивления Z_0 для волноводов очень удобно, так как позволяет ввести ряд упрощений. Так, например, теперь ясно, что для того, чтобы стык двух волноводов не давал отражений, необходимо сохранить непрерывность величины $Z(z)$.

Матрица рассеяния

§ 2.0. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе вводятся понятия нормированной падающей волны a и нормированной отраженной волны b , которые являются скалярными комплексными величинами. Амплитуды этих волн пропорциональны соответственно поперечным составляющим электрического поля падающей и отраженной волн. Нормировка проводится таким образом, что величина $1/2 a_p a_p^* \equiv 1/2 |a_p|^2$ равна мощности, подводимой к p -входу многополюсника, а величина $1/2 b_p b_p^* \equiv 1/2 |b_p|^2$ равна мощности, отраженной от этого входа.

Матрица рассеяния $[S]$ определяет соотношения между отраженными и падающими нормированными волнами. Эта матрица зависит только от конструкции многополюсника и определяет все его свойства как высокочастотной цепи. В том случае, когда число входов многополюсника больше двух, матрица $[S]$ обладает существенными преимуществами перед матрицей $[\bar{z}]$. Однако она обладает и определенными недостатками, особенно в тех случаях, когда в соединении имеются резонансные элементы. В случае пренебрежимо малых потерь можно воспользоваться свойством унитарности матрицы $[S]$ и довольно просто составить баланс мощности.

В § 2.3 изучаются свойства матрицы рассеяния. В частности, показывается, как изменяются элементы матрицы $[S]$ с изменением положения плоскостей отсчета и как меняется коэффициент отражения на входе многополюсника, если произвольную нагрузку помещать на различных расстояниях от выхода многополюсника.

Для многополюсника с неизвестным внутренним устройством элементы матрицы рассеяния могут быть определены только из эксперимента. Параграф 2.4 посвящен различным методам измерения этих элементов, а в приложениях III, IV и VI дается обоснование этих методов.

В случае симметричного многополюсника элементы матрицы $[S]$ можно полностью определить, исходя из общих свойств матриц рассеяния и симметрии полей. На основании таких соображений в § 2.5 определена матрица рассеяния двойного волноводного тройника.

В § 2.6 показывается, как можно использовать матрицу [S] для определения выходных параметров и распределения мощности по входам многополюсника в случае специальных или произвольных нагрузок при известных параметрах высокочастотного генератора.

§ 2.1. НОРМИРОВАННЫЕ ВОЛНЫ И МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ [4]

Определим нормированную падающую волну a_p в плоскости отсчета на p -входе многополюсника как скалярную величину, пропорциональную комплексной амплитуде поперечной составляющей электрического поля E_{\perp}^+ падающей волны.

Аналогично определим нормированную отраженную (рассеянную) волну b_p как комплексную скалярную величину, пропорциональную амплитуде поперечной составляющей отраженной волны E_{\perp}^- . Отметим, что эта отраженная волна определяется не только падающей волной в рассматриваемом входе, но и падающими волнами в других входах многополюсника. Кроме того, выберем коэффициенты пропорциональности так, чтобы

$$\frac{1}{2} a_p a_p^* = \frac{1}{2} |a_p|^2 = P_{\text{пад}} \text{ на входе } p, \quad (2.1.1)$$

$$\frac{1}{2} b_p b_p^* = \frac{1}{2} |b_p|^2 = P_{\text{отраж}} \text{ на входе } p. \quad (2.1.2)$$

Можно было бы определить коэффициенты пропорциональности непосредственно через поля, как это было сделано в § 1.4 для нормированных напряжений и токов. Если при определении нормированных напряжений и токов рассматривались суммарные E и H поля и комплексная мощность, то теперь необходимо рассмотреть электрические поля падающей и отраженной волн и падающую и отраженную мощности. Однако величины a_p и b_p можно выразить через v_p и i_p , а так как последние уже определены через поля, то a_p и b_p также будут выражены (косвенно) через составляющие электромагнитного поля.)

Ради простоты рассмотрим сначала двухполюсник. Используя уравнение (1.4.1) и учитывая определение коэффициента отражения Γ , имеем

$$\begin{aligned} v(z) &= v_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 + \Gamma] = v_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 + \Gamma_0 e^{j2\gamma z}] = \\ &= v_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} + \Gamma_0 v_0^+ e^{j(\omega t + \gamma z)} = \\ &= v^+ + v^-, \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

где

$$\begin{aligned} v^+ &= v_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)}, \\ v^- &= \Gamma_0 v_0^+ e^{j(\omega t + \gamma z)}. \end{aligned}$$

Таким образом, величина $v(z)$ может рассматриваться как сумма «волны напряжения» v^+ , распространяющейся в положительном направлении, и «волны напряжения» v^- , распространяющейся в отрицательном направлении. В этом нет ничего неожиданного, так как по определению напряжение $v(z)$ пропорционально напряженности $E(z)$, которая в общем случае представляет собой стоячую волну.

Аналогично из уравнений (1.4.2) находим

$$\begin{aligned} i(z) &= i_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 - \Gamma] = i_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} [1 - \Gamma_0 e^{j2\gamma z}] = \\ &= i_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)} - \Gamma_0 i_0^+ e^{j(\omega t + \gamma z)} = i^+ + i^-, \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

где

$i^+ = i_0^+ e^{j(\omega t - \gamma z)}$ — волна тока, распространяющаяся в положительном направлении;

$i^- = -\Gamma_0 i_0^+ e^{j(\omega t + \gamma z)}$ — волна тока, распространяющаяся в отрицательном направлении.

Из уравнения (1.4.4) следует, что

$$\frac{v^+}{i^+} = \frac{v_0^+}{i_0^+} = 1 \quad (2.1.5)$$

и

$$\frac{v^-}{i^-} = -\frac{v_0^+}{i_0^+} = -1, \quad (2.1.6)$$

так как в случае чисто бегущей волны нормированное сопротивление всегда равно ± 1 .

Подставив уравнения (2.1.5) и (2.1.6) в уравнения (2.1.3) и (2.1.4), получим

$$\begin{aligned} v(z) &= v^+ + v^-, \\ i(z) &= v^+ - v^-. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Полагая $v^+ = a$, $v^- = b$, из уравнения (2.1.7) находим

$$\begin{aligned} v(z) &= a + b, \\ i(z) &= a - b. \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

Комплексная скалярная величина a , определенная таким образом, действительно пропорциональна комплексной амплитуде поперечного электрического поля E_{\perp}^+ . Эта величина удовлетворяет также условию (2.1.1), так как из уравнений (2.1.5) и (1.4.3)

$$P_{\text{пад}} = \frac{1}{2} |a|^2 = \frac{1}{2} |v^+|^2 = \frac{1}{2} v^+ i^{+*}. \quad (2.1.9)$$

Для комплексной величины b из уравнений (2.1.6) и (1.4.3) имеем

$$P_{\text{отраж}} = \frac{1}{2} |b|^2 = \frac{1}{2} |v^-|^2 = \frac{1}{2} v^- i^{-*}. \quad (2.1.10)$$

для двухполюсника, где коэффициент отражения Γ занимает место матрицы $[S]$.

Элемент матрицы рассеяния s_{pq} определяет вклад в волну, выходящую из входа p , если на вход q подается единичная волна. Следовательно, s_{pq} определяет связь между входом q и входом p . Диагональный элемент s_{ii} определяет вклад в волну, отраженную от входа i , при подаче на этот вход единичной волны. Следовательно, в том случае, когда все падающие волны a_p равны нулю, за исключением a_i , $b_i = s_{ii} a_i$.

Диагональный элемент s_{ii} играет в этом случае роль коэффициента отражения от входа i .

§ 2.2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Для соединения, имеющего n входов, вместо первого уравнения (2.1.8) следует написать систему из n уравнений:

$$\begin{aligned} v_1 &= a_1 + b_1, \\ v_2 &= a_2 + b_2, \\ &\dots \\ v_n &= a_n + b_n \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}. \quad (2.2.1')$$

Аналогично

$$\begin{aligned} i_1 &= a_1 - b_1, \\ i_2 &= a_2 - b_2, \\ &\dots \\ i_n &= a_n - b_n \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{i} = \mathbf{a} - \mathbf{b}. \quad (2.2.2')$$

Выразим матрицы-столбцы \mathbf{v} и \mathbf{i} через $[S]$ и \mathbf{a} , используя соотношение (2.1.16'),

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{a} + [S] \mathbf{a} = [I + S] \mathbf{a}^1, \\ \mathbf{i} &= \mathbf{a} - [S] \mathbf{a} = [I - S] \mathbf{a}. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

Согласно уравнению (2.1.11),

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{1}{2} [\mathbf{v} + \mathbf{i}], \\ \mathbf{b} &= \frac{1}{2} [\mathbf{v} - \mathbf{i}]. \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

¹⁾ В правой части выражения (2.2.3) стоят матрицы. Таким образом, запись в виде $[I + S]$ эквивалентна записи $([I] + [S])$.

Путем несложных алгебраических преобразований (см. приложение I) легко показать, что

$$[S] = [\bar{z} - I] [\bar{z} + I]^{-1} = [I] - 2 [\bar{z} + I]^{-1}, \quad (2.2.5)$$

$$[S] = [I - \bar{y}] [I + \bar{y}]^{-1} = 2 [I + \bar{y}]^{-1} [I], \quad (2.2.6)$$

$$[\bar{z}] = [I + S] [I - S]^{-1} = [I] + 2 [S] [I - S]^{-1}, \quad (2.2.7)$$

$$[\bar{y}] = [I - S] [I + S]^{-1} = [I] - 2 [S] [I + S]^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Выражение (2.2.5) получается из (2.2.4). Подставив в последнее $[\bar{z}] \mathbf{i} = \mathbf{v}$, получим

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} + \mathbf{i}) = \frac{1}{2} ([\bar{z}] \mathbf{i} + \mathbf{i}) = \frac{1}{2} [\bar{z} + I] \mathbf{i},$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{i}) = \frac{1}{2} ([\bar{z}] \mathbf{i} - \mathbf{i}) = \frac{1}{2} [\bar{z} - I] \mathbf{i}.$$

Так как $\mathbf{b} = [S] \mathbf{a}$,

$$[\bar{z} - I] = [S] [\bar{z} + I].$$

Умножив левую и правую части равенства на $[\bar{z} + I]^{-1}$, получим

$$[\bar{z} - I] [\bar{z} + I]^{-1} = [S] = [\bar{z} + I - 2] [\bar{z} + I]^{-1} = [I] - 2 [\bar{z} + I]^{-1}.$$

Выражение (2.2.6) выводится аналогично. Подставим $[\bar{y}] \mathbf{v} = \mathbf{i}$ в уравнение (2.2.4). Тогда

$$\mathbf{a} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} + [\bar{y}] \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [I + \bar{y}] \mathbf{v},$$

$$\mathbf{b} = \frac{1}{2} (\mathbf{v} - [\bar{y}] \mathbf{v}) = \frac{1}{2} [I - \bar{y}] \mathbf{v}.$$

Поскольку

$$\mathbf{b} = [S] \mathbf{a},$$

то

$$[I - \bar{y}] = [S] [I + \bar{y}].$$

Умножив обе части равенства на $[I + \bar{y}]^{-1}$, получим

$$[I - \bar{y}] [I + \bar{y}]^{-1} = [S] = [2 - \bar{y} + I] [I + \bar{y}]^{-1} = 2 [I + \bar{y}]^{-1} - [I].$$

Исходными соотношениями для вывода уравнения (2.2.7) являются соотношения (2.2.3) и $\mathbf{v} = [\bar{z}] \mathbf{i}$

$$\mathbf{v} = [I + S] \mathbf{a} = [\bar{z}] \mathbf{i},$$

$$\mathbf{i} = [I - S] \mathbf{a}.$$

После исключения \mathbf{i} получим

$$[I + S] = [\bar{z}] [I - S].$$

Умножим обе части равенства на $[I - S]^{-1}$

$$[I + S][I - S]^{-1} = [\bar{z}] = [I - S + 2S][I - S]^{-1} = [I] + 2[S][I - S]^{-1}.$$

Чтобы получить последнее равенство (2.2.8), подставим $\mathbf{i} = [\bar{y}] \mathbf{v}$ в (2.2.3) и исключим \mathbf{v}

$$\mathbf{v} = [I + S] \mathbf{a},$$

$$\mathbf{i} = [I - S] \mathbf{a} = [\bar{y}] \mathbf{v},$$

$$[\bar{y}] [I + S] = [I - S].$$

Умножив обе части равенства на $[I + S]^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} [\bar{y}] &= [I - S] [I + S]^{-1} = [I + S - 2S] [I + S]^{-1} = \\ &= [I] - 2[S] [I + S]^{-1}. \end{aligned}$$

Интересно сравнить равенства (2.2.5) с (1.3.13), (2.2.6) с (1.3.24), (2.2.7) с (1.3.12) и (2.2.8) с (1.3.23) для двухполосника. В каждом из этих выражений матрица рассеяния $[S]$ играет роль коэффициента отражения Γ , а матрицы $[\bar{z}]$ и $[\bar{y}]$ — нормированного сопротивления $\bar{z}(z)$ и нормированной проводимости $\bar{y}(z)$. Этот факт еще раз подтверждает, что матрицы не являются математической абстракцией. Матрицы-столбцы следует рассматривать как условия на входе и выходе СВЧ-устройства, а квадратная матрица характеризует внутренние свойства последнего.

Из уравнений (2.2.5) и (2.2.6) следует, что свойства, выведенные для матриц $[\bar{z}]$ и $[\bar{y}]$, можно перенести на матрицу $[S]$. Отметим несколько частных случаев.

а. Если $\bar{z}_{pq} = \bar{z}_{qp}$, что имеет место в устройствах с изотропной средой, т. е. если $[\bar{z}]$ симметрична, то и $[S]$ симметрична, так как матрицы $[\bar{z} - I]$, $[\bar{z} + I]$ и $[\bar{z} + I]^{-1}$ также симметричны. Устройство в этом случае взаимно.

б. Если потерями в соединении можно пренебречь и, кроме того, в нем отсутствуют анизотропные элементы, то

$$\frac{1}{2} \mathbf{j} \mathbf{a}^T [S]^* [S]' \mathbf{a} = U_E + U_H \geq 0, \quad (2.2.9)$$

где

$$[S]' = \left[\frac{ds_{pq}}{d\omega} \right].$$

Доказательство этого частного случая теоремы Фостера основано на использовании соотношения (II.17), полученного в приложении II и имеющего вид

$$\sum_{p=1}^n (v_p di_p^* - dv_p i_p^*) = -4j d\omega (U_E + U_H). \quad (II.17)$$

Здесь напряжение v_p и ток i_p сдвинуты по фазе относительно друг друга на 90° . Согласно уравнению (2.1.8), v_p и i_p можно выразить через a_p и b_p

$$\begin{aligned} v_p &= a_p + b_p, \\ i_p &= a_p - b_p. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Следовательно, a_p и b_p должны удовлетворять условию, чтобы разность фаз между суммой $(a_p + b_p)$ и разностью $(a_p - b_p)$ этих величин равнялась 90° .

Ради простоты выберем плоскость отсчета так, чтобы величина v_p была действительной. В этом случае результирующий ток i_p является чисто мнимой величиной и $i_p^* = -i_p$. Подставив в соотношение (II.17) уравнения (2.2.10), получим

$$\sum_{p=1}^n (b_p da_p - a_p db_p) = 2j d\omega (U_E + U_H) \quad (2.2.11)$$

или в матричной форме

$$(\mathbf{b}^T d\mathbf{a} - \mathbf{a}^T d\mathbf{b}) = 2j d\omega (U_E + U_H). \quad (2.2.11')$$

Так как v_p — действительная величина, то из уравнений (2.2.3) имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= [I + S] \mathbf{a} \text{ — действительная величина,} \\ \mathbf{i} &= [I - S] \mathbf{a} \text{ — мнимая величина,} \end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned} [I + S]^* \mathbf{a}^* &= [I + S] \mathbf{a}, \\ [I - S]^* \mathbf{a}^* &= -[I - S] \mathbf{a}. \end{aligned}$$

Из двух последних равенств

$$\mathbf{a}^* = [S] \mathbf{a} = \mathbf{b} \text{ или } \mathbf{a} = ([S] \mathbf{a})^* = \mathbf{b}^*. \quad (2.2.12)$$

Равенство (2.2.12) устанавливает соотношение между \mathbf{a} и \mathbf{b} , которое должно всегда выполняться.

Подставим значение полного дифференциала

$$d\mathbf{b} = [S] d\mathbf{a} + [dS] \mathbf{a}$$

в уравнение (2.2.11') и используем соотношение

$$\mathbf{b}^T d\mathbf{a} = ([S] \mathbf{a})^T d\mathbf{a} = \mathbf{a}^T [S]^T d\mathbf{a},$$

где \mathbf{a}^T и \mathbf{b}^T — транспонированные матрицы-столбцы.

Имеем

$$-\mathbf{a}^T [dS] \mathbf{a} = 2j d\omega (U_E + U_H) \quad (2.2.13)$$

или, согласно уравнению (2.2.12),

$$\frac{1}{2} j ([S] \mathbf{a})^H [dS] \mathbf{a} = d\omega (U_E + U_H). \quad (2.2.14)$$

Для того чтобы получить искомое соотношение (2.2.9), следует применить теорему II из приложения I

$$\left[\frac{dS}{d\omega} \right] = [S]'$$

Если v_p является комплексной величиной с фазовым углом $\varphi/2$ [4], то уравнение (2.2.12) запишется в виде

$$\mathbf{a} = e^{j\varphi} ([S] \mathbf{a})^*, \quad \mathbf{a}^T = e^{j\varphi} ([S] \mathbf{a})^H.$$

Соответственно уравнение (2.2.13) примет вид

$$-\mathbf{a}^T [dS] \mathbf{a} = 2j d\omega e^{j\varphi} (U_E + U_H).$$

Однако окончательный результат (2.2.9) остается прежним, так как множитель $e^{j\varphi}$ сокращается при подстановке в последнее выражение величины \mathbf{a}^T .

В. Если многополосник не имеет потерь, то матрица рассеяния $[S]$ унитарна, т. е.

$$[S]^H [S] = [I]. \quad (2.2.15)$$

На основании теоремы Пойнтинга для многополосника запишем

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p i_p^* = 2j\omega (U_H - U_E) + P \quad (1.5.8)$$

или в случае отсутствия потерь

$$\frac{1}{2} \sum_{p=1}^n v_p i_p^* = 2j\omega (U_H - U_E). \quad (2.2.16)$$

В матричной форме при подстановке

$$\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b},$$

$$\mathbf{i} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

получим

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} - \mathbf{b})^H (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= 4j\omega (U_H - U_E) = \\ &= (\mathbf{a}^H \mathbf{a} - \mathbf{b}^H \mathbf{b}) + (\mathbf{a}^H \mathbf{b} - \mathbf{b}^H \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (2.2.16')$$

Поскольку произведения $\mathbf{a}^H \mathbf{a}$ и $\mathbf{b}^H \mathbf{b}$ всегда действительны, а величина $(\mathbf{a}^H \mathbf{b} - \mathbf{b}^H \mathbf{a})$ является либо мнимой, либо равна нулю, то

$$\mathbf{a}^H \mathbf{a} - \mathbf{b}^H \mathbf{b} = 0, \quad (2.2.17)$$

так как правая часть равенства (2.2.16) — чисто мнимая величина. Уравнение (2.2.17) соответствует утверждению, что в том случае, когда потери в многополоснике равны нулю, суммарная мощность падающих волн $1/2 (\mathbf{a}^H \mathbf{a})$ во всех плечах равна суммарной мощности отраженных волн $1/2 (\mathbf{b}^H \mathbf{b})$.

Подставив $\mathbf{b} = [S] \mathbf{a}$ в уравнение (2.2.17), получим

$$\mathbf{a}^H \mathbf{a} - [S \mathbf{a}]^H [S \mathbf{a}] = 0$$

или

$$\mathbf{a}^H \mathbf{a} - \mathbf{a}^H [S]^H [S] \mathbf{a} = 0,$$

$$\mathbf{a}^H (I - [S]^H [S]) \mathbf{a} = 0.$$

Так как \mathbf{a} есть произвольная величина, то

$$[I] - [S]^H [S] = 0. \quad (2.2.18)$$

Соотношение (2.2.18) справедливо как в случае изотропного, так и анизотропного заполнения. Если заполнение изотропно, то $[S]^H = [S]^*$, так что

$$[S]^* [S] = [S]^{-1} [S] = [I] \quad (2.2.19)$$

и

$$[S]^* = [S]^{-1}. \quad (2.2.20)$$

§ 2.3. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ ИЗ ОСНОВНЫХ СВОЙСТВ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

В предыдущем параграфе были рассмотрены наиболее важные общие свойства матриц рассеяния. Все они получены из принятых определений и энергетических соотношений. Исследование реального СВЧ-устройства состоит в нахождении его матрицы рассеяния и определении всех его свойств, которые вытекают из этой матрицы. При разработке нового устройства в большинстве случаев необходимо сначала, исходя из его назначения, определить требуемую матрицу рассеяния и уже затем синтезировать цепь, имеющую заданную матрицу рассеяния.

Необходимо еще раз подчеркнуть, что матрица рассеяния $[S]$ отражает свойства, присущие данному многополоснику как высоко-частотной цепи на заданной частоте. Нагрузки же на зажимах

многополюсника могут меняться, не оказывая влияния на матрицу рассеяния. В частности, некоторые специальные типы нагрузок могут быть использованы для определения элементов матрицы рассеяния.

Приведем некоторые преимущества матрицы рассеяния $[S]$ над матрицами проводимостей $[\bar{y}]$ и сопротивлений $[\bar{z}]$.

а. Как было отмечено в § 2.1, в технике СВЧ в идеальном случае используются генераторы, мощность которых остается постоянной при изменении нагрузки. Кроме того, в качестве выходного параметра гораздо удобнее использовать либо мощность, либо мощность и фазу, чем напряжение или ток. В технике СВЧ, кроме частоты, непосредственно можно измерить только КСВН (т. е. модуль и фазу Γ) и мощность. Как следует из уравнений (2.1.17), (2.1.9) и (2.1.10), эти измерения по существу эквивалентны измерениям величин b_p/a_p , $1/2 |a_p|^2$ и $1/2 |b_p|^2$. Что касается матриц $[\bar{z}]$ и $[\bar{y}]$, то аналогичных непосредственных измерений произвести нельзя, поэтому величины v и i удобны скорее для теоретических исследований устройств, чем для непосредственных практических измерений.

б. Свойство унитарности матрицы рассеяния $[S]$ позволяет легко проверить условие баланса мощностей для устройства без потерь. При использовании матриц $[\bar{z}]$ и $[\bar{y}]$ проверить это условие оказывается затруднительным.

в. При изменении положения плоскости отсчета многополюсника, как будет показано ниже, будут меняться только фазы коэффициентов матрицы рассеяния. При тех же условиях коэффициенты матриц $[\bar{z}]$ и $[\bar{y}]$ будут меняться как по фазе, так и по модулю.

г. Наконец, при определенных условиях физической симметрии можно определить матрицу рассеяния $[S]$, исходя только из геометрических соображений (см. гл. 3).

Наряду с преимуществами использования матрицы $[S]$ полезно рассмотреть и некоторые ее недостатки. Матрица рассеяния определяет внешние свойства многополюсника как некоторого «черного ящика», никак не отражая его внутреннее устройство. Она дает незначительную информацию о реально существующих полях *внутри* волноводного соединения, хотя при определенных условиях симметрии можно судить о распределении поля волны низшего типа.

Как правило, инженер сталкивается с проблемой определения (эмпирически или полуэмпирически) внутренних конструктивных элементов устройства. Такие свойства матрицы рассеяния, как симметрия или унитарность, ясно покажут ему, какие свойства многополюсника можно реализовать. Однако конструктор сам должен определить, как получить требуемые свойства.

Если число выходов устройства не превосходит двух, то перейти от матрицы $[S]$ к матрице $[\bar{y}]$ или $[\bar{z}]$ относительно просто. Кроме того, если устройство содержит элементы, обладающие активными потерями, то матрицы рассеяния не обладают свойством унитарности. Поэтому в случае двух- или четырехполюсника в зависимости от конкретных условий можно использовать для расчетов как матрицу $[\bar{z}]$ или $[\bar{y}]$, так и матрицу $[S]$. Если соединение имеет три и более входов, более разумно использовать матрицу $[S]$.

Многополюсник имеет столько пар зажимов, сколько реальных волноводных ответвлений имеется в устройстве. Это справедливо только в том случае, если в каждом ответвлении может распространяться только один тип волны. Если в каком-то ответвлении могут распространяться несколько типов волн, то каждому типу волны приписывается одна пара зажимов. Эти типы волн могут быть либо высшими волнами (например, TE_{20} или TE_{11} в прямоугольном волноводе), либо вырожденными волнами в квадратном или круглом волноводе в том случае, когда учитывается поляризация волн.

Как отмечалось в начале этого параграфа, основная задача состоит в получении матрицы рассеяния многополюсника. В общем случае эта задача может быть решена путем измерений. Однако так как большинство практически используемых многополюсников обладает симметрией, то оказывается возможным определить все элементы матрицы рассеяния чисто аналитически, используя свойства симметрии. В некоторых случаях одни элементы матрицы $[S]$ определяют экспериментально, а остальные расчетным путем. Если устройство не содержит анизотропных элементов и, кроме того, потери в нем пренебрежимо малы, то для определения коэффициентов матрицы рассеяния $[S]$ используются два наиболее важных ее свойства — симметрия и унитарность.

Если определена матрица рассеяния устройства $[S]$ и известны все составляющие вектора a , то найти вектор b довольно просто. В некоторых случаях к устройству может быть подключено несколько генераторов. Если, например, имеются два генератора (генераторы A и B на фиг. 2.3.1), то как амплитуды, так и фазы волн, идущих от этих генераторов (a_1 и a_4), должны быть известны.

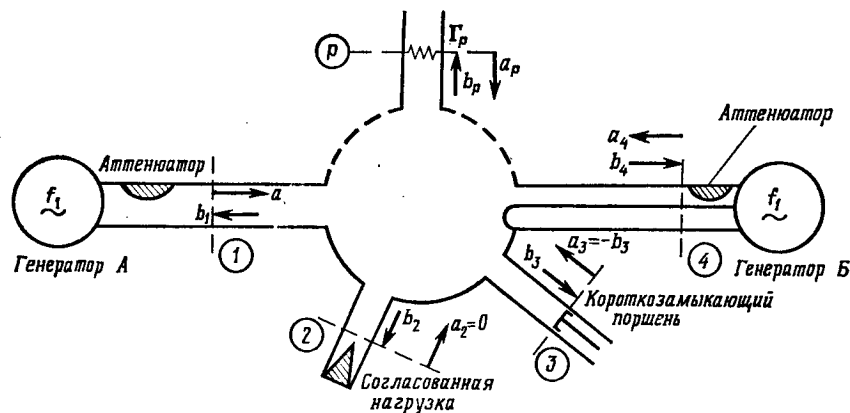
Следует отметить, что генераторы должны быть синхронизированы. Если генераторы A и B не синхронизированы, то необходимо рассматривать равенства типа $b = [S]a$ отдельно для каждой частоты. Полученные результаты затем складываются во времени. На входе 2 многополюсника (фиг. 2.3.1) a_2 , очевидно, равна нулю, а на входе 3 (закороченная линия) $a_3 = -b_3$. В более общем случае к входу p подсоединена нагрузка с коэффициентом отражения Γ_{0p} , следовательно,

$$a_p = \Gamma_{0p} b_p. \quad (2.3.1)$$

Отраженные волны на входах 1 и 4 (активные входы) равны

$$\begin{aligned} b_1 &= \Gamma_{01} a_1, \\ b_4 &= \Gamma_{04} a_4, \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

где Γ_{01} и Γ_{04} — коэффициенты отражения, измеренные соответственно на входах 1 и 4. Следовательно, в каждом конкретном случае составляющие вектора \mathbf{a} , соответствующие пассивным входам,



Фиг. 2.3.1. Многополюсник в рабочей схеме.

могут быть выражены через соответствующие коэффициенты отражения [уравнение (2.3.1)] и составляющие вектора \mathbf{b} . Для схемы, показанной на фиг. 2.3.1,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ -b_3 \\ a_4 \\ \vdots \\ \Gamma_{0p} b_p \\ \vdots \end{pmatrix}$$

Равенство $\mathbf{b} = [\mathbf{S}] \mathbf{a}$ можно записать в виде системы из n уравнений с n неизвестными, которые могут быть определены по правилу Крамера через известные коэффициенты матрицы рассеяния s_{pq} и параметры генераторов a_1 и a_4 .

Матрица рассеяния определена только для конкретных плоскостей отсчета. Если положение плоскостей изменить, то элементы

матрицы рассеяния также будут меняться, но только по фазе. В случае использования матриц нормированных сопротивлений $[\bar{Z}]$ или проводимостей $[\bar{Y}]$ $v_p(z_p)$ и $i_p(z_p)$ изменяются в зависимости от z_p как по фазе, так и по амплитуде. С другой стороны, величины a_p и b_p остаются постоянными по амплитуде при изменении положения плоскостей отсчета (предполагается, что волновод не имеет потерь), так как обе эти величины определяются через мощность. Если плоскость отсчета для p -входа передвинуть на расстояние d , соответствующее углу $\theta_p = 2\pi d/\lambda_v$, в положительном направлении (к соединению), то фаза входной волны a_p уменьшится на угол θ_p и станет равной

$$a'_p = a_p e^{-j\theta_p}, \quad (2.3.3)$$

а фаза отраженной волны увеличится на угол θ_p

$$b'_p = b_p e^{j\theta_p}. \quad (2.3.4)$$

В равенствах (2.3.3) и (2.3.4) a'_p и b'_p — соответственно падающая и отраженная волны в новой плоскости отсчета.

Если переместить плоскость отсчета первого входа на угол θ_1 , второго входа на угол θ_2 и т. д., то многополюсник будет иметь новую матрицу рассеяния $[\mathbf{S}']$, так что

$$[\mathbf{S}'] \mathbf{a}' = \mathbf{b}'. \quad (2.3.5)$$

Элемент матрицы-столбца теперь запишется в виде

$$b'_p = s'_{p1} a'_1 + s'_{p2} a'_2 + \dots + s'_{pq} a'_q + \dots + s'_{pn} a'_n. \quad (2.3.6)$$

Раньше он определялся так:

$$b_p = s_{p1} a_1 + s_{p2} a_2 + \dots + s_{pq} a_q + \dots + s_{pn} a_n. \quad (2.3.7)$$

Выразим s'_{pq} через s_{pq} . Подставим уравнения (2.3.3) и (2.3.4) в (2.3.6)

$$b'_p = b_p e^{j\theta_p} = s'_{p1} a_1 e^{-j\theta_1} + \dots + s'_{pq} a_q e^{-j\theta_q} + \dots + s'_{pn} a_n e^{-j\theta_n}. \quad (2.3.8)$$

Сравнивая уравнения (2.3.7) и (2.3.8), получим

$$s'_{pq} = s_{pq} e^{j(\theta_p + \theta_q)}. \quad (2.3.9)$$

Таким образом, при смещении плоскости отсчета входа p на угол θ_p , а плоскости отсчета входа q на угол θ_q фаза коэффициента матрицы рассеяния s_{pq} изменится на величину, определяемую равенством (2.3.9). Отметим, что θ_p (или θ_q) может быть либо положительным (сдвиг к соединению), либо отрицательным, т. е. в сторону удаления от рассматриваемого многополюсника.

Если в плоскости отсчета входа p поместить пассивную нагрузку, имеющую коэффициент отражения Γ_0 , то, согласно

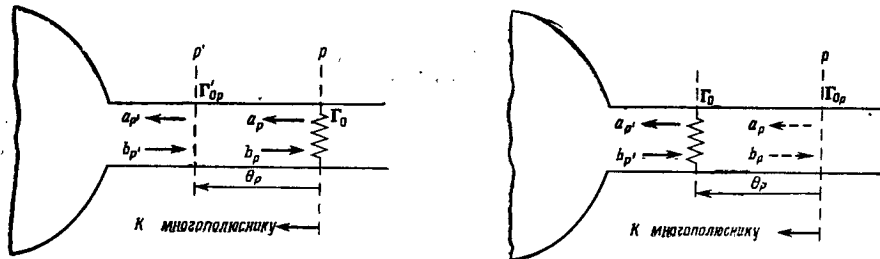
уравнению (2.3.1) (фиг. 2.3.2, а),

$$\Gamma_{0p} = \frac{a_p}{b_p} = \Gamma_0. \quad (2.3.1)$$

Если, не перемещая нагрузку, *сдвинуть плоскость отсчета* на угол θ_p , то фаза a_p уменьшится, а фаза b_p увеличится на угол θ_p . Поэтому в новой плоскости отсчета p' (фиг. 2.3.2, б) получим

$$\Gamma'_{0p} = \frac{a_p e^{-j\theta_p}}{b_p e^{j\theta_p}} = \Gamma_0 e^{-j2\theta_p}. \quad (2.3.10)$$

Теперь, если оставить неизменной плоскость отсчета, а *нагрузку передвинуть* на угол θ_p , то фаза волны b'_p на нагрузке умень-



а

б

Ф и г. 2.3.2. Преобразование нагрузки.

а — изменение плоскости отсчета; б — изменение положения нагрузки.

шится на угол θ_p , а фаза волны a'_p увеличится на угол θ_p , так что в плоскости отсчета

$$\Gamma_{0p} = \frac{a'_p e^{j\theta_p}}{b'_p e^{-j\theta_p}} = \Gamma_0 e^{j2\theta_p}. \quad (2.3.11)$$

В частном случае, если линия замкнута ($\Gamma_0 = -1$), то

$$\Gamma_{0p} = -e^{j2\theta_p}, \quad (2.3.11')$$

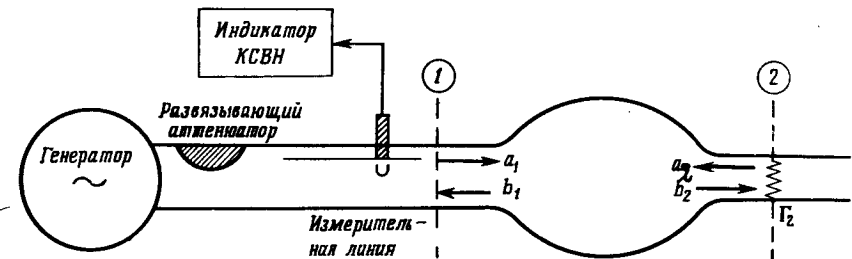
где θ_p может быть как положительным (плоскость короткого замыкания передвигается к многополюснику), так и отрицательным (плоскость короткого замыкания передвинута от многополюсника).

§ 2.4. ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим сначала четырехполюсник, для которого

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11}a_1 + s_{12}a_2, \\ b_2 &= s_{21}a_1 + s_{22}a_2. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Целью дальнейшего изложения является описание экспериментального способа определения элементов матрицы рассеяния. Покажем, как эти величины могут быть получены из измерений КСВН и мощности.



Ф и г. 2.4.1. Экспериментальное определение элементов матрицы рассеяния.

Пусть ко входу 2 подсоединена нагрузка с коэффициентом отражения Γ_2 ; в соответствии с уравнением (2.5.1) можно записать

$$\Gamma_2 = \frac{a_2}{b_2}.$$

Подставляя последнее выражение в соотношения (2.4.1), получим

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11}a_1 + s_{12}(\Gamma_2 b_2), \\ b_2 &= s_{21}a_1 + s_{22}(\Gamma_2 b_2). \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Из соотношений (2.4.2) можно найти b_1/a_1 . Из второго уравнения системы (2.4.2) имеем

$$b_2(1 - s_{22}\Gamma_2) = s_{21}a_1$$

или

$$\frac{b_2}{a_1} = \frac{s_{21}}{1 - s_{22}\Gamma_2}. \quad (2.4.3)$$

Подставив значение b_2/a_1 в первое уравнение, получим

$$\frac{b_1}{a_1} = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21}\Gamma_2}{1 - s_{22}\Gamma_2} = \Gamma_1. \quad (2.4.4)$$

Соотношение (2.4.4) является *рабочим уравнением* для определения коэффициентов матрицы рассеяния. Если в него подставить известные Γ_2 и измеренные отношения b_1/a_1 (т. е. для каждого значения Γ_2 определять коэффициент отражения Γ_1 с помощью обычной методики измерения КСВН и определения положения минимума стоячей волны), то получим систему уравнений, из которой можно определить коэффициенты матрицы рассеяния.

Примеры.

1. Положим $\Gamma_2 = 0$, что имеет место, когда ко входу 2 подсоединена согласованная нагрузка. Тогда из уравнения (2.4.4)

$$\left. \frac{b_1}{a_1} \right|_1 = s_{11}. \quad (2.4.4')$$

2. Положим $\Gamma_2 = -1$ (вход 2 закорочен), тогда

$$\left. \frac{b_1}{a_1} \right|_2 = s_{11} - \frac{s_{12}s_{21}}{1+s_{22}}. \quad (2.4.4'')$$

3. Положим $\Gamma_2 = 1$, т. е. к входу 2 подсоединен четвертьволновый закороченный отрезок волновода. Тогда

$$\left. \frac{b_1}{a_1} \right|_3 = s_{11} + \frac{s_{12}s_{21}}{1-s_{22}}. \quad (2.4.4''')$$

Из (2.4.4'') имеем

$$s_{12}s_{21} = (1+s_{22}) \left[s_{11} - \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_2 \right]. \quad (2.4.5)$$

Подставив уравнение (2.4.5) в (2.4.4'''), получим

$$\left. \frac{b_1}{a_1} \right|_3 = s_{11} + \frac{(1+s_{22}) \left[s_{11} - \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_2 \right]}{(1-s_{22})}. \quad (2.4.6)$$

Уравнение (2.4.6) может быть разрешено относительно s_{22} (все остальные величины известны)

$$s_{22} = \frac{m+n}{m-n}, \quad (2.4.7)$$

где

$$m = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_3 - s_{11},$$

$$n = \left. \frac{b_1}{a_1} \right|_2 - s_{11}.$$

Произведение $s_{12} \cdot s_{21}$ можно определить теперь из уравнения (2.4.5).

При такой методике измерений невозможно отдельно определить коэффициенты s_{12} и s_{21} . Однако если многополюсник не содержит анизотропных элементов, т. е. является обратимым, то $s_{12} = s_{21}$ и $s_{12}s_{21} = s_{12}^2$.

Отметим, что существует бесчисленное множество способов измерения коэффициентов матрицы рассеяния. Можно, например, поменять местами генератор и нагрузку, согласовать вход 1 и непосредственно получить значение коэффициента s_{22} . Можно также

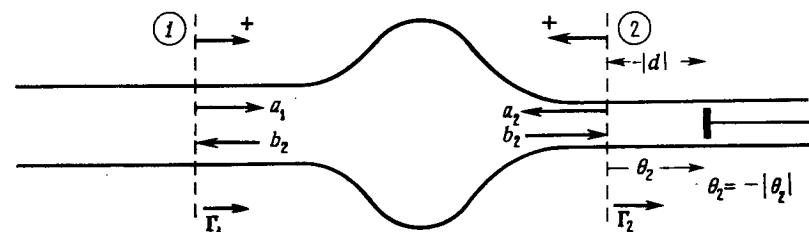
измерить связь входа 1 с входом 2 (определяя мощность на входе 2 при согласовании последнего с помощью измерителя мощности или используя направленный ответвитель), т. е.

$$\left| \frac{b_2}{a_1} \right| = |s_{21}|. \quad (2.4.8)$$

В случае когда устройство содержит анизотропные элементы, нужно поменять местами вход и выход и измерить

$$\left| \frac{b_1}{a_2} \right| = |s_{12}|. \quad (2.4.8')$$

Чтобы непосредственно определить фазу s_{21} (или s_{12}), необходимо сравнить фазы a_1 и b_2 с помощью направленного ответвителя.



Ф и г. 2.4.2. Метод короткого замыкания.

Однако это довольно сложное измерение. Во многих случаях достаточно определить модуль коэффициента s_{21} .

Практически иногда очень трудно добиться полного согласования на входе 2 (выход 2 может, например, оканчиваться полосковой линией с малым расстоянием между полосками). Кроме того, иногда желательно провести несколько измерений для того, чтобы убедиться, что во всех случаях результаты совпадают. Если же такого совпадения нет, то ошибочное измерение можно определить, обработав результаты всех измерений обычными статистическими методами.

Для таких измерений удобен метод Дешана, а в случаях, когда потери равны нулю, метод S-кривой (метод Вайсфлота). При измерениях по методу Дешана в плечо 2 (фиг. 2.4.2) помещается подвижный закорачивающий поршень. В плоскости отсчета плеча 2 коэффициент отражения по модулю всегда будет равен 1, а его фаза при перемещении поршня будет непрерывно изменяться в соответствии с уравнением (2.3.11'). Ясно, что если θ_2 непрерывно изменяется, то вектор Γ_2 на плоскости коэффициента отражения описывает окружность с центром в точке O и радиусом, равным единице.

Подставив уравнение (2.3.11') в уравнение (2.4.4), получим в случае изотропного заполнения ($s_{12} = s_{21}$)

$$\Gamma_1 = s_{11} - \frac{s_{12}^2 e^{j2\theta_2}}{1 + s_{22} e^{j2\theta_2}}. \quad (2.4.9)$$

Как показано в приложении IV, если Γ_2 описывает окружность, то Γ_1 также описывает окружность. Однако при равномерном изменении величины $2\theta_2$ угол $2\theta_1$ изменяется неравномерно (фиг. IV.3 в приложении IV). Кроме того, окружность, описываемая вектором Γ_1 , в общем случае не концентрична (эксцентricность определяется потерями и асимметрией четырехполюсника), и ее радиус меньше 1 (величина радиуса определяется потерями в четырехполюснике).

На фиг. IV.1 в приложении IV приведена типичная диаграмма Дешана [9]. Плоскость чертежа является плоскостью коэффициента отражения. Единичная внешняя окружность Γ_2 с центром в точке O является траекторией вектора $\Gamma_2 = -e^{j2\theta_2}$, которую он описывает при изменении угла θ_2 . Внутренняя эксцентricная окружность является геометрическим местом концов вектора Γ_1 , являющегося «изображением» вектора Γ_2 . Точка O' называется «иконоцентром» и соответствует $\Gamma_2 = 0$ (выход 2 согласован).

Из уравнения (2.4.4) ясно, что $OO' = s_{11}$. Для определения местоположения точки O' необходимо измерить Γ_1 при согласованном входе 2.

Точка P' является изображением режима $\Gamma_2 = +1$, так что вектор OP' (не показанный на фиг. IV.1) представляет собой коэффициент отражения на входе 1 в том случае, когда вход 2 нагружен на бесконечно большое сопротивление (плечо 2 разомкнуто). Из уравнения (2.4.4)

$$O'P' = \frac{s_{12}^2}{1 - s_{22}}.$$

Экспериментально найденными точками являются:

O' — изображение O (плечо 2 согласовано);

P' — изображение $\Gamma_2 = 1$;

окружность Γ_1 — изображение окружности Γ_2 , соответствующей перемещению короткозамыкающего поршня в плече 2.

С помощью геометрических построений можно найти точки:

C — центр окружности Γ_1 ;

Q , лежащую на пересечении окружности с продолжением отрезка $P'O'$;

P'' , лежащую на пересечении окружности с продолжением отрезка QC .

В приложении IV показано, что элементы матрицы рассеяния определяются следующим образом:

$$s_{11} = OO',$$

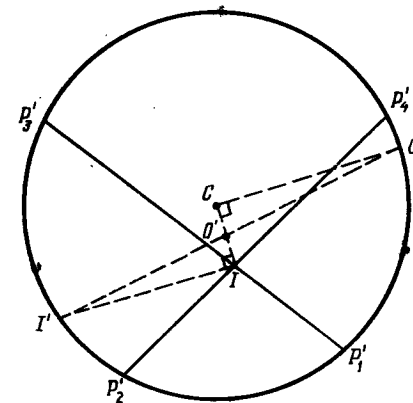
$$s_{22}^* = \frac{O'C}{CP''},$$

$$|s_{12}|^2 = \text{Радиус} \times (1 - |s_{21}|^2),$$

а фаза s_{12}^2 равна $2\theta_{12} = \angle CP''$.

В некоторых случаях согласовать плечо 2 сложно; тогда определить s_{11} непосредственно нельзя.

В таких случаях коэффициент s_{11} можно найти с помощью следующих геометрических построений.



Ф и г. 2.4.3. Построение иконоцентра O' .

Поместим закорачивающий поршень в сечения, соответствующие фазам $\theta = \pi/2, 3\pi/4, \pi$ и $5\pi/4$; при этом $\Gamma_2 = 1, +j, -1, -j$. Нанесем соответствующие точки P_1', P_2', P_3' и P_4' на окружность Γ_1 . Круг Γ_2 будет разделен на четыре равных сегмента, а круг Γ_1 в общем случае будет разделен на разные части (фиг. 2.4.3). Определим точку C — центр окружности Γ_1 и соединим точку P_1' с точкой P_3' , а точку P_2' с точкой P_4' . Эти два отрезка пересекутся в точке I . Соединим теперь точки C и I . Проведем два перпендикуляра к отрезку CI : в точке I (прямая II') и в точке C (прямая CC'). Точка O' пересечения прямых $C'I$ и CI является иконоцентром.

Возможны различные модификации этого метода, например измерение с поглощающей нагрузкой в плече 2, определение иконоцентра O' в том случае, когда длина волны в линии 2

точно неизвестна, и т. д. Применение этих модифицированных методов носит узко специальный характер. Во всех случаях исходным является уравнение (2.4.4), которое решается различными графическими методами.

Если плечо 2 невозможно согласовать и в то же время потери в четырехполюснике пренебрежимо малы, рекомендуется использовать метод *S*-кривой (метод Вайсфлота), описанный в приложении IV. Начертив график зависимости фазы коэффициента отражения θ_1 в плече 1 от фазы коэффициента отражения в плече 2 (угол θ_2), изменяющейся при перемещении короткозамыкающего поршня, можно определить $|s_{22}|$ или более просто величину

$$n^2 = \frac{1 + |s_{22}|}{1 - |s_{22}|},$$

которая является квадратом коэффициента трансформации эквивалентного идеального трансформатора [уравнение (IV.12) или (IV.13)]. Эквивалентный идеальный трансформатор описан в приложении III.

В случае многополюсника уравнение (2.4.4) и вся вышеизложенная методика измерений могут быть применены к двум любым его плечам, если все остальные плечи согласованы.

Предположим, что в плече p имеется генератор, а в плече q — нагрузка с коэффициентом отражения Γ_q ; все остальные плечи предполагаются согласованными. Все нормированные падающие волны a_1, a_2, \dots, a_n равны нулю, за исключением приложенной амплитуды a_p и величины a_q , соответствующей отражению от нагрузки. Таким образом,

$$\begin{aligned} b_p &= s_{pp}a_p + s_{pq}a_q, \\ b_q &= s_{qp}a_p + s_{qq}a_q. \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

Выражения (2.4.10) отличаются от (2.4.1) только тем, что плечо 1 заменено на p , а плечо 2 — на q . Следовательно, все вышеприведенные рассуждения можно отнести к плечам p и q и определить элементы s_{pp}, s_{qq}, s_{qp} и s_{pq} . Если известно, что $s_{pq} = s_{qp}$, то найти эти элементы значительно проще. Аналогично определяются и все остальные элементы матрицы рассеяния многополюсника.

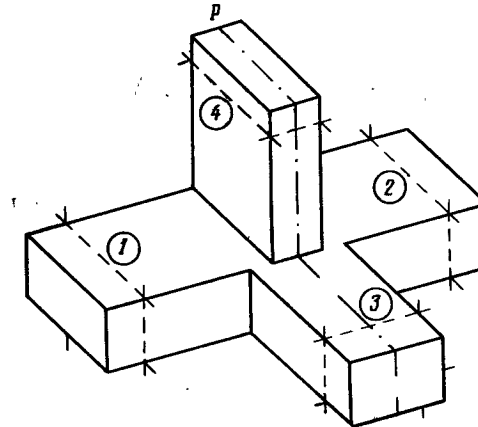
§ 2.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ДВОЙНОГО ТРОЙНИКА

Определим матрицу рассеяния $[S]$ восьмиполюсника, изображенного на фиг. 2.5.1. Плоскости отсчета 1 и 2 расположены симметрично относительно плоскости симметрии P . В наиболее

общей форме матрица рассеяния $[S]$ запишется следующим образом:

$$[S] = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} & s_{34} \\ s_{41} & s_{42} & s_{43} & s_{44} \end{vmatrix} \quad (2.5.1)$$

Элементы этой матрицы пока неизвестны и никак друг с другом не связаны. При определенных, вполне реализуемых условиях



Фиг. 2.5.1. Двойной волноводный тройник.

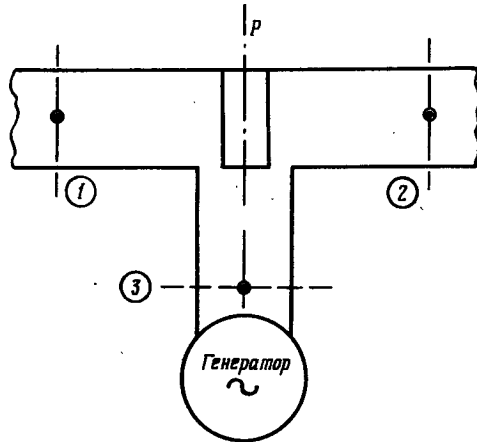
(изотропность, отсутствие потерь, согласование плеч) все коэффициенты матрицы $[S]$ могут быть определены путем дедуктивных рассуждений (от общего к частному).

Пусть диэлектрическим заполнением двойного тройника является воздух, поэтому матрица $[S]$ симметрична. В этом случае двенадцать коэффициентов матрицы попарно равны друг другу, т. е.

$$[S] = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & s_{44} \end{vmatrix} \quad (2.5.1')$$

Предположим теперь, что к симметричным плечам 1 и 2 присоединены одинаковые нагрузки и, кроме того, в этих плечах может распространяться только волна типа TE_{10} . Тогда, если генератор соединен с плечом 3 (фиг. 2.5.2), то электрические поля в плечах 1 и 2 являются зеркальными отображениями

друг друга (в качестве «зеркала» служит плоскость симметрии P), т. е. они имеют одинаковые фазы и амплитуды. Симметричные высокочастотные устройства более подробно будут рассмотрены в гл. 3; здесь же отметим следующее: граничные условия по электрическому полю для плеч 1 и 2 идентичны, и, так как решение уравнений Максвелла единственно, распределение поля



Ф и г. 2.5.2. Двойной волноводный тройник (вид сверху).

в плечах 1 и 2 должно быть одинаковым¹⁾. Следовательно, электрические связи плеча 3 с плечом 1 и плеча 3 с плечом 2 должны быть одинаковыми

$$s_{31} = s_{23}. \quad (2.5.2)$$

Если генератор соединен с плечом 4 (фиг. 2.5.3), сигнал из последнего в плечи 1 и 2 будет передаваться нечетно, т. е. электрические поля в этих плечах будут иметь одинаковую амплитуду, но будут сдвинуты по фазе на 180° .

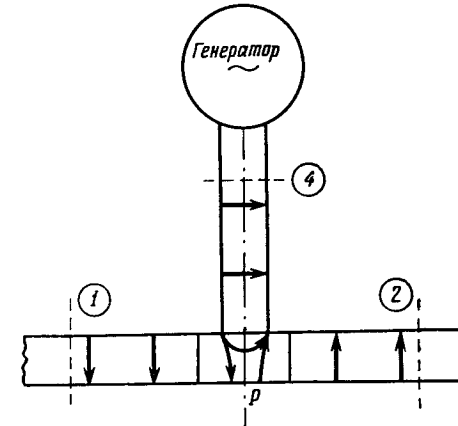
Из фиг. 2.5.3 видно, что граничные условия для электрических полей идентичны, за исключением начальной фазы в плоскости P ; из симметрии устройства следует, что составляющие E_y в плечах 1 и 2 должны быть в плоскости P равны нулю.

¹⁾ Это несправедливо для магнитного поля H , которое является «нечетным», т. е. составляющие H_x в плечах 1 и 2 равны по величине, но сдвинуты по фазе на 180° . Последнее утверждение следует из рассмотрения полей в плоскости P или из теоремы Пойнтинга: если электрические поля в обоих плечах идентичны, то для того, чтобы энергия в плече 2 распространялась вправо, магнитные поля в этих плечах должны быть сдвинуты относительно друг друга по фазе на 180° .

На основании вышеизложенного можно заключить, что коэффициенты электрической связи плеч 1 и 2 с плечом 4 равны по величине, но имеют фазы, отличающиеся на 180° , т. е.

$$s_{14} = -s_{24}. \quad (2.5.3)$$

Включив согласованные нагрузки в плечах 2, 3 и 4, мы можем определить коэффициент отражения s_{11} со стороны плеча 1.



Ф и г. 2.5.3. Двойной волноводный тройник (вид спереди).

Аналогичным образом, согласовав плечи 1, 3 и 4, можно определить коэффициент s_{22} . Из симметрии устройства следует, что

$$s_{11} = s_{22}. \quad (2.5.4)$$

Из фиг. 2.5.2 и 2.5.3 видно, что сигнал из плеча 4 не может попасть в плечо 3 (в плоскости симметрии P амплитуда электрического поля равна нулю). Кроме того, сигнал из плеча 3 не может попасть в плечо 4 (плоскости поляризации волн типа TE_{10} в этих плечах взаимно перпендикулярны). Следовательно,

$$s_{34} = 0. \quad (2.5.5)$$

(Даже из поверхностного рассмотрения очевидно, что для удовлетворения граничным условиям *внутри* двойного тройника должны существовать высшие типы волн. Однако важно отметить, что эти типы волн не могут распространяться вдоль плеч.) С учетом уравнений (2.5.2)–(2.5.5) выражение (2.5.1') может

быть существенно упрощено

$$[S] = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} \\ s_{13} & s_{13} & s_{33} & 0 \\ s_{14} & -s_{14} & 0 & s_{44} \end{vmatrix} \quad (2.5.6)$$

Соотношения (2.5.6) определяют матрицу рассеяния *любого* симметричного восьмиполосника, подобного показанному на фиг. 2.5.1. При этом не имеет значения внутреннее устройство тройника, лишь бы он был симметричен и в его плечах распространялись только волны типа TE_{10} .

На практике наиболее часто применяются тройники, у которых обеспечены условия $s_{33} = 0$ и $s_{44} = 0$ (см. гл. 5).

Всегда можно сделать так, чтобы $s_{33} = 0$ (т. е. вход 3 согласован, если остальные плечи нагружены на согласованные нагрузки). Такое согласование осуществляется введением в соответствующее сечение плеча 3 реактивной проводимости нужной величины. В этом случае устройство тройника изменяется и все коэффициенты матрицы рассеяния, кроме s_{44} , также изменяются. Элемент s_{44} остается неизменным, так как, согласно уравнению (2.5.5), между плечами 3 и 4 нет никакой связи (если «смотреть» в плечо 3, то невозможно «увидеть» плечо 4). Аналогичным образом можно добиться, чтобы $s_{44} = 0$; при этом коэффициент s_{33} остается неизменным и равным нулю. Если $s_{33} = s_{44} = 0$, то уравнение (2.5.6) запишется следующим образом:

$$[S] = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & s_{11} & s_{13} & -s_{14} \\ s_{13} & s_{13} & 0 & 0 \\ s_{14} & -s_{14} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.5.7)$$

Если стенки двойного волноводного тройника являются идеальными проводниками (или близки по свойствам к ним) и внутри него нет элементов, в которых бы накапливалось значительное количество энергии, то можно воспользоваться свойством унитарности матрицы рассеяния

$$[S]^* [S] = [I]. \quad (2.5.8)$$

Распишем соотношение (2.5.8)

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 + |s_{13}|^2 + |s_{14}|^2 = 1, \quad (2.5.9)$$

$$2|s_{13}|^2 = 1, \quad (2.5.10)$$

$$2|s_{14}|^2 = 1. \quad (2.5.11)$$

Из уравнения (2.5.10) следует

$$s_{13} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\varphi}, \quad (2.5.12)$$

где φ — фазовый угол, зависящий от выбора плоскости отсчета.

Из уравнения (2.5.11) имеем

$$s_{14} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\psi}, \quad (2.5.13)$$

где ψ — фазовый угол, который также зависит от выбора плоскости отсчета.

Из соотношения (2.5.9)

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = 0. \quad (2.5.9')$$

Так как каждое из слагаемых $|s_{11}|^2$ и $|s_{12}|^2$ либо положительно, либо равно нулю, то их сумма равна нулю только в случае, если

$$s_{11} = s_{12} = 0. \quad (2.5.14)$$

Подставив уравнения (2.5.12) — (2.5.14) в (2.5.7), получим

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & e^{j\varphi} & e^{j\psi} \\ 0 & 0 & e^{j\varphi} & -e^{j\psi} \\ e^{j\varphi} & e^{j\varphi} & 0 & 0 \\ e^{j\varphi} & -e^{j\psi} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.5.15)$$

Матрицу $[S]$ можно еще более упростить, если передвинуть плоскость отсчета в плечо 3 на угол $-\varphi$, а в плечо 4 на угол $-\psi$. Тогда

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.5.16)$$

Соотношение (2.5.16) определяет матрицу рассеяния согласованного двойного волноводного тройника, готовую для последующих применений.

В заключение перечислим основные свойства, которыми обладает симметричный многополосник с симметричными плоскостями отсчета, изображенный на фиг. 2.5.1.

а. Матрица рассеяния $[S]$ этого многополосника симметрична, так как все элементы структуры изотропны.

б. Из соображений геометрической симметрии *всегда* соблюдаются условия $s_{13} = s_{23}$, $s_{14} = -s_{24}$, $s_{34} = 0$, $s_{11} = s_{22}$.

в. Чтобы получить устройство типа согласованного двойного тройника, нужно сделать так, чтобы коэффициенты s_{33} и s_{44} независимо друг от друга равнялись нулю. В принципе для выполнения этого условия можно поместить соответствующие реактивные проводимости в любом сечении плеч 3 и 4. Однако на практике для уменьшения частотной чувствительности согласующие элементы желательно помещать как можно ближе к плоскости разветвления.

г. При соблюдении условия (в) автоматически следует, что $s_{11} = s_{22} = 0$. В том случае, когда потерями в соединении можно пренебречь, матрица рассеяния будет унитарной и $|s_{13}|^2 = |s_{14}|^2 = 1/2$.

Следует отметить, что из приведенных выше выкладок не было получено никаких данных ни о геометрической форме согласующих элементов (эта форма не единственная), ни о частотной чувствительности согласованного многополюсника (эта чувствительность зависит от согласующих элементов). Оба эти вопроса должны решаться полуэмпирически.

§ 2.6. ПРИМЕР ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

В том случае, когда для исследования высокочастотных цепей используются матрицы рассеяния, граничные условия наиболее удобно задавать в виде коэффициентов отражения в плоскостях отсчета [см. уравнение (2.3.2)].

а. Рассмотрим сначала случай четырех согласованных генераторов, синхронизированных по частоте и питающих двойной тройник, изображенный на фиг. 2.5.1. Если a_1 , a_2 , a_3 и a_4 — нормированные падающие волны на входах 1, 2, 3 и 4, то нормированные отраженные волны определяются соотношением

$$\mathbf{b} = [\mathbf{S}] \mathbf{a}, \quad (2.1.16')$$

где $[\mathbf{S}]$ определяется из соотношения (2.5.16) при определенном выборе плоскостей отсчета. Запишем (2.1.16') в развернутом виде:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} a_3 + a_4 \\ a_3 - a_4 \\ a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{bmatrix} \quad (2.6.1)$$

и найдем отраженные нормированные волны и соответствующие им мощности:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 + a_4), & P_1 &= \frac{1}{2}|b_1|^2 = \frac{1}{4}|a_3 + a_4|^2, \\ b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_3 - a_4), & P_2 &= \frac{1}{2}|b_2|^2 = \frac{1}{4}|a_3 - a_4|^2, \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + a_2), & P_3 &= \frac{1}{2}|b_3|^2 = \frac{1}{4}|a_1 + a_2|^2, \\ b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 - a_2), & P_4 &= \frac{1}{2}|b_4|^2 = \frac{1}{4}|a_1 - a_2|^2. \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Рассмотрим несколько частных случаев, результаты для которых можно непосредственно получить из соотношений (2.6.2).

1. Если $a_1 = a_2 = a_4 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_3, & P_1 &= \frac{1}{4}|a_3|^2, \\ b_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_3, & P_2 &= \frac{1}{4}|a_3|^2, \\ b_3 &= b_4 = 0, & P_3 &= P_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.6.2a)$$

Волна a_3 , входящая в плечо 3, делится на две равные по амплитуде и имеющие одинаковые фазы волны b_1 и b_2 ; при этом никаких отражений от входа 3 нет, а в плечо 4 мощность не попадает.

2. Если $a_1 = a_2 = a_3 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_4, & P_1 &= \frac{1}{4}|a_4|^2, \\ b_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}}a_4, & P_2 &= \frac{1}{4}|a_4|^2, \\ b_3 &= b_4 = 0, & P_3 &= P_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.6.2б)$$

Падающая волна a_4 делится на две волны b_1 и b_2 , равные по амплитуде, но противоположные по фазе; мощность в плечо 3 не попадает, отражений от входа 4 нет.

3. Если $a_3 = a_4$ и $a_1 = a_2 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{2}a_3, & P_1 &= |a_3|^2, \\ b_2 &= b_3 = b_4 = 0, & P_2 &= P_3 = P_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.6.2в)$$

Два сигнала складываются в плече 1 и взаимно уничтожаются в плече 2; отражений от входов 3 и 4 нет.

4. Если $a_3 = -a_4$ и $a_1 = a_2 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_2 &= \sqrt{2}a_3, & P_2 &= |a_3|^2, \\ b_1 &= b_3 = b_4 = 0, & P_1 &= P_3 = P_4 = 0. \end{aligned} \quad (2.6.2г)$$

Два сигнала складываются в плече 3 и взаимно компенсируются в плече 1; отражений от входов 3 и 4 нет.

5. Если $a_2 = a_3 = a_4 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = 0, & P_1 &= P_2 = 0, \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_1, & P_3 &= \frac{1}{4}|a_1|^2, \\ b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_1, & P_4 &= \frac{1}{4}|a_1|^2. \end{aligned} \quad (2.6.2д)$$

Падающая волна a_1 делится на две волны b_3 и b_4 , равные по амплитуде и имеющие одинаковые фазы; отражений от входа 1 нет, мощность в плечо 2 не попадает.

6. Если $a_1 = a_3 = a_4 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = 0, & P_1 &= P_2 = 0, \\ b_3 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_2, & P_3 &= \frac{1}{4}|a_2|^2, \\ b_4 &= \frac{1}{\sqrt{2}}a_2, & P_4 &= \frac{1}{4}|a_2|^2. \end{aligned} \quad (2.6.2е)$$

Падающая волна a_2 делится на две волны b_3 и b_4 , равные по амплитуде и противоположные по фазе; отражений от входа 2 нет, мощность в плечо 1 не попадает.

7. Если $a_1 = a_2$ и $a_3 = a_4 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = 0, & P_1 &= P_2 = 0, \\ b_3 &= \sqrt{2}a_1, & P_3 &= |a_1|^2, \\ b_4 &= 0, & P_4 &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.2ж)$$

Две волны a_1 и a_2 складываются в плече 3 и взаимно компенсируются в плече 4; отражений от входов 1 и 2 нет.

8. Наконец, если $a_2 = -a_1$ и $a_3 = a_4 = 0$, то

$$\begin{aligned} b_1 &= b_2 = 0, & P_1 &= P_2 = 0, \\ b_3 &= 0, & P_3 &= 0, \\ b_4 &= \sqrt{2}a_1, & P_4 &= |a_1|^2. \end{aligned} \quad (2.6.2з)$$

Две волны a_2 и a_1 , равные по амплитуде, но противоположные по фазе, складываются в плече 4 и взаимно компенсируются в плече 3; отражений от входов 1 или 2 нет.

6. Рассмотрим теперь два практических случая, когда сигнал подается в плечи 3 или 4, а другие плечи могут быть не согласованы.

1. Если в плечо 3 входит волна a_3 , а в плоскостях отсчета 1, 2 и 4 коэффициенты отражения равны Γ_1 , Γ_2 и Γ_4 , то из уравнения (2.3.1)

$$\begin{aligned} a_1 &= \Gamma_1 b_1, \\ a_2 &= \Gamma_2 b_2, \\ a_4 &= \Gamma_4 b_4. \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Подставив эти значения в уравнение (2.6.1), получим систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1 + 0 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_4 b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_3, \\ 0 + b_2 + 0 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_4 b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}a_3, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_1 b_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_2 b_2 + b_3 + 0 = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_1 b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Gamma_2 b_2 + 0 + b_4 = 0. \end{cases} \quad (2.6.4)$$

Неизвестные b_1 , b_2 , b_3 и b_4 можно найти по правилу Крамера. Например,

$$b_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} a_3 & 0 & 0 & -\Gamma_4 \\ a_3 & \sqrt{2} & 0 & \Gamma_4 \\ 0 & -\Gamma_2 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \Gamma_2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & -\Gamma_4 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & \Gamma_4 \\ -\Gamma_1 & -\Gamma_2 & \sqrt{2} & 0 \\ -\Gamma_1 & \Gamma_2 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}} = \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3.$$

Проведя аналогичные вычисления, получим

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3, \\ b_2 &= \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_1 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3, \\ b_3 &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3, \\ b_4 &= \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3. \end{aligned} \quad (2.6.5)$$

Мощность, поглощаемая в каждом пассивном плече, равна разнице между мощностью, падающей на соответствующую нагрузку, и мощностью, отраженной от этой нагрузки:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} (|b_1|^2 - |a_1|^2) = \frac{1}{2} (1 - |\Gamma_1|^2) \left| \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3 \right|^2, \\ P_2 &= \frac{1}{2} (|b_2|^2 - |a_2|^2) = \frac{1}{2} (1 - |\Gamma_2|^2) \left| \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_1 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3 \right|^2, \quad (2.6.6) \\ P_4 &= \frac{1}{2} (|b_4|^2 - |a_4|^2) = \frac{1}{2} (1 - |\Gamma_4|^2) \left| \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3 \right|^2. \end{aligned}$$

Разность мощностей падающей и отраженной волн в плече 3 равна мощности, поглощаемой во всей системе:

$$P_3 = \frac{1}{2} (|a_3|^2 - |b_3|^2) = \frac{1}{2} \left\{ |a_3|^2 - \left| \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_4}{2 - \Gamma_4 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_3 \right|^2 \right\}. \quad (2.6.7)$$

Из соотношений (2.6.5) — (2.6.7) можно сделать следующие выводы. Если $\Gamma_1 = \Gamma_2$, то в плечо 4 мощность не попадает независимо от величины Γ_4 . Коэффициент отражения от входа 3 оказывается равным $\Gamma_1 = \Gamma_2$. В частности, если $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, то система согласована со стороны входа 3. Если $\Gamma_4 = 0$, то $b_1 = b_2$ независимо от того, выполняется ли равенство $\Gamma_1 = \Gamma_2$ или нет. Если $\Gamma_4 = 0$ и $\Gamma_1 = -\Gamma_2$, то система согласована со стороны входа 3.

2. Если волна a_4 подается в плечо 4, а в плоскостях отсчета 1, 2 и 3 коэффициенты отражения равны Γ_1 , Γ_2 и Γ_3 , то из уравнения (2.3.1) имеем

$$\begin{aligned} a_1 &= \Gamma_1 b_1, \\ a_2 &= \Gamma_2 b_2, \\ a_3 &= \Gamma_3 b_3. \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

После подстановки соотношений (2.6.8) в (2.6.2) получим систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными:

$$\begin{cases} b_1 + 0 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_3 b_3 + 0 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_4, \\ 0 + b_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_3 b_3 + 0 = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_4, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_1 b_1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_2 b_2 + b_3 + 0 = 0, \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_1 b_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \Gamma_2 b_2 + 0 + b_4 = 0. \end{cases} \quad (2.6.9)$$

Неизвестные b_1 , b_2 , b_3 и b_4 можно определить по правилу Крамера

$$\begin{aligned} b_1 &= \sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_2 \Gamma_3}{2 - \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_4, \\ b_2 &= -\sqrt{2} \frac{1 - \Gamma_1 \Gamma_3}{2 - \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_4, \\ b_3 &= \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2 - \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_4, \\ b_4 &= \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2 - 2\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3}{2 - \Gamma_3 (\Gamma_1 + \Gamma_2)} a_4. \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Мощность, поглощаемая в каждом плече, равна разности мощностей падающей и отраженной волн в этом плече

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{2} (1 - |\Gamma_1|^2) |b_1|^2, \\ P_2 &= \frac{1}{2} (1 - |\Gamma_2|^2) |b_2|^2, \\ P_3 &= \frac{1}{2} (1 - |\Gamma_3|^2) |b_3|^2. \end{aligned} \quad (2.6.11)$$

Суммарная мощность, поглощаемая в системе, составляет

$$P_4 = \frac{1}{2} (|a_4|^2 - |b_4|^2). \quad (2.6.12)$$

Эта мощность должна равняться сумме $(P_1 + P_2 + P_3)$.

Уравнения (2.6.10) — (2.6.12) позволяют сделать следующие выводы. Если $\Gamma_1 = \Gamma_2$, то в плечо 3 мощность не падает независимо от значения Γ_3 . Коэффициент отражения от входа 4 равен $\Gamma_1 = \Gamma_2$. В частности, если $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$, то система со стороны входа 4 согласована. Если $\Gamma_3 = 0$, то $b_1 = -b_2$ независимо от того, выполняется ли равенство $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Если $\Gamma_3 = 0$, то система будет согласована со стороны входа 4 в том случае, когда $\Gamma_1 = -\Gamma_2$.

Результаты, полученные в этом параграфе, можно непосредственно применить к анализу работы смесителей, балансных модуляторов и модуляторов с одной боковой полосой. Кроме того, введя соответствующие изменения, полученные результаты можно использовать при анализе гибридных соединений и трехдецибелных направленных ответвителей, которые рассматриваются в гл. 3 и 4.

ГЛАВА 3

Симметричные устройства

§ 3.0. ВВЕДЕНИЕ

Устройства СВЧ, симметричные в пространстве, имеют ряд свойств благодаря которым они находят широкое применение. Важным является то обстоятельство, что эти свойства могут быть легче предсказаны из общих соображений, чем получены из опытов.

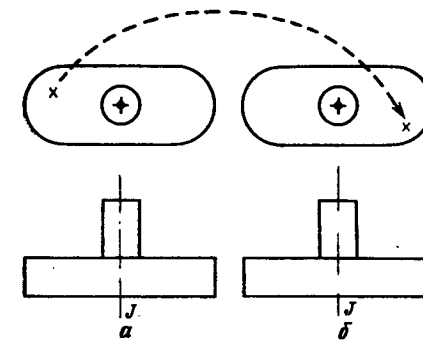
«Вывод» свойств симметричных устройств, или вывод матрицы рассеяния, которая отображает эти свойства, основывается на соображениях пространственной симметрии. Пространственная симметрия в свою очередь может быть описана с помощью «геометрической» матрицы $[G]$. При рассмотрении действия матрицы $[G]$ на электрические поля будет показано, что матрицы $[G]$ и $[S]$ обладают коммутативными свойствами, т. е. $[G][S] = [S][G]$. Этот на первый взгляд простой факт обеспечивает «связь» между пространственными и электрическими свойствами, между свойствами объекта исследования (оболочки) и свойствами полей внутри него (содержимого). Общий вид матрицы рассеяния $[S]$ может быть установлен при коммутации матрицы $[S]$ и всех возможных геометрических матриц $[G]$.

Не представляет труда и получение более определенных соотношений между коэффициентами рассеяния. Это достигается рассмотрением собственных векторов и собственных значений, определяемых далее (§ 3.2). Формальное преобразование особенно несложно в случае аксиально симметричных устройств (четыреполюсников, Y-соединений, крестовидных соединений, соединений типа звезд), но оно не может быть применено, когда симметрия устройств «неполная». В этом случае должна быть проявлена изобретательность, чтобы получить все недостающие сведения. Однако такая работа вполне вознаграждается, так как в результате ее проведения определяются не только матрицы рассеяния, но и предсказываются изменения, которые необходимо осуществить с устройствами, чтобы улучшить их характеристики. Наглядным примером этого является Y-циркулятор, рассмотренный в приложении VIII.

В настоящей главе рассматриваются четырехполюсники, тройниковые соединения, Y-соединения, направленные ответвители со связью по узкой и по широкой стенкам волновода и турникетные соединения. Применение этих устройств обсуждается как в этой главе, так и в гл. 8.

§3.1. КОММУТАТИВНОЕ СВОЙСТВО МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ $[S]$ И МАТРИЦЫ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА $[G]$

а. Рассмотрим электромагнитное поле в каком-либо устройстве. Решение уравнений Максвелла определяется только средой, в которой распространяется электромагнитное поле, частотой и граничными условиями. Решение не зависит от используемой системы координат или от положения устройства в пространстве [это становится очевидным, если рассматривать векторную форму уравнений Максвелла (1.1.7)]. В частности, устройство может быть



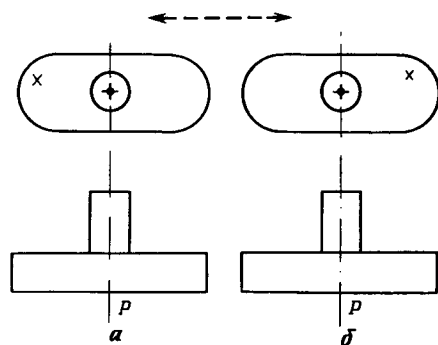
Фиг. 3.1.1. Операция поворота.

повернуто целиком или переведено в новое положение без какого-либо изменения поля внутри устройства. По отношению к фиксированным в пространстве плоскостям отсчета поля, соответствующие обоим положениям устройства, являются «решениями» (т. е. они могут существовать).

б. Если устройство симметрично относительно некоторой оси, то возможна операция симметричного преобразования — поворот относительно оси симметрии, в результате которого отдельные элементы устройства меняются местами, в то время как геометрическая форма устройства в целом не меняется. Так, устройство, изображенное на фиг. 3.1.1, может быть повернуто на 180° около оси симметрии J . Начальное a и конечное b положения устройства ничем не отличаются, кроме маленькой метки x . Этот поворот в соответствии с данным определением является единственно возможной операцией симметричного преобразования, не считая тривиального поворота на 360° .

б'. Другой важной операцией симметричного преобразования является отражение относительно плоскости симметрии. Такая гипотетическая операция показана на фиг. 3.1.2, где метка переходит на верхнюю правую часть устройства. Заметим, что отражение

относительно плоскости симметрии не является физически реализуемым; отраженные поля не будут решениями уравнений Максвелла. Из рассмотрения вектора Пойнтинга следует, что если в части устройства фазовые соотношения между электрическим и магнитным полями таковы, что мощность распространяется направо, то отраженные поля будут иметь те же самые фазовые соотношения, и в результате мощность будет распространяться не налево, а снова направо [4]. Такая операция симметричного



Ф и г. 3.1.2. Операция отражения.

преобразования возможна только при рассмотрении одного магнитного или одного электрического поля. Так как нормированные волны определены через электрические поля, то они и будут рассматриваться в дальнейшем.

в. Если устройство симметрично и имеет соответственные симметричные плоскости отсчета (симметричные как по месторасположению, так и по направлению распространения энергии), то применение допустимых операций симметричного преобразования приведет к взаимной замене симметричных плеч и электрических полей в этих плечах. Такой же результат получится, если произвести только «преобразование» полей, так как начальное и конечное положения устройства неразличимы.

г. Операция симметричного преобразования может быть описана матрицей симметричного оператора $[G]$, который преобразует электрические поля $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ или \mathbf{a} , или \mathbf{b} в поля $\mathbf{a}' + \mathbf{b}'$ или \mathbf{a}' , или \mathbf{b}' соответственно. Таким образом,

$$\begin{aligned} [G] \mathbf{a} &= \mathbf{a}', \\ [G] \mathbf{b} &= \mathbf{b}', \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

где \mathbf{a}' и \mathbf{b}' — также решения, т. е. они могут существовать и удовлетворять граничным условиям.

Симметрический оператор $[G]$ должен быть найден на основе общих рассуждений. Так как \mathbf{a}' является не чем иным, как «совокупностью» элементов \mathbf{a} (a_p и a_q поменялись местами или a_r заменен на $-a_r$), то коэффициенты матрицы $[G]$ должны быть равны либо 0, либо ± 1 , с одним и только одним коэффициентом в строке, отличным от нуля. В противном случае поле в одном плече должно было быть заменено суммой или разностью полей в двух или более плечах или должно было полностью исчезнуть. Столбец также должен содержать не более одного коэффициента, отличного от нуля. В противном случае некоторые поля нужно было умножать два раза или более. Следовательно, в матрице $[G]$ имеется по одному коэффициенту в строке и в столбце, отличному от нуля.

Поскольку матрица $[G]$ имеет по одному коэффициенту в строке и в столбце, отличному от нуля, то можно показать, что она ортогональна, т. е.

$$[G]^T [G] = [I]. \quad (3.1.2)$$

Так как $[G]$ реальна, то она также унитарна (см. приложение I). Из определения обратной матрицы следует, что $[G]^{-1} [G] = [I]$. Значит,

$$[G]^{-1} = [G]^T. \quad (3.1.3)$$

д. В соответствии с уравнением (3.1.1) можно записать

$$[S] \mathbf{a}' = \mathbf{b}', \quad (3.1.4)$$

так как \mathbf{a}' и \mathbf{b}' удовлетворяют граничным условиям в устройстве, матрицей рассеяния которого является $[S]$. При подстановке уравнений (3.1.1) в уравнение (3.1.4) и с учетом

$$[S] \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (2.1.16')$$

получается

$$[S] [G] \mathbf{a} = [G] \mathbf{b} = [G] [S] \mathbf{a}. \quad (3.1.5)$$

Из уравнения (3.1.5) непосредственно следует, что

$$[S] [G] = [G] [S]. \quad (3.1.6)$$

Уравнение (3.1.6) подтверждает, что матрицы $[G]$ и $[S]$ коммутативны. $[G]$ и $[S]$ являются также подобными матрицами. Как будет показано в следующем параграфе, $[G]$ и $[S]$ имеют одни и те же собственные векторы (с определенными ограничениями).

Уравнение (3.1.6) является ключом к теоретическому определению матрицы рассеяния $[S]$ из соображений симметрии.

Выражения для a_1, a_2 и т. д. в соответствии с правилом Крамера записываются в виде

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon_p & c_{p2} & \dots & c_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad a_2 = \frac{\begin{vmatrix} c_{11} & 0 & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & 0 & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{p1} & \varepsilon_p & \dots & c_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & 0 & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}}{\Delta} \text{ и т. д.}$$

Через Δ обозначен определитель уравнений (3.2.8).

Теперь выражения собственных векторов a^i представляются так:

$$a_1 = \varepsilon_p \frac{\mathcal{A}_{p1}}{\Delta}, \quad a_2 = \varepsilon_p \frac{\mathcal{A}_{p2}}{\Delta}, \quad a_3 = \varepsilon_p \frac{\mathcal{A}_{p3}}{\Delta} \text{ и т. д.}$$

Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\frac{\varepsilon_p}{\Delta} = \frac{a_1}{\mathcal{A}_{p1}} = \frac{a_2}{\mathcal{A}_{p2}} = \dots = \frac{a_n}{\mathcal{A}_{pn}}.$$

Уравнение (3.2.7) остается верным, даже если $\varepsilon_p \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$.

Г. Назовем *матрицей преобразования* матрицу, столбцы которой составлены из собственных векторов $[G]$ и нормированы к единичной амплитуде (см. приложение I, п. «ч»). Таким образом,

$$[S] = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} \quad (3.2.9)$$

где a^i есть i -й собственный вектор $[G]$. Покажем, что

$$[G][S] = [S][G_d], \quad (3.2.10)$$

или

$$[S]^{-1}[G][S] = [G_d], \quad (3.2.10')$$

или

$$[G] = [S][G_d][S]^{-1}, \quad (3.2.10'')$$

где G_d есть *диагональная форма* матрицы $[G]$, имеющая следующий вид:

$$[G_d] \equiv \begin{vmatrix} g^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & g^n \end{vmatrix}$$

Здесь каждое g^i является собственным значением $[G]$, определенным выше. Уравнение (3.2.10'') позволяет выразить матрицу $[G]$ через собственные значения и собственные векторы.

Чтобы доказать соотношение (3.2.10), заметим, что его (p, q) -элемент равен

$$g_{p1}a_1^q + g_{p2}a_2^q + \dots + g_{pn}a_n^q = a_p^q g^q, \quad (3.2.11)$$

где g_{pi} есть (p, i) -элемент $[G]$. Но этот (p, q) -элемент идентичен элементу (p, q) уравнения (3.2.1), если $a = a^q$ и $g = g^q$. Таким образом, справедливо уравнение (3.2.11), а следовательно, и уравнение (3.2.10).

д. Если многочлен $f(g)$, определяемый соотношением (3.2.6), имеет несколько одинаковых корней $g^1 = g^2 = \dots = g^m$, то g^m называется вырожденным собственным значением. Из уравнения в собственных значениях при условии, что матрица $([G] - g^m[I])$ многократно вырождена (линейно связанные столбцы и строки) можно записать

$$\begin{aligned} [G]a^1 &= g^1 a^1 = g^m a^1, \\ [G]a^2 &= g^2 a^2 = g^m a^2, \\ &\dots \dots \dots \\ [G]a^m &= g^m a^m = g^m a^m. \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

При однократном вырождении матрицы $([G] - g[I])$, т. е. при равенстве нулю определителя, но при отсутствии линейно связанных рядов и строк, справедливо равенство

$$a^1 = a^2 = \dots = a^m.$$

Если каждое из уравнений (3.2.12) умножить на произвольную постоянную и затем уравнения сложить, то в результате получается новое уравнение в собственных значениях

$$[G](c_1 a^1 + c_2 a^2 + \dots + c_m a^m) = g^m (c_1 a^1 + c_2 a^2 + \dots + c_m a^m). \quad (3.2.13)$$

Следовательно, вектор $(c_1 a^1 + c_2 a^2 + \dots + c_m a^m)$ является также собственным вектором, связанным с g^m . Так как коэффициенты c_i выбраны произвольно, то *имеется бесконечное число собственных векторов, связанных с g^m* .

Другими словами, если известно, что a^1, a^2, \dots удовлетворяют уравнениям (3.2.12), то любая линейная комбинация этих собственных векторов будет также собственным вектором.

✓ е. Так как матрицы $[S]$ и $[G]$ коммутативны, то i -й собственный вектор матрицы $[G]$, равный a^i , является также собственным вектором матрицы $[S]$ при условии, что g^i не вырождено.

Для доказательства воспользуемся уравнениями (3.1.5) и (3.2.1), из которых получается выражение вида

$$[S][G]a^i = [G][S]a^i = g^i[S]a^i. \quad (3.2.14)$$

Это выражение означает, что вектор $([S]a^i)$ есть собственный вектор матрицы $[G]$, соответствующий собственному значению g^i . Если g^i не вырождено, то i -й собственный вектор $[G]$ определяется с точностью до постоянной из уравнения (3.2.8). Значит, вектор $([S]a^i)$ отличается от вектора a^i только постоянной s^i , равной собственному значению матрицы $[S]$, так что можно записать

$$[S]a^i = s^i a^i. \quad (3.2.15)$$

Уравнение (3.2.15) показывает, что коммутативные матрицы $[S]$ и $[G]$ имеют разные собственные значения, но одни и те же собственные векторы при условии невырожденности собственных значений.

Если g^i вырождено, то вектор $([S]a^i)$ по-прежнему остается собственным вектором $[G]$, однако форма его совершенно отлична от a^i . Действительно, $[S]a^i$ может быть равен $c_1 a^1 + c_2 a^2 + \dots + c_m a^m$, где a^1, a^2, \dots являются другими собственными векторами $[G]$, соответствующими g^i [см. уравнение (3.2.13)].

√ Если вырождение отсутствует, то матрица преобразования $[S]$ будет приводить матрицы $[G]$ и $[S]$ к их диагональной форме

$$[S]^{-1}[G][S] \equiv [G_d], \quad (3.2.10')$$

$$[S]^{-1}[S][S] \equiv [S_d]. \quad (3.2.16)$$

Доказательство этого следует непосредственно из применения уравнения (3.2.11) к произведению $[S][S]$.

В этой связи уместны некоторые замечания. Матрица $[G]$, полученная полностью из соображений симметрии, и матрица рассеяния симметричного устройства $[S]$ имеют одни и те же собственные векторы. Можно ввести любое симметричное изменение в пределах устройства без изменения собственных векторов $[S]$ и $[G]$ (и собственных значений $[G]$)¹. Однако собственные значения матрицы $[S]$ будут изменяться, так как

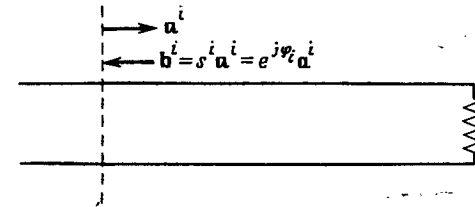
$$[S] = [S][S_d][S]^{-1} \quad (3.2.16')$$

и так как сама матрица $[S]$, очевидно, видоизменена.

¹ Требуется сделать некоторые оговорки, когда симметрия не является «полюй» (как в случае тройниковых соединений, см. § 3.4 и 3.6). Это имеет место, когда порядок n матрицы $[G]$ больше, чем порядок симметрии m , так что $[G]^m = 1$ (см. ниже пп. «ж», «з»), т. е. $[G]$ имеет вырожденные собственные значения.

Если симметрично изменить плоскости отсчета, то собственные векторы матрицы $[G]$, а следовательно, и матрицы $[S]$ сохранят свою величину. Значит, матрица $[S]$ останется той же самой. Однако коэффициенты матрицы рассеяния будут другими, другой будет матрица $[S_d]$ и другими должны быть собственные значения матрицы $[S]$.

Для устройства без потерь $|s^i| = 1$. Следовательно, симметричные изменения таких устройств без внесения потерь приведут только к изменению фазы коэффициента s^i .



Ф и г. 3.2.2. «Абстрактный» двухполюсник, эквивалентный многополюснику.

Характер коэффициента отражения s^i можно абстрактно выяснить, если рассмотреть многополюсное устройство как двухполюсник с коэффициентом отражения на конце $s^i = e^{j\varphi_i}$ для волны a_p^i , $s^{i+1} = e^{j\varphi_{i+1}}$ для волны a_p^{i+1} и т. д. В произвольном плече p сигнал a_p можно рассматривать как сумму

$$a_p = c_1 a_p^1 + c_2 a_p^2 + \dots + c_n a_p^n, \quad (3.2.17)$$

где c_i — коэффициенты, удовлетворяющие уравнению. Отраженная волна в этом плече p получается из следующего выражения:

$$b_p = c_1 s^1 a_p^1 + c_2 s^2 a_p^2 + \dots + c_n s^n a_p^n. \quad (3.2.18)$$

ж. Если любая матрица $[G]$ или $[S]$ симметрична, то собственные векторы, связанные с невырожденными собственными значениями, ортогональны друг другу.

Чтобы доказать это, рассмотрим два невырожденных собственных значения g^i и g^j . Из уравнения (3.2.1)

$$[G]a^i = g^i a^i, \quad (3.2.19)$$

$$[G]a^j = g^j a^j. \quad (3.2.19')$$

Транспонирование уравнения (3.2.19')[†] дает

$$([G]a^j)^T = (a^j)^T [G]^T = g^j (a^j)^T = (a^j)^T [G], \quad (3.2.20)$$

так как $[G]^T = [G]$. Умножим обе части уравнения (3.2.20) на a^i справа

$$(a^j)^T [G] a^i = g^j (a^j)^T a^i \quad (3.2.21)$$

и обе части уравнения (3.2.19) на $(a^j)^T$ слева

$$(a^j)^T [G] a^i = g^i (a^j)^T a^i. \quad (3.2.22)$$

Из уравнений (3.2.21) и (3.2.22) следует, что

$$g^j (a^j)^T a^i = g^i (a^j)^T a^i. \quad (3.2.23)$$

Поскольку g^i и g^j различны, имеем

$$(a^j)^T a^i = 0, \quad (3.2.24)$$

т. е. собственные векторы a^j и a^i ортогональны.

Если g^i и g^j одинаковы, то уравнение (3.2.23) справедливо, даже если a^i и a^j не ортогональны.

Если матрица $[S]$ симметрична, т. е. устройство взаимно, ее собственные векторы ортогональны при условии, что собственные значения не вырождены.

Если $g^i = g^j$, то от собственных векторов не требуется ортогональности, хотя они могут быть выбраны и ортогональными. В частности, если $[G]$ имеет вырожденные собственные значения, ортогональные собственные векторы для взаимных устройств¹⁾ будут выбираться таким образом, чтобы удовлетворить $[S]$.

3. Рациональная матричная функция вида

$$f([G]) = c_0 ([G] - c_1 [I]) ([G] - c_2 [I]) \dots ([G] - c_n [I]) \times \\ \times ([G] - c_{-1} [I])^{-1} \dots ([G] - c_{-m} [I])^{-1} \quad (3.2.25)$$

имеет те же самые собственные векторы, что и матрица $[G]$. Более того, собственные значения $f[G]$ равны $f(g^i)$, где g^i являются собственными значениями матрицы $[G]$.

Пусть a^i представляет собой собственный вектор $[G]$, так что по определению

$$[G] a^i = g^i a^i. \quad (3.2.1)$$

Отсюда следует, что

$$([G] - e_k [I]) a^i = (g^i - e_k) a^i, \quad (3.2.26)$$

где e_k может быть выбрано произвольно. В частности, величина e_k может быть выбрана равной c_k , т. е.

$$([G] - c_k [I]) a^i = (g^i - c_k) a^i. \quad (3.2.26')$$

Если обе части уравнения (3.2.26) умножить на $(g^i - e_k)^{-1} \times \times ([G] - e_k [I])^{-1}$ и поменять местами левую и правую части полу-

¹⁾ Матрица $[G]$ симметрична, если она определяет операцию отражения. Она может быть не симметричной, если определяет операцию поворота около оси симметрии.

ченного уравнения, то в результате получим

$$([G] - e_k [I])^{-1} a^i = (g^i - e_k)^{-1} a^i, \quad (3.2.27)$$

и, в частности,

$$([G] - c_k [I])^{-1} a^i = (g^i - c_k)^{-1} a^i. \quad (3.2.27')$$

Умножим обе части равенства (3.2.25) на a^i

$$f([G]) a^i = c_0 ([G] - c_1 [I]) ([G] - c_2 [I]) \dots ([G] - c_n [I]) \times \\ \times ([G] - c_{-1} [I])^{-1} \dots ([G] - c_{-m} [I])^{-1} a^i. \quad (3.2.28)$$

Если каждый множитель заменить соответственно на $(g^i - c_k)$, $k = 1, 2, \dots, n$ или $(g^i - c_{-k})^{-1}$, $k = 1, 2, \dots, m$, то получим

$$f([G]) a^i = c_0 (g^i - c_1) (g^i - c_2) \dots (g^i - c_n) \times \\ \times (g^i - c_{-1})^{-1} \dots (g^i - c_{-m})^{-1} a^i. \quad (3.2.29)$$

Это уравнение показывает, что a^i является собственным вектором функции $f([G])$, а $f(g^i)$ есть соответствующее собственное значение, т. е. g^i играет ту же роль, что и $[G]$ в уравнении (3.2.25).

Непосредственное использование уравнения (3.2.29) связано со случаем $[G]^m = 1$, который возникает, когда $[G]$ является симметрическим оператором, соответствующим повороту около оси симметрии n -полосного устройства. Условие $[G]^m = 1$ означает, что если устройство преобразовано m раз, то оно возвращается обратно к своему первоначальному положению (для преобразования отражением $m = 2$). Из уравнения (3.2.29), где $c_0 = 1$ и c_1, c_2, \dots, c_n равны 0, а коэффициенты, характеризующие мощность, распространяющуюся в обратном направлении, отсутствуют, собственные значения $[G]$ равны корню m -й степени из единицы, так как

$$[G] a^i = g^i a^i \quad (3.2.1)$$

и

$$[G]^m a^i = (g^i)^m a^i = [I] a^i = a^i. \quad (3.2.29')$$

Заметим, что когда порядок матрицы $[G]$ больше, чем порядок симметрии m , $[G]$ будет иметь вырожденные собственные значения, как отмечено в сноске на стр. 98.

Другим следствием уравнения (3.2.29) является то, что $[\bar{z}]$, $[\bar{y}]$ и $[S]$ имеют одни и те же собственные векторы и связанные с ними собственные значения. Например, соотношение

$$[\bar{z}] = [I + S] [I - S]^{-1} = -[S + I] [S - I]^{-1} \quad (2.2.7)$$

по форме напоминает уравнение (3.2.25); таким образом, $[\bar{z}]$ и $[S]$ имеют общие собственные векторы и собственные значения, свя-

занные соотношением

$$\bar{z}^i = \frac{1+s^i}{1-s^i}. \quad (3.2.30)$$

и. След матрицы $[G]$, т. е. сумма ее диагональных членов, равен сумме собственных значений.

n корней g^1, g^2, \dots, g^n характеристического уравнения (3.2.6) являются n собственными значениями матрицы $[G]$. Их сумма равна c_1 , коэффициенту перед $(g)^{n-1}$. С другой стороны, характеристическое уравнение является разложением $\det([G] - g[I])$, т. е.

$$f(g) = \det \begin{vmatrix} (g_{11} - g) & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ g_{21} & (g_{22} - g) & \dots & g_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & g_{n2} & \dots & (g_{nn} - g) \end{vmatrix} \quad (3.2.5)$$

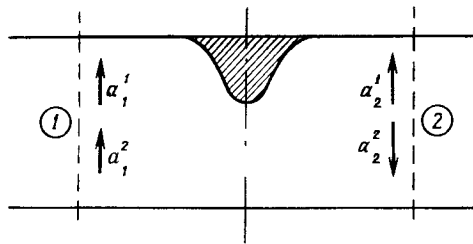
По правилу детерминанта (см. приложение I, п. «и») коэффициент перед $(g)^{n-1}$ есть $g_{11} + g_{22} + \dots + g_{nn}$. Следовательно,

$$g_{11} + g_{22} + \dots + g_{nn} = g^1 + g^2 + \dots + g^n. \quad (3.2.31)$$

Уравнение (3.2.31) сразу дает g^n , если известны g^1, g^2, \dots, g^{n-1} .

§ 3.3. СИММЕТРИЧНЫЙ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИК

Рассмотрим симметричный четырехполосник, изображенный на фиг. 3.3.1. Плоскости отсчета выбраны симметрично. В результате



Фиг. 3.3.1. Симметричный четырехполосник и его собственные векторы.

применения к этому устройству операции отражения относительно плоскости симметрии поля в плече 1 поменяются местами с полями в плече 2 и симметрический оператор $[G]$ примет вид

$$[G] = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3.1)$$

При умножении оператора $[G]$ на первоначальные поля a получаются новые поля a' , т. е.

$$[G] a = a',$$

где

$$a'_1 = a_2,$$

$$a'_2 = a_1.$$

Собственные значения $[G]$ равны

$$\begin{aligned} g^1 &= 1, \\ g^2 &= -1, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

так как $[G]^2 = 1$ (см. § 3.2, п. «з»).

Собственные векторы $[G]$ могут быть найдены из уравнения (3.2.7) или в данном случае из таких рассуждений.

Поскольку $[G] a^1 = g^1 a^1 = a^1$ и $[G] a^2 = g^2 a^2 = -a^2$, то

$$a^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad a^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad (3.3.3)$$

и a^1, a^2 являются собственными векторами матрицы $[S]$.

Матрица преобразования $[S]$ записывается в виде

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}. \quad (3.3.4)$$

Из такой записи видно, что она симметрична. Матрица рассеяния $[S]$ может быть получена из уравнения (3.2.16') с учетом ортогональности матрицы $[S]$ (см. приложение I, теорема IV)

$$[S] = [S] [S_d] [S]^{-1} = [S] [S_d] [S]. \quad (3.3.5)$$

При подстановке в уравнение (3.3.5) выражений матриц $[S]$ и $[S_d]$ получается

$$[S] = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (s^1 + s^2) & (s^1 - s^2) \\ (s^1 - s^2) & (s^1 + s^2) \end{vmatrix}, \quad (3.3.6)$$

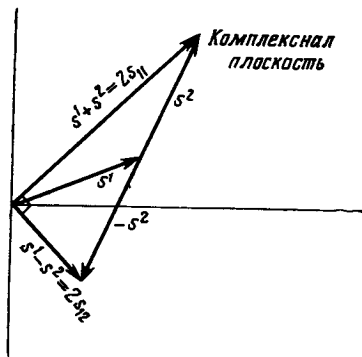
где

$$\begin{aligned} s_{11} &= s_{22} = \frac{1}{2} (s^1 + s^2), \\ s_{12} &= \frac{1}{2} (s^1 - s^2). \end{aligned} \quad (3.3.6')$$

Собственный вектор a^2 является антисимметричным и обращается в нуль в плоскости симметрии (две компоненты равны и отличаются по фазе на 180°). Собственный вектор a^1 симметричный (или «четный») и имеет максимальное значение в плоскости симметрии.

Из уравнения (3.3.6) очевидно, что соединение согласовано, если $s^1 = -s^2$.

Если соединение без потерь, то $|s^1| = |s^2| = 1$. В этом случае s_{11} и s_{12} находятся в квадратуре, так как $(s^1 + s^2)$ и $(s^1 - s^2)$



Ф и г. 3.3.2. Геометрическое определение коэффициентов рассеяния.

находятся в квадратуре (фиг. 3.3.2). Когда потери отсутствуют,

$$|s_{11}|^2 + |s_{12}|^2 = 1, \quad (3.3.7)$$

что подтверждается из фиг. 3.3.2. В случае, если коэффициент s_{11} действительное число, то

$$s_{12} = \pm j\sqrt{1 - s_{11}^2}. \quad (3.3.7')$$

Уравнение (3.3.7') может быть также получено из свойства унитарности матрицы $[S]$.

Заметим, что независимо от того, имеет ли соединение потери или нет, выполняется равенство

$$s_{11} - s_{12} = s^2. \quad (3.3.8)$$

В плоскости, где $s^2 = -1$, эквивалентной схемой неоднородности в соответствии с приложением III.2 является параллельное сопротивление величиной

$$\bar{z}_e = -\frac{s_{12}}{2s_{11}} = \frac{(1+s^1)}{2(1-s^1)}. \quad (3.3.9)$$

Если соединение не имеет потерь, $|s^1| = 1$ и z_e — чисто реактивное, так как $(1+s^1)$ и $(1-s^1)$ находятся в квадратуре.

а. Случай тонкой неоднородности. Если неоднородность тонкая, то величина a^2 «не чувствует» неоднородности, даже если неоднородность почти полностью заполняет поперечное сечение волновода. Собственное значение s^2 является в этом случае функцией только положения плоскостей отсчета и всегда равно -1 на неодно-

родности и на расстоянии половины длины волны от нее. С другой стороны, значение симметричного собственного вектора a^1 зависит от величины неоднородности. Если неоднородности нет, то имеется максимум в плоскости симметрии, т. е. в этой плоскости $s^1 = 1$. Это удовлетворяет условию «согласования», описанному выше. Если неоднородность полностью заполняет поперечное сечение волновода, то, очевидно, имеет место короткое замыкание в месте расположения неоднородности, т. е. $s^1 = -1$. Если неоднородность только частично заполняет поперечное сечение, $s^1 = e^{j\varphi_1}$, где угол φ_1 может быть положительным и отрицательным. Следовательно, в то время как s^2 остается постоянным и равным -1 в плоскости симметрии, s^1 может принимать любую фазу, зависящую от величины неоднородности. Эквивалентной схемой тонкой неоднородности в месте ее расположения является шунтирующее сопротивление, равное

$$\bar{z}_e = \frac{(1+s^1)}{2(1-s^1)}.$$

б. Случай толстой металлической неоднородности. Независимо от толщины неоднородности плоскость симметрии всегда является нулем (электрическим коротким замыканием) собственного вектора a^2 и $s^2 = -1$. Толстая металлическая неоднородность может быть по-прежнему представлена шунтирующим сопротивлением величины $\bar{z}_e = (1+s^1)/2(1-s^1)$ в плоскости симметрии. Однако теперь электрическая стенка стала более протяженной в продольном направлении (толстая неоднородность), и в то время как $s^2 = -1$ в плоскости симметрии, следующий нуль имеет место на расстоянии, большем чем $\lambda_B/2$. Плоскость эффективного нуля ($s^2 = -1$) лежит где-то между плоскостью симметрии и самыми дальними от центра гранями неоднородности (фиг. 3.3.3, а). Эквивалентная схема представлена на фиг. 3.3.3, б, где отрезок передающей линии длиной $2d$ взят равным нулю.

Для случая $d \ll \lambda_B$ эквивалентная схема по отношению к плоскости симметрии изображена на фиг. 3.3.3, в. В плоскости, где $s^2 = -1$, величина \bar{z}^2 , т. е. собственное значение матрицы $[\bar{z}]$, соответствующее a^2 , равно нулю, так как

$$\bar{z}^2 = \frac{1+s^2}{1-s^2}. \quad (3.2.30)$$

Если воспользоваться уравнением (1.3.19') и при $d \ll \lambda_B$ положить, что

$$\begin{aligned} \cos \gamma d &\approx 1, \\ \sin \gamma d &\approx \gamma d = \frac{2\pi d}{\lambda_B}, \\ \bar{z}(-d) &= 0, \end{aligned}$$

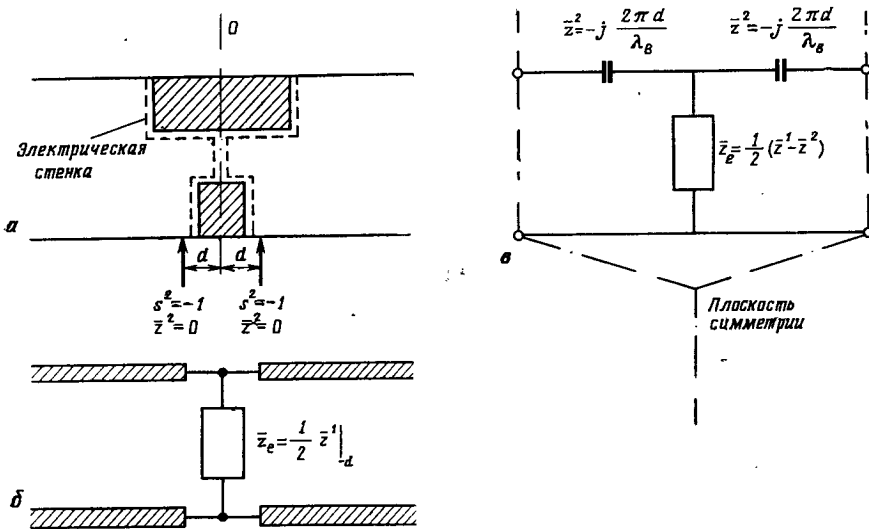
то в плоскости симметрии

$$\bar{z}^2 = -j \frac{2\pi d}{\lambda_B}. \quad (3.3.10)$$

Матрица сопротивления $[\bar{z}]$, выраженная через свои собственные значения, идентична уравнению (3.3.6)

$$[\bar{z}] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (\bar{z}^1 + \bar{z}^2) & (\bar{z}^1 - \bar{z}^2) \\ (\bar{z}^1 - \bar{z}^2) & (\bar{z}^1 + \bar{z}^2) \end{vmatrix} \quad (3.3.11)$$

так как она выводится из той же матрицы преобразования $[G]$, что и матрица рассеяния $[S]$ (см. § 3.2, п. «э»).



Ф и г. 3.3.3. Толстая неоднородность и ее эквивалентная схема.

Из уравнения (3.3.11) следует, что эквивалентной схемой Т-образного четырехполюсника является схема, изображенная на фиг. 3.3.3, в.

Заметим, что на фиг. 3.3.3, б параллельное сопротивление равно $1/2 \bar{z}^1$ при $z = -d$ (где $s^2 = -1$), тогда как на фиг. 3.3.3, в значение этого сопротивления равно $1/2 [\bar{z}^1 + j(2\pi d/\lambda_B)]$, где \bar{z}^1 теперь берется в плоскости симметрии.

Симметричные неоднородности, такие, как диафрагмы и штыри различных размеров, расположенные внутри волноводов, имеют большое практическое значение как согласующие элементы (см. приложение V) или как элементы волноводных фильтров и периодических структур. Табличные и графические данные, относящиеся

к \bar{z}_e и \bar{z}^2 , полученные экспериментально или теоретически, имеются во многих источниках [5, 10—12]. В приложении VI описан простой метод измерения параметров эквивалентной схемы, изображенной на фиг. 3.3.3, б.

Выбор типа структуры зависит от многих (иногда противоречивых) факторов, таких, как величина \bar{z}_e , частотная селективность, простота изготовления, требования возможной регулировки и т. д.

Многое из рассмотренного в этом параграфе может быть применено к несимметричным (но взаимным) устройствам без потерь, если сделать s_{11} и s_{12} равными соответствующим выборам плоскостей отсчета. Как симметричное, так и несимметричное соединение без потерь может быть также представлено посредством идеального $n : 1$ трансформатора и отрезками линий, как показано в приложении III.1. Идеальный трансформатор всегда асимметричен.

Наконец, если четырехполюсник без потерь обладает свойством симметрии, но невзаимен (например, четырехполюсник, содержащий феррит, намагниченный в поперечном направлении, как это указано в § 4.9, п. «б»), то нельзя использовать симметрический оператор $[G]$ в виде уравнения (3.3.1), так как к такому устройству нельзя применить операцию симметричного преобразования в ранее рассмотренном виде. При отражении поля поменяются местами, но с разницей в фазе, т. е.

$$[G] = \begin{vmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3.12)$$

Матрица преобразования приобретает вид

$$[G] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3.13)$$

а матрица рассеяния

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (s^1 + s^2) & (s^1 - s^2) e^{j\theta} \\ (s^1 - s^2) e^{-j\theta} & (s^1 + s^2) \end{vmatrix} \quad (3.3.14)$$

Если невзаимно сместить плоскости отсчета, то можно рассматривать устройство в целом как каскадное соединение взаимного многополюсника с матрицей

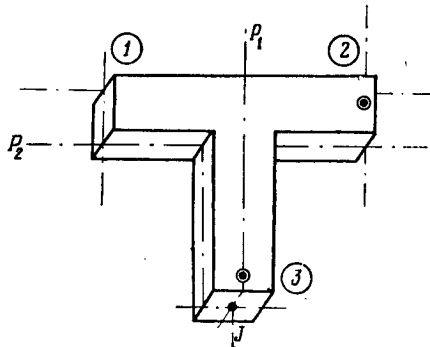
$$[S]_R = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (s^1 + s^2) & (s^1 - s^2) \\ (s^1 - s^2) & (s^1 + s^2) \end{vmatrix} \quad (3.3.15)$$

(которая может быть согласованной или несогласованной в зависимости от того, $s^1 = -s^2$ или нет) и согласованного, но невзаимного фазовращателя с матрицей рассеяния

$$[S]_{NR} = \begin{vmatrix} 0 & e^{j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.3.16)$$

§ 3.4. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ Т-ОБРАЗНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ (ТРОЙНИКИ В ПЛОСКОСТИ H)

Параллельное Т-образное соединение, изображенное на фиг. 3.4.1, имеет две плоскости симметрии P_1 и P_2 и ось симметрии J .



Ф и г. 3.4.1. Т-образное соединение в плоскости H .

Применение операции симметричного преобразования в виде отражения относительно плоскости P_1 приводит к тому, что электрические поля в плечах 1 и 2 меняются местами, а поля в плече 3 остаются неизменными (волна типа TE_{10}). В соответствии с этим

$$[G]_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.4.1)$$

В результате поворота вокруг оси J поля в плече 1 меняются местами с полями в плече 2 (с изменением знака), в то время как поля в плече 3 только меняют знак. В соответствии с этим

$$[G]_J = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.4.2)$$

Матрица $[G]_J$ равна матрице $[G]_1$ с точностью до знака.

Отражение относительно плоскости P_2 просто меняет знак всех полей и является тривиальным. Для всех практических целей может быть использована только одна матрица симметричного оператора $[G] \equiv [G]_1$. Так как $[G]$ ортогональна и симметрична, то

$$[G] = [G]^{-1} = [G]^T. \quad (3.4.3)$$

Кроме того, из уравнения (3.1.6)

$$[S] = [G][S][G]. \quad (3.4.4)$$

Для параллельного Т-образного соединения, заполненного изотропной средой, матрица рассеяния $[S]$ может быть записана в виде

$$[S] = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} \quad (3.4.5)$$

Подставив (3.4.5) в (3.4.4), получим

$$\begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_{22} & S_{12} & S_{23} \\ S_{12} & S_{11} & S_{13} \\ S_{23} & S_{13} & S_{33} \end{vmatrix} \quad (3.4.4')$$

Отсюда очевидно, что

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} \equiv \alpha, \\ S_{13} &= S_{23} \equiv \gamma, \\ S_{33} &\equiv \beta, \\ S_{12} &\equiv \delta, \end{aligned}$$

так что

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \delta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \beta \end{vmatrix} \quad (3.4.6)$$

Только благодаря изотропности и симметрии устройства число коэффициентов в матрице рассеяния уменьшается до четырех. Кроме того, если устройство без потерь, то имеются выражения, связывающие эти четыре коэффициента. Эти выражения получаются из свойства унитарности матрицы $[S]$

$$[S][S]^* = 1. \quad (2.2.19)$$

Распишем это соотношение:

$$\text{элемент (1,1)} \quad [S][S]^* = |\alpha|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad (3.4.7a)$$

$$\text{элемент (3,3)} \quad [S][S]^* = |\beta|^2 + 2|\gamma|^2 = 1, \quad (3.4.7b)$$

$$\text{элемент (2,1)} \quad [S][S]^* = \delta\alpha^* + \alpha\delta^* + |\gamma|^2 = 0, \quad (3.4.7в)$$

$$\text{элемент (3,1)} \quad [S][S]^* = \gamma\alpha^* + \gamma\delta^* + \beta\gamma^* = 0. \quad (3.4.7г)$$

Из соотношений (3.4.6) и (3.4.7) можно получить дополнительные сведения об элементах матрицы $[S]$. Однако для того чтобы ответить на вопрос, полностью ли развязаны плечи 1 и 2, если в плечо 3 поместить короткозамкнутый поршень, или какой минимальный коэффициент стоячей волны можно получить в линии 1—2 для данного коэффициента связи от плеча 1 к плечу 3, необходимо выразить элементы матрицы $[S]$ через ее собственные значения.

Собственные значения $[G]$ равны $+1$ и -1 (см. § 3.2, п. «б»), и так как след матрицы $[G]$ равен 1, то $+1$ является двойным корнем (см. § 3.2, п. «и»), т. е.

$$g^1 = +1, \quad g^2 = +1, \quad g^3 = -1. \quad (3.4.8)$$

Собственный вектор \mathbf{a}^3 , соответствующий невырожденному собственному значению -1 , может быть рассчитан из уравнения (3.2.7)

$$\frac{a_1^3}{\det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-a_2^3}{\det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{a_3^3}{\det \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}, \quad (3.2.7')$$

т. е.

$$\mathbf{a}^3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.4.9)$$

если величину a^3 сделать равной 1.

Собственные векторы \mathbf{a}^1 и \mathbf{a}^2 не имеют единственного решения, но их можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли матрице $[S]$ [т. е. \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 , \mathbf{a}^3 должны быть взаимно ортогональны, если $[S]$ симметрична и ее собственные значения не вырождены (см. § 3.2, пп. «е», «ж»)]:

$$\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^3 = 0 = a_1^1 \frac{\sqrt{2}}{2} - a_2^1 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \rightarrow \frac{a_1^1}{a_2^1} = 1,$$

$$\mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3 = 0 = a_1^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - a_2^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \rightarrow \frac{a_1^2}{a_2^2} = 1,$$

$$\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 = 0 = a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2 + a_3^1 a_3^2.$$

Отсюда

$$\mathbf{a}^1 \propto \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2}x \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 \propto \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2}x \end{vmatrix} \quad (3.4.9')$$

где величина x является пока неопределенной и зависит от выбора плоскости отсчета в плече 3 при симметрично расположенных плоскостях отсчета в плечах 1 и 2. Эта трудность возникает потому, что симметрия соединения «неполная» в противоположность случаю Y-соединения (см. § 3.5), где матрица $[G]$ не зависит от выбора плоскости отсчета в плече 3.

Матрица преобразования определяется соотношением

$$[G] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}x & -\frac{\sqrt{2}}{x} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.4.10)$$

Матрица рассеяния $[S]$ может быть определена через свои собственные значения из уравнения (3.2.16')

$$[S] = [G][S_d][G]^{-1},$$

где

$$[G]^{-1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{x} & \sqrt{2} \\ x & x & -\sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{1}{x}\right) & -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{x} + x\right) & 0 \end{vmatrix}$$

В результате получается, как и прежде,

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \delta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \beta \end{vmatrix} \quad (3.4.6)$$

Однако теперь

$$\alpha = \frac{1}{2\left(\frac{1}{x} + x\right)} \left[\frac{1}{x} s^1 + x s^2 \right] + \frac{1}{2} s^3, \quad (3.4.11a)$$

$$\beta = \frac{1}{2\left(\frac{1}{x} + x\right)} \left[2x s^1 + \frac{2}{x} s^2 \right], \quad (3.4.11б)$$

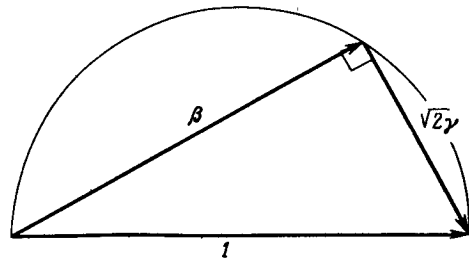
$$\gamma = \frac{1}{2\left(\frac{1}{x} + x\right)} \left[\sqrt{2} s^1 - \sqrt{2} s^2 \right], \quad (3.4.11в)$$

$$\delta = \frac{1}{2\left(\frac{1}{x} + x\right)} \left[\frac{1}{x} s^1 + x s^2 \right] - \frac{1}{2} s^3. \quad (3.4.11г)$$

Легко можно показать, что с учетом уравнения (3.2.31)

$$2\alpha + \beta = s^1 + s^2 + s^3. \quad (3.4.12)$$

Запись уравнений (3.4.11) в указанном виде неудобна из-за присутствия в них неопределенного коэффициента x . Заметим, что α , β , γ , δ характеризуют существенные свойства соединения. В соответствии с уравнением (2.3.9) их абсолютные значения для данного устройства не зависят от выбора плоскостей отсчета.



Ф и г. 3.4.2. Фазовые соотношения между β и γ .

В то же время изменение положения плоскостей отсчета изменит фазу β или γ и собственные значения. Ниже будет показано, что удобно выбрать плоскость отсчета в плече 3 так, чтобы

$$\beta + \sqrt{2}\gamma = 1. \quad (3.4.13)$$

Заметим, что при таком выборе

$$|\beta|^2 + 2|\gamma|^2 = 1. \quad (3.4.76)$$

Можно начать с произвольных, но симметричных плоскостей отсчета в плечах 1 и 2. Из уравнения (2.3.9) следует, что смещение плоскости отсчета в плече 3 приводит к изменению фазы β , в два раза большему, чем изменение фазы γ . Таким образом, всегда можно получить зависимость между β и γ в квадратуре.

Смещением плоскостей отсчета во всех трех плечах на один и тот же электрический угол можно повернуть вектор, равный сумме $\beta + \sqrt{2}\gamma$, таким образом, чтобы он равнялся 1 (фаза равна 0). Очевидно, что в этом случае все три плоскости будут определены однозначно. Прямоугольный треугольник, изображенный на фиг. 3.4.2, одновременно удовлетворяет уравнениям (3.4.13) и (3.4.76).

Если уравнения (3.4.11б) и (3.4.11в) подставить в уравнение (3.4.13), то получим

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{x} + x\right)} \left[s^1(x+1) + s^2\left(\frac{1}{x} - 1\right) \right] = 1, \quad (3.4.14)$$

которое удовлетворяется при¹⁾

$$\begin{aligned} x &= 1, \\ s^1 &= 1. \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Уравнения (3.4.11) для этого частного случая выбора плоскостей отсчета будут иметь вид

$$\alpha = \frac{1}{4}(1 + s^2 + 2s^3), \quad (3.4.16a)$$

$$\beta = \frac{1}{2}(1 + s^2), \quad (3.4.16б)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - s^2), \quad (3.4.16в)$$

$$\delta = \frac{1}{4}(1 + s^2 - 2s^3) \quad (3.4.16г)$$

вместе с уравнениями

$$2\alpha + \beta = 1 + s^2 + s^3, \quad (3.4.12')$$

$$\beta + \sqrt{2}\gamma = 1, \quad (3.4.13)$$

$$\alpha + \delta = \beta, \quad (3.4.17)$$

которые получаются из уравнений (3.4.16). Значения s^2 и s^3 определяются на выбранных плоскостях отсчета.

Практические примеры

а. Одновременное согласование плеч 1 и 2. В соответствии с процедурой, приведенной в приложении V, всегда можно согласовать любое плечо T-образного соединения. Но на данной стадии изучения этого вопроса не очевидно, можно ли согласовать одновременно плечи 1 и 2. Положим, что это возможно; тогда в матрице рассеяния уравнения (3.4.6) $\alpha = s_{11} = s_{22} = 0$.

Из уравнения (3.4.16а) получим

$$1 + s^2 + 2s^3 = 0. \quad (3.4.18)$$

Но так как $|s^2| = 1$ и $|s^3| = 1$, то уравнение (3.4.18) будет справедливым только при условии

$$s^2 = 1 \text{ и } s^3 = -1,$$

или

$$\beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = 1.$$

¹⁾ Оно также удовлетворяется при $x = -1$, $s^2 = 1$, что соответствует просто изменению обозначений собственных векторов a^1 и a^2 .

С учетом ранее выбранных плоскостей отсчета ($s^1 = 1$) матрица рассеяния параллельного Т-образного соединения с одновременно согласованными плечами 1 и 2 имеет вид

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.4.19)$$

Плечо 3 должно быть полностью развязано от плеч 1 и 2. Следовательно, плечо 3 должно содержать в определенном месте металлическую стенку (такое место может быть всегда найдено, как это и показано ниже) или запердельный волновод с соответствующим согласующим устройством.

Выражение (3.4.19) можно интерпретировать и по-другому, а именно что ответвление мощности в плечо 3 (безотносительно к ее величине) приведет к одновременному рассогласованию в плечах 1 и 2, если устройство симметрично, или по крайней мере к рассогласованию в плече 1 или в плече 2, если одно из этих плеч является согласованным. Такие же результаты могут быть получены, если воспользоваться свойством унитарности матрицы $[S]$ и уравнениями (3.4.7).

б. Согласование плеча 3. Всегда можно сделать так, чтобы $\beta = 0$ (см. приложение V). В таком случае в выражение (3.4.16б) нужно подставить

$$s^2 = -1, \quad (3.4.20)$$

тогда выражения (3.4.16) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \alpha &= s^3/2, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= \sqrt{2}/2, \\ \delta &= -s^3/2. \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Если $s^3 = e^{j2\theta}$, то плоскости отсчета в плечах 1 и 2 можно переместить симметрично так, что $s^3 = -1$ ($\theta_1 = \theta_2 = \pi/2 - \theta$), а плоскость отсчета в плече 3 следует переместить на угол $(\theta - \pi/2)$, чтобы γ не изменилось. В результате получается следующий вид матрицы рассеяния:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.4.22)$$

Теперь устройство обеспечивает трехдецибелное деление мощности из плеча 3, причем волны в симметричных плечах 1 и 2 будут иметь одинаковые фазы. Заметим, что если мощность подводится к плечу 1, то

$$\begin{aligned} 1/4 & \text{ часть мощности отражается назад в плечо } 1, \\ 1/4 & \text{ » » передается в плечо } 2, \\ 1/2 & \text{ » » » » » } 3. \end{aligned}$$

Однако если

$$a = \begin{vmatrix} a_1 \\ a_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

т. е. если в плоскостях отсчета сигналы равны по амплитуде и фазе, то отраженная волна равна

$$b = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}a_1 \end{vmatrix}$$

т. е. вся мощность выходит из плеча 3.

в. Согласованный тройник, используемый в качестве шунтирующего сопротивления. Рассмотрим случай, когда к плечу 3 произвольного тройника, коэффициенты матрицы рассеяния которого удовлетворяют уравнению (3.4.13), подключено нормированное сопротивление \bar{z} , а плечо 2 согласовано. Если к плечу 1 подается волна a_1 , то в плече 1 появляется отраженная волна b_1 , а в плече 2 — волна b_2 и

$$\begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \delta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \beta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \\ \Gamma_3 b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \quad (3.4.23)$$

где

$$\Gamma_3 = \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1}. \quad (3.4.24)$$

Расписав соотношение (3.4.23), получим три уравнения, которые определяют b :

$$\begin{aligned} b_1 + 0 - (\gamma\Gamma_3)b_3 &= \alpha a_1, \\ 0 + b_2 - (\gamma\Gamma_3)b_3 &= \delta a_1, \\ 0 + 0 + (1 - \beta\Gamma_3)b_3 &= \gamma a_1. \end{aligned} \quad (3.4.23')$$

Отраженные волны b_1, b_2, b_3 можно найти по правилу Крамера

$$\begin{aligned} b_1 &= \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) a_1, \\ b_2 &= \left(\delta + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) a_1, \\ b_3 &= \left(\frac{\gamma}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) a_1. \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

Теперь можно рассматривать устройство как симметричный четырехполюсник и получить «редуцированную» матрицу второго порядка, которая после умножения на $\begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \end{vmatrix}$ дает матрицу $\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix}$, определяемую из уравнений (3.4.25)

$$[S]_R = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{11} \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{11} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) a_1 \\ \left(\delta + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) a_1 \end{vmatrix} \quad (3.4.26)$$

Из этой формулы видно, что

$$[S]_R = \begin{vmatrix} \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) \left(\delta + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) \\ \left(\delta + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right) \end{vmatrix} \quad (3.4.27)$$

Соотношения, полученные в § 3.3 для симметричного четырехполюсника, относятся и к параллельному Т-образному соединению с плечом 3, оканчивающимся на нагрузку с коэффициентом отражения Γ_3 . В частности, из уравнений (3.4.27) и (3.4.16) находим, что

$$s_{11} - s_{12} = \alpha - \delta = s^3. \quad (3.4.28)$$

В таких плоскостях в плечах 1 и 2, где $s^3 = -1$, в том числе и в плоскости симметрии¹⁾ (s^3 — собственное значение антисимметричного или нечетного собственного вектора и по существу есть то же самое, что и s^2 , рассмотренное в § 3.3), эквивалентной схемой устройства является параллельно включенное сопротивление \bar{z}_e (см. приложение III)

$$\bar{z}_e = -\frac{1}{2} \frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad (III.12)$$

¹⁾ Эти плоскости совпадают в плоскости симметрии. Однако электрическое расстояние до следующего нуля в плече 1 или 2 не равно действительному расстоянию, а несколько меньше (см. примечание на стр. 113).

где теперь

$$\begin{aligned} s_{11} &= \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right), \\ s_{12} &= \left(\delta + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \beta} \right). \end{aligned}$$

С помощью уравнений (3.4.16) получим

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4} (s^1 + s^2 - 2), \\ \beta &= \frac{1}{2} (s^1 + s^2), \\ \gamma &= \frac{\sqrt{2}}{4} (s^1 - s^2), \\ \delta &= \frac{1}{4} (s^1 + s^2 + 2), \end{aligned} \quad (3.4.29)$$

где значения s^1 и s^2 должны быть взяты в плоскости симметрии или в любом сечении, где $s^3 = -1$.

Подставляя эти значения в уравнение (III.12) и используя уравнение (3.4.24), получим

$$\bar{z}_e = -\frac{1}{2} \left[\frac{\bar{z} - \frac{(1+s^1)(1+s^2)}{s^1 s^2 - 1}}{\frac{(1-s^1)(1-s^2)}{s^1 s^2 - 1} - 1} \right] \quad (3.4.30)$$

Можно проверить (алгебраически или более просто геометрически), что $(1+s^1)(1+s^2)/(s^1 s^2 - 1)$ и $(1-s^1)(1-s^2)/(s^1 s^2 - 1)$ всегда мнимы, если $|s^1| = |s^2|$. Следовательно, для тройника без потерь, если \bar{z} мнимое, \bar{z}_e тоже мнимое.

Если $s^1 = 1$ в плоскости симметрии, как это должно быть для конструкции тройника без согласующих его неоднородностей, то уравнение (3.4.30) приобретает вид

$$\bar{z}_e = \frac{\bar{z}}{2} + \frac{(1+s^2)}{(1-s^2)}. \quad (3.4.30')$$

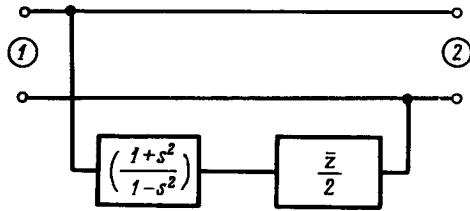
Эквивалентная схема такого устройства изображена на фиг. 3.4.3.

Безотносительно к тому, выполняется последнее уравнение или нет, если \bar{z} определяется из опыта с подвижным короткозамыкающим поршнем, т. е. если

$$\bar{z}(-d) = j \operatorname{tg} \gamma d, \quad (1.3.20)$$

то всегда можно найти такое положение короткозамыкающего поршня, что будет получаться любое наперед заданное значение

реактивного сопротивления \bar{z}_e , включая 0 и $\pm \infty$ ¹⁾. Следовательно, любое параллельное T-образное соединение будет действовать как согласующее устройство, но если s^1 и s^2 неизвестны в плоскости симметрии, то нельзя заранее сказать, как \bar{z}_e зависит от \bar{z} .



Ф и г. 3.4.3. Эквивалентная схема произвольного параллельного T-образного соединения, плечо 3 которого оканчивается сопротивлением z , в случае когда $s^1 = 1$.

С другой стороны, если плечо 3 согласовано, то из уравнений (3.4.22) и (3.4.27) следует, что

$$\bar{z}_e = \bar{z}/2. \quad (3.4.30'')$$

Таким образом, в некоторой степени получается то же самое, что и в случае, когда действие неоднородности незначительно, но характеристическое сопротивление плеча 3 равно половине сопротивления двух других плеч.

г. Случай полной электрической симметрии. Потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ \gamma &= \delta. \end{aligned} \quad (3.4.31)$$

Из уравнений (3.4.16') видно, что это выполнимо, если γ и δ не равны нулю. Следовательно, нужно отказаться от условия (3.4.13) и подставить другое значение x в уравнениях (3.4.11).

Для $x = 1/\sqrt{2}$ собственные векторы приобретают вид

$$a^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad a^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}, \quad a^3 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.4.32)$$

Здесь штрих указывает на отличие этих значений от значений из уравнений (3.4.9'). Далее, для того чтобы выполнялись усло-

¹⁾ Отметим, что если короткозамыкающий поршень находится в плече 2, то это утверждение может и не быть справедливым. Экспериментальные данные см. в [5].

вия (3.4.31), необходимо, чтобы

$$s^{2'} = s^3 \quad (3.4.33)$$

и, в частности, в плоскости симметрии

$$s^{2'} = s^{3'} = -1. \quad (3.4.33')$$

Уравнение (3.4.33) не получается автоматически, как в случае уравнения (3.4.15). Теперь нельзя выполнить условие (3.4.33) только соответствующим выбором плоскостей отсчета, а нужно менять само соединение. Экспериментально можно разместить перегородку или неоднородность по плоскости симметрии так, чтобы не изменить s^3 , в то время как подходящая плоскость отсчета должна быть найдена в плече 3 изменением фазы $a_3^{2'}$.

При соблюдении условия (3.4.33') запишем

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \frac{1}{3}(s^{1'} - 2), \\ \gamma &= \delta = \frac{1}{3}(s^{1'} + 1), \end{aligned} \quad (3.4.31')$$

если плоскость симметрии совпадает с плоскостями отсчета в плечах 1 и 2.

Как будет показано в следующем параграфе, симметричное и взаимное Y-соединение автоматически удовлетворяет уравнениям (3.4.33') и (3.4.31'). На этой стадии рассмотрения тройниковое соединение с полной электрической симметрией и симметричное Y-соединение обладают одинаковыми свойствами.

В случае представления симметричного соединения как устройства для трансформации сопротивлений можно написать соотношение, аналогичное уравнению (3.4.23):

$$\begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \gamma \\ \gamma & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \\ \Gamma_3 b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} \quad (3.4.34)$$

Раскрывая это выражение и составляя «редуцированную» матрицу рассеяния, получим

$$[S]_R = \begin{vmatrix} \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) \\ \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) \end{vmatrix} \quad (3.4.35)$$

¹⁾ Эквивалентное параллельное сопротивление \bar{z}_e , включенное параллельно линии и вычисленное по уравнению (III.12) с исполь-

зованием уравнений (3.4.31'), приобретает вид

$$\bar{z}_e = \frac{\bar{z}}{1 + 3\bar{z} \left(\frac{1-s^{1'}}{1+s^{1'}} \right)}. \quad (3.4.36)$$

Для большей наглядности рассмотрим полную проводимость параллельно включенного сопротивления

$$\bar{y}_e = \frac{1}{\bar{z}_e} = \frac{1}{\bar{z}} + 3 \left(\frac{1-s^{1'}}{1+s^{1'}} \right) \quad (3.4.36')$$

(фиг. 3.4.4).

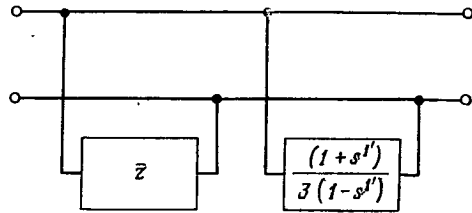
Если можно обеспечить $s^{1'} = 1$ без изменения $s^{2'}$ и s^3 , то

$$\bar{z}_e = \bar{z}, \quad (3.4.37)$$

и результирующая матрица рассеяния с учетом уравнений (3.4.31') равна

$$[S] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.4.38)$$

Заметим, что все эти соображения справедливы не только для коллинеарного параллельного Т-образного соединения, изображенного на фиг. 3.4.1, но и для любого шестиполосника,



Фиг. 3.4.4. Эквивалентная схема электрически симметричного параллельного Т-образного соединения, плечо 3 которого нагружено на сопротивление \bar{z} .

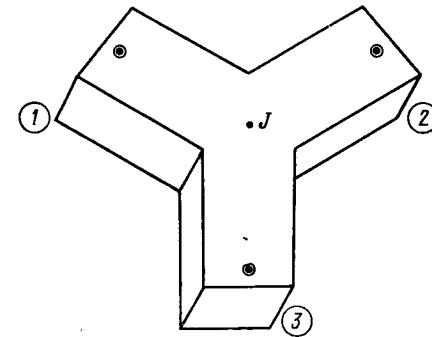
имеющего симметрию по отношению к плоскости P_1 , включая структуры на полосковых и коаксиальных линиях. Все замечания, которые сделаны для параллельного Т-образного соединения (практические примеры а—г), также справедливы для этих устройств. Если устройство имеет более высокую степень симметрии (Y-соединение в плоскости H), то появятся некоторые дополнительные свойства и упрощения, которые описаны в следующем параграфе.

Изгибы в плоскости H можно рассматривать как трехплечевые устройства с короткозамкнутым третьим плечом. Согласование гарантируется для любого угла изгиба в соответствии с уравнениями (3.4.30).

Другими применениями таких симметричных трехплечевых устройств являются делители мощности, смесители, ответвители, коаксиальные и волноводные согласующие шлейфы, ответвительные антенные переключатели и загораживающие фильтры¹⁾.

§ 3.5. СИММЕТРИЧНЫЕ Y-СОЕДИНЕНИЯ В ПЛОСКОСТИ H

Как отмечено в предыдущем параграфе, все соотношения, полученные для параллельного Т-образного соединения, могут



Фиг. 3.5.1. Y-соединение в плоскости H .

быть также применены к симметричному Y-соединению. В частности, симметрический оператор $[G]$ [соотношение (3.4.1)], примененный к устройству, изображенному на фиг. 3.5.1, дает

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \delta & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \beta \end{vmatrix} \quad (3.4.6)$$

Однако теперь может быть использована другая нетривиальная операция симметричного преобразования: поворот на 120° около оси симметрии J . Другими возможными операциями являются повороты на 240° по часовой или против часовой стрелки.

Пусть поворот осуществлен по часовой стрелке, так что поля в плече 1 поменяются с полями в плече 3, поля в плече 2 — с полями в плече 1, а поля в плече 3 — с полями в плече 2.

¹⁾ Описание и области применения некоторых из этих устройств приводятся в следующих главах; см. также [5, 6].

В соответствии с этим

$$[G]_J = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.5.1)$$

Матрица рассеяния $[S]$ должна коммутироваться с матрицей $[G]_J$, т. е.

$$[G]_J [S] = [S] [G]_J. \quad (3.5.2)$$

Раскрывая уравнение (3.5.2), получаем равенство

$$\begin{vmatrix} \gamma & \gamma & \beta \\ \alpha & \delta & \gamma \\ \delta & \alpha & \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta & \gamma & \alpha \\ \alpha & \gamma & \delta \\ \gamma & \beta & \gamma \end{vmatrix} \quad (3.5.2')$$

которое возможно, если только

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ \gamma &= \delta. \end{aligned}$$

Следовательно, матрица рассеяния симметричного Y -соединения в плоскости H имеет вид

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \gamma \\ \gamma & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma & \alpha \end{vmatrix} \quad (3.5.3)$$

Собственными значениями $[G]_J$ являются три кубических корня из единицы ($1, e^{j2\pi/3}, e^{-j2\pi/3}$), так как $[G]_J^3 = [I]$ (см. § 3.2, п. «б»).

Собственные векторы $[G]_J$ и, следовательно, собственные векторы $[S]$ могут быть найдены по этим собственным значениям или из уравнения (3.2.7). Они равны

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi/3} \\ e^{j2\pi/3} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ e^{j2\pi/3} \\ e^{-j2\pi/3} \end{vmatrix} \quad (3.5.4)$$

Заметим, что собственные векторы не являются взаимно ортогональными, так как матрица $[G]$ несимметрична. Матрица преобразования $[\mathcal{G}]$, составленная из этих собственных векторов, имеет вид

$$[\mathcal{G}] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/3} & e^{j2\pi/3} \\ 1 & e^{j2\pi/3} & e^{-j2\pi/3} \end{vmatrix}. \quad (3.5.5)$$

Матрица рассеяния может быть найдена из уравнения

$$[S] = [\mathcal{G}] [S_d] [\mathcal{G}]^{-1}, \quad (3.2.16')$$

где $[\mathcal{G}]^{-1} \neq [\mathcal{G}]$, так как $[\mathcal{G}]$ неортогональна (хотя и симметрична). Уравнение (3.2.16') приобретает вид

$$\begin{aligned} [S] &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{-j2\pi/3} & e^{j2\pi/3} \\ 1 & e^{j2\pi/3} & e^{-j2\pi/3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s^1 & 0 & 0 \\ 0 & s^2 & 0 \\ 0 & 0 & s^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{j2\pi/3} & e^{-j2\pi/3} \\ 1 & e^{-j2\pi/3} & e^{j2\pi/3} \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \gamma' \\ \gamma' & \alpha & \gamma \\ \gamma & \gamma' & \alpha \end{vmatrix} \quad (3.5.6) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} (s^1 + s^2 + s^3), \\ \gamma &= \frac{1}{3} (s^1 + s^2 e^{j2\pi/3} + s^3 e^{-j2\pi/3}), \\ \gamma' &= \frac{1}{3} (s^1 + s^2 e^{-j2\pi/3} + s^3 e^{j2\pi/3}). \end{aligned}$$

Уравнение (3.5.6) отличается от уравнения (3.5.3). Несомненно, $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \mathbf{a}^3$ из уравнений (3.5.4) являются собственными векторами как $[G]$, так и $[S]$ независимо к тому, является ли $[S]$ симметричной или несимметричной матрицей. В случае, если среда анизотропна или устройство невязимо, матрица $[S]$ несимметрична и имеет смысл уравнение (3.5.6). Если матрица $[S]$ симметрична, то в соответствии с § 3.2, п. «ж», она должна иметь ортогональные собственные векторы при условии, что не имеет вырожденных собственных значений. Действительно, чтобы получить γ , равное γ' , нужно в уравнении (3.5.6) положить

$$s^2 = s^3. \quad (3.5.7)$$

Для симметричного взаимного Y -соединения

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{3} (s^1 + 2s^2), \\ \gamma &= \frac{1}{3} (s^1 - s^2). \end{aligned} \quad (3.5.6')$$

Собственные векторы \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 , записанные в виде выражений (3.5.4), будут собственными векторами взаимного устройства, но они в соответствии с § 3.2, п. «д», не являются больше единственными. В частности, собственные векторы вида (3.4.32) также являются собственными векторами Y -соединения.

Практические примеры

а. **Одновременное согласование всех плеч**¹⁾. Невозможно согласовать все три плеча одновременно, так как для выполнения этой задачи необходимо, чтобы $s^1 = 2s^2$. В то же время для симметричного Y-соединения $|s^1| = |s^2| = 1$.

б. **Согласование одного плеча**. Всегда можно согласовать одно из плеч (см. приложение V), но при этом нарушается аксиальная симметрия устройства, и устройство уже ничем не отличается от T-образного соединения, описанного в предыдущем параграфе.

в. **К плечу 3 подключено сопротивление z**. В этом случае может быть использована «редуцированная» матрица, приведенная в § 3.4, п. «г»,

$$[S]_R = \begin{vmatrix} \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) & \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) \\ \left(\gamma + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) & \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \Gamma_3 \alpha} \right) \end{vmatrix} \quad (3.4.35)$$

Справедливы и другие соотношения, полученные в § 3.4, п. «г». Так, чтобы $\bar{z}_e = \bar{z}$ (фиг. 3.4.4), необходимо снова положить $s^1 = 1$. Но независимо от того, выполняется это условие или нет, всегда можно включить между плечами 1 и 2 параллельно линии реактивное сопротивление любой величины, если ввести в плечо 3 подвижной короткозамыкающий поршень.

Преимущество использования симметричного Y-соединения как однополюсного двухпозиционного механического переключателя состоит в том, что при одном и том же положении короткозамыкающего поршня в плече 3, при котором обеспечивается согласование между плечами 1 и 2, обеспечивается и согласование между плечами 1 и 3, если короткозамыкающий поршень размещен в плече 2.

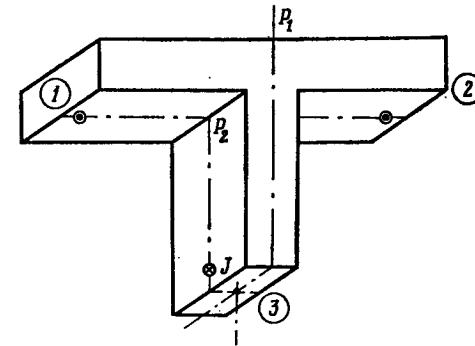
Соотношения, полученные выше, могут быть использованы как в случае прямоугольных, так и в случае круглых волноводов, полосковых линий и коаксиальных устройств.

§ 3.6. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ Т- И Y-ОБРАЗНЫЕ СОЕДИНЕНИЯ (ТРОЙНИКИ В ПЛОСКОСТИ E)

Изучение свойств последовательного T-образного соединения или тройника в плоскости E, изображенного на фиг. 3.6.1, во многом аналогично изучению свойств параллельного T-образного

¹⁾ В приложении VIII показано, что можно согласовать все три плеча одновременно, если Y-соединение содержит намагниченный феррит; в результате получается трехплечевой циркулятор.

соединения, описанного в § 3.4. В данном случае также возможны три операции симметричного преобразования. Интерес представляет лишь одна операция, поскольку вторая излишняя, а третья тривиальна.



Фиг. 3.6.1. Тройник в плоскости E.

Наиболее важным является симметрический оператор $[G]_1$, описывающий операцию симметричного преобразования относительно плоскости симметрии P_1 . Матрица такого симметрического оператора имеет вид

$$[G]_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.6.1)$$

Отметим, что знак минус в элементе (3,3) меняет знак электрического поля в плече 3 при отражении относительно плоскости P_1 .

Поскольку матрица $[G]_1$ ортогональна и симметрична,

$$[S] = [G] [S] [G], \quad (3.6.2)$$

или

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} \\ s_{13} & s_{23} & s_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} s_{22} & s_{12} & -s_{23} \\ s_{12} & s_{11} & -s_{13} \\ -s_{23} & -s_{13} & s_{33} \end{vmatrix}.$$

Из этого выражения очевидно, что

$$\begin{aligned} s_{11} = s_{22} &= \alpha, \\ s_{13} = -s_{23} &= \gamma, \\ s_{33} &= \beta, \\ s_{12} &= \delta, \end{aligned}$$

так что матрица рассеяния представляется в виде

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \delta & \alpha & -\gamma \\ \gamma & -\gamma & \beta \end{vmatrix} \quad (3.6.3)$$

Коэффициент передачи из плеча 3 в плечо 2 теперь равен коэффициенту передачи из плеча 3 в плечо 1 с обратным знаком.

Если устройство без потерь, то из свойства унитарности матрицы [S] следует, что

$$\text{элемент (1,1)} \quad [S][S]^* = |\alpha|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad (3.6.4a)$$

$$\text{элемент (3,3)} \quad [S][S]^* = |\beta|^2 + 2|\gamma|^2 = 1, \quad (3.6.4б)$$

$$\text{элемент (2,1)} \quad [S][S]^* = \alpha^*\delta + \alpha\delta^* - |\gamma|^2 = 0, \quad (3.6.4в)$$

$$\text{элемент (3,1)} \quad [S][S]^* = \alpha^*\gamma - \gamma\delta^* + \beta\gamma^* = 0. \quad (3.6.4г)$$

Собственные значения [G]₁ равны +1 и -1. Так как след матрицы [G] равен теперь -1, то -1 является двойным корнем.

Собственный вектор \mathbf{a}^3 , соответствующий невырожденному собственному значению +1, может быть вычислен из уравнения (3.2.7)

$$\frac{a_1^3}{\det \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-a_2^3}{\det \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-a_3^3}{\det \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}},$$

т. е.

$$\mathbf{a}^3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.6.5)$$

если величина \mathbf{a}^3 равна единице.

Собственные векторы \mathbf{a}^1 и \mathbf{a}^2 снова не имеют единственного решения, но их можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли матрице [S] (т. е. \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 должны быть взаимно ортогональны,

если [S] симметрична)

$$\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^3 = 0 = a_1^1 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_2^1 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \rightarrow \frac{a_1^1}{a_2^1} = -1,$$

$$\mathbf{a}^2 \mathbf{a}^3 = 0 = a_1^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + a_2^2 \frac{\sqrt{2}}{2} + 0 \rightarrow \frac{a_1^2}{a_2^2} = -1,$$

$$\mathbf{a}^1 \mathbf{a}^2 = 0 = a_1^1 a_1^2 + a_2^1 a_2^2 + a_3^1 a_3^2,$$

откуда

$$\mathbf{a}^1 \sim \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2}x \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 \sim \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{x} \end{vmatrix} \quad (3.6.5')$$

где величина x является пока неопределенной и зависит от выбора плоскости отсчета в плече 3 при симметрично расположенных плоскостях отсчета в плечах 1 и 2.

Матрица преобразования определяется соотношением

$$[G] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2}x & \frac{\sqrt{2}}{x} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.6.6)$$

Матрица [S] может быть определена через свои собственные значения при использовании уравнения

$$[S] = [G][S_a][G]^{-1}, \quad (3.2.16')$$

где

$$[G]^{-1} = \frac{1}{\left(x + \frac{1}{x}\right)} \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & -\frac{1}{x} & \sqrt{2} \\ -x & x & \sqrt{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) & 0 \end{vmatrix}$$

В результате получается то же выражение матрицы [S], что и ранее полученное из свойства коммутативности матриц [S] и [G]

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \delta & \gamma \\ \delta & \alpha & -\gamma \\ \gamma & -\gamma & \beta \end{vmatrix} \quad (3.6.3)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left[\frac{1}{x} s^1 + x s^2 \right] + \frac{1}{2} s^3, \\ \beta &= \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left[2x s^1 + \frac{2}{x} s^2 \right], \\ \gamma &= \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left[\sqrt{2} s^1 - \sqrt{2} s^2 \right], \\ \delta &= \frac{1}{2\left(x+\frac{1}{x}\right)} \left[-\frac{s^1}{x} - s^2 x \right] + \frac{1}{2} s^3.\end{aligned}\quad (3.6.7)$$

Как отмечалось в § 3.4, удобно выбрать плоскость отсчета в плече 3 так, чтобы

$$\beta + \sqrt{2} \gamma = 1. \quad (3.6.8)$$

Это условие всегда можно получить, меняя фазы между β и γ , так как

$$|\beta|^2 + 2|\gamma|^2 = 1. \quad (3.6.4в)$$

Уравнение (3.6.8) выполняется, если

$$\begin{aligned}s^1 &= 1, \\ x &= 1.\end{aligned}\quad (3.6.9)$$

Для такого частного случая выбора плоскостей отсчета уравнения (3.6.7) запишутся в виде

$$\alpha = \frac{1}{4} (1 + s^2 + 2s^3), \quad (3.6.7'а)$$

$$\beta = \frac{1}{2} (1 + s^2), \quad (3.6.7'б)$$

$$\gamma = \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - s^2), \quad (3.6.7'в)$$

$$\delta = \frac{1}{4} (2s^3 - s^2 - 1) \quad (3.6.7'г)$$

вместе с уравнениями

$$2\alpha + \beta = 1 + s^2 + s^3, \quad (3.6.10)$$

$$\beta + \sqrt{2} \gamma = 1, \quad (3.6.8)$$

$$\alpha - \delta = \beta. \quad (3.6.11)$$

Практические примеры

а. Одновременное согласование плеч 1 и 2. Плечи 1 и 2 были бы одновременно согласованы, если $\alpha = 0$. Тогда из уравнения (3.6.7'а) следует

$$1 + s^2 + 2s^3 = 0. \quad (3.6.12)$$

Но так как $|s^2| = 1$ и $|s^3| = 1$, то уравнение (3.6.12) может выполняться, только если

$$s^2 = 1, \quad s^3 = -1$$

или если

$$\beta = 1, \quad \gamma = 0, \quad \delta = -1.$$

Одновременное согласование плеч 1 и 2 возможно только в случае, если плечо 3 полностью развязано от плеч 1 и 2. Следовательно, плечо 3 должно содержать в определенном месте металлическую стенку или заградительный волновод с согласующим устройством.

Если в случае симметричного устройства мощность отражается в плечо 3, то плечи 1 и 2 перестают быть взаимно согласованными; если же устройство не симметрично и плечо 1 или 2 согласовано, то согласование также нарушается.

б. Согласование плеча 3. Всегда можно согласовать плечо 3, т. е. сделать $\beta = 0$. Для этого нужно в уравнении (3.6.7'б) положить $s^2 = -1$, и тогда

$$\begin{aligned}\alpha &= s^3/2, \\ \beta &= 0, \\ \gamma &= \sqrt{2}/2, \\ \delta &= s^3/2.\end{aligned}\quad (3.6.13)$$

Если $s^3 = e^{j2\theta_3}$, то плоскости отсчета в плечах 1 и 2 нужно одновременно передвинуть на электрический угол $-\theta_3$, а плоскость отсчета в плече 3 — на угол $+\theta_3$. В результате получается следующий вид матрицы рассеяния:

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.6.14)$$

Теперь устройство обеспечивает трехдецибелное деление мощности из плеча 3, причем волны в симметричных плечах 1 и 2

будут отличаться по фазе на 180° . Заметим, что если мощность подводится к плечу 1, то:

$1/4$ часть мощности отражается обратно в плечо 1,
 $1/4$ » » передается в плечо 2,
 $1/2$ » » » » » 3.

Однако если

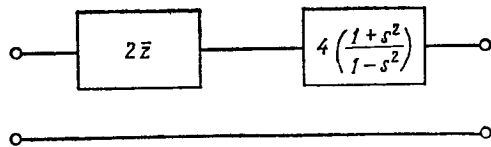
$$\mathbf{a} = \begin{vmatrix} a_1 \\ -a_1 \\ 0 \end{vmatrix}$$

т. е. если в плоскостях отсчета в плечах 1 и 2 сигналы равны по амплитуде и противоположны по фазе, то отраженная волна равна

$$\mathbf{b} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2}a_1 \end{vmatrix}$$

т. е. вся мощность выходит из плеча 3.

в. Последовательное Т-образное соединение как трансформатор сопротивлений. Рассмотрим случай, когда нормированное сопротивление \bar{z} подключено в плоскости отсчета плеча 3. Эта плоскость



Ф и г. 3.6.2. Эквивалентная схема последовательного Т-образного соединения, плечо 3 которого нагружено на сопротивление \bar{z} , в случае когда $s^1 = s^2 = 1$.

отсчета выбрана в соответствии с условием (3.6.8). Плечо 2 согласовано на конце, как и в § 3.4, п. «в». Можно получить «редуцированную» матрицу рассеяния

$$[S]_R = \begin{vmatrix} \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \beta \Gamma_3} \right) \left(\delta - \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \beta \Gamma_3} \right) \\ \left(\alpha - \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \beta \Gamma_3} \right) \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \beta \Gamma_3} \right) \end{vmatrix} \quad (3.6.15)$$

где $\Gamma_3 = \frac{\bar{z} - 1}{\bar{z} + 1}$.

Применим положения, изложенные в § 3.3 для случая симметричного четырехполюсника, к последовательному Т-образному

соединению, в плечо 3 которого подключена нагрузка с коэффициентом отражения Γ_3 . Так, из уравнений (3.6.15) и (3.6.7') имеем

$$s_{11} + s_{12} = \alpha + \delta = s^3. \quad (3.6.16)$$

В плоскостях в плечах 1 и 2, в которых $s^3 = 1$, или в плоскости симметрии¹⁾ (s^3 является собственным значением четного собственного вектора и по существу есть то же самое, что и s^1 , рассмотренное в § 3.3) эквивалентной схемой устройства является последовательно включенное сопротивление, проводимость которого равна \bar{y}_e (см. приложение III):

$$\bar{y}_e = \frac{1}{2} \frac{s_{12}}{s_{11}}, \quad (III.17)$$

где теперь

$$\begin{aligned} s_{11} &= \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \beta \Gamma_3} \right), \\ s_{12} &= \left(\delta - \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \beta \Gamma_3} \right). \end{aligned} \quad (3.6.17)$$

Воспользовавшись уравнениями (3.6.7'), запишем

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4} (3 + s^2), \\ \beta &= \frac{1}{2} (1 + s^2), \\ \gamma &= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 - s^2), \\ \delta &= \frac{1}{4} (1 - s^2), \quad |s^2| = 1 \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

при условии, что $s^3 = 1$ и что по-прежнему $s^1 = 1$ (условие, которое существовало бы, если бы Т-образное соединение не имело неоднородностей).

После подстановки значений s_{11} и s_{12} в уравнение (III.17) с учетом уравнения (3.6.18) получаем

$$\bar{z}_e = \frac{1}{y_e} = 2\bar{z} + 4 \left(\frac{1 + s^2}{1 - s^2} \right). \quad (3.6.19)$$

¹⁾ Если нет электрической стенки, то эти плоскости совпадают в плоскости симметрии. В противоположность случаю параллельного Т-образного соединения введение согласующих элементов в плоскости симметрии приводит к изменению s^3 . Поэтому на практике труднее согласовать последовательные Т-образные соединения и работать с ними. Если можно было бы ввести магнитные стенки или штыри в плоскости симметрии, то с последовательными Т-образными соединениями было бы так же легко работать, как и с параллельными.

Даже при $s^3 = 1$ в плоскости симметрии расхождение до следующего максимума в волноводах 1 и 2 несколько меньше, чем $\lambda_B/2$.

Заметим, что в случае соединения без потерь отношение $(1+s^2)/(1-s^2)$ всегда мнимое, так что \bar{z}_e мнимое, если \bar{z} мнимое. Это было бы верно, даже если бы s^1 не было равно 1 [ср. с уравнением (3.4.30)]. В частности, если \bar{z} есть входное сопротивление короткозамкнутого отрезка волновода, то всегда можно найти такое положение короткозамыкающего поршня, что \bar{z}_e будет иметь любое наперед заданное значение, включая 0 и $\pm \infty$ ¹⁾. Следовательно, любое последовательное T-образное соединение будет работать как согласующее устройство. Однако если s^2 не известно, то нельзя предсказать зависимость \bar{z}_e от \bar{z} . Значение s^2 можно легко определить, измерив величины α или β .

С другой стороны, если плечо 3 согласовано, то

$$\bar{z}_e = 2\bar{z}. \quad (3.6.20)$$

Таким образом, в этом случае можно пренебречь действием неоднородности и считать, что характеристическое сопротивление плеча 3 в два раза больше характеристического сопротивления двух других плеч.

г. **Случай полной электрической симметрии.** Потребуем, чтобы

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta, \\ \gamma &= \delta. \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

Возникает ситуация, аналогичная рассмотренной в § 3.4, п. «г», а именно нужно выбрать другое значение x .

Для $x = \sqrt{2}$ собственные векторы приобретают вид

$$\mathbf{a}^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^3 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.6.22)$$

Для того чтобы выполнялись условия (3.6.21), необходимо

$$s^1 = s^3 \quad (3.6.23)$$

и, в частности, в плоскости симметрии

$$s^1 = s^3 = 1. \quad (3.6.23')$$

Выполнить это условие значительно сложнее, чем в случае параллельного T-образного соединения (см. сноску на стр. 131).

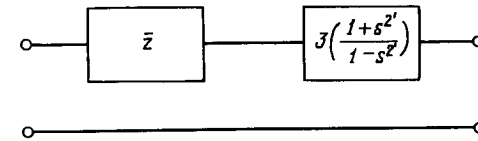
¹⁾ Нет необходимости рассматривать случай, когда подвижной короткозамыкающий поршень находится в плече 2. Экспериментальные данные по этому вопросу содержатся в [5].

Однако когда это условие выполнено, то из уравнений (3.6.7) получим

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \frac{1}{3}(2+s^2), \\ \gamma &= \delta = \frac{1}{3}(1-s^2). \end{aligned} \quad (3.6.24)$$

Симметричное Y-соединение будет автоматически удовлетворять этому условию.

Для такого последовательного Y-соединения или для полностью электрически симметричного T-образного соединения с пле-



Фиг. 3.6.3. Эквивалентная схема электрически симметричного последовательного T-образного соединения, плечо 3 которого нагружено сопротивлением \bar{z} .

чом 3, оканчивающимся на нагрузку с коэффициентом отражения Γ_3 , можно получить новую «редуцированную» матрицу

$$[S]_R = \begin{vmatrix} \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \alpha \Gamma_3} \right) & \left(\gamma - \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \alpha \Gamma_3} \right) \\ \left(\gamma - \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \alpha \Gamma_3} \right) & \left(\alpha + \frac{\gamma^2 \Gamma_3}{1 - \alpha \Gamma_3} \right) \end{vmatrix} \quad (3.6.25)$$

Эквивалентное сопротивление \bar{z}_e , включенное последовательно с линией (фиг. 3.6.3), вычисляется из уравнения (III.17)

$$\bar{z}_e = \bar{z} + 3 \left(\frac{1+s^2}{1-s^2} \right). \quad (3.6.26)$$

Если можно сделать $s^2 = -1$ без изменения s^1 и s^3 , то

$$\bar{z}_e = \bar{z}, \quad (3.6.27)$$

и результирующая матрица рассеяния приобретает вид

$$[S] = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.6.28)$$

Заметим, что все соотношения и выводы, полученные выше, могут быть применены не только к коллинеарному последовательному T-образному соединению, изображенному на фиг. 3.6.1. Они справедливы и для любого шестиполюсника, имеющего такой же харак-

тер антисимметрии электрических полей относительно плоскости P_1 . Эти соотношения нельзя применить к коаксиальным и полосковым шестиполосникам, в которых в случае волны типа ТЕМ поля симметричны относительно плоскости P_1 : волна, подведенная к плечу 3, будет иметь после разделения одинаковые фазы в плоскостях симметрии в плечах 1 и 2¹⁾.

Изгиб в плоскости E можно рассматривать как шестиполосник с короткозамкнутым плечом 3. В этом случае условие согласования гарантируется для любого угла изгиба.

Другие применения волноводного варианта таких устройств аналогичны применениям параллельных устройств, однако использование полосковых и коаксиальных линий в качестве последовательных устройств исключается. Параллельные и последовательные Т-образные соединения часто объединяются в устройства, аналогичные изображенному на фиг. 2.5.1, чтобы получить $E-H$ согласующее устройство.

Если последовательное устройство имеет высокую степень симметрии (Y -соединения в плоскости E), то из уравнения (3.6.24) получаются некоторые дополнительные свойства и упрощения.

Матрица рассеяния приобретает вид

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \pm\gamma & \pm\gamma \\ \pm\gamma & \alpha & -\gamma \\ \pm\gamma & -\gamma & \alpha \end{vmatrix} \quad (3.6.29)$$

причем знак «+» соответствует случаю, когда плечи 1 и 2 симметричны по отношению к плоскости P_1 , и знак «-» соответствует случаю, когда плечи 1 и 2 (и 3) симметричны по отношению к оси симметрии J .

Все соотношения для тройника в плоскости E с некоторыми изменениями можно применить к Y -соединению в плоскости E : а) α не может быть равным нулю; б) любое плечо может быть согласовано в соответствии с практическим примером «б»; в) если два плеча согласованы одновременно, то третье плечо развязано; г) подвижной короткозамыкающий поршень может быть помещен в любое плечо, и образовавшийся четырехполосник может быть описан «редуцированной» матрицей рассеяния. Положение короткозамыкающего поршня можно выбрать так, что два других плеча будут развязаны, или так, что плечи будут согласованы. Вследствие симметрии устройства то же самое может быть сделано для любой

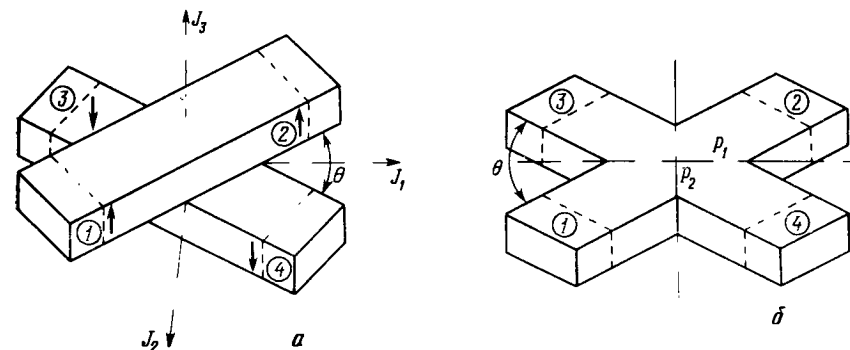
¹⁾ В последовательном коаксиальном Т-образном соединении центральный проводник последовательного плеча должен переходить в наружный проводник параллельных плеч, и наоборот. В принципе это можно сделать, однако практически трудно осуществимо. В случае двухпроводной линии последовательное соединение легко осуществимо, но такая линия имеет ограниченное применение в диапазоне СВЧ.

другой пары плеч; д) при дальнейшей регулировке короткозамыкающего поршня ($s^2 = -1$) сопротивление \bar{z} в плоскости отсчета одного из плеч эффективно включено последовательно в линию, образованную двумя другими плечами.

Последовательное соединение непригодно для создания ферритового циркулятора. Соотношения приложения VIII действительны только в случае, когда электрическое и магнитное поля можно взаимно переставить; но циркулятор может быть создан, только если в соединении использован электрический аналог феррита.

§ 3.7. СИММЕТРИЧНЫЕ ВОСЬМИПОЛЮСНИКИ: НАПРАВЛЕННЫЕ ОТВЕТВИТЕЛИ [4]

Симметричный восьмиполосник, изображенный на фиг. 3.7.1, а, применяется в однодырочных ответвителях Беге и других направленных ответвителях, использующих связь по широкой стенке



Ф и г. 3.7.1. Симметричные восьмиполосники.

прямоугольного волновода при различной величине угла θ (от 0 до 90°), включая многодырочные ответвители. Примерами устройства, изображенного на фиг. 3.7.1, б, являются мост Риблета с короткой щелью и многодырочные ответвители со связью по узкой стенке волновода при $\theta = 0$ (см. § 4.3).

Если отверстие (или отверстие) связи симметрично по отношению к плоскостям или осям симметрии и плоскости отсчета выбраны также симметрично, то имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S_{11} &= S_{22} = S_{33} = S_{44} = \alpha, \\ S_{12} &= S_{21} = S_{34} = S_{43} = \beta, \\ S_{13} &= S_{31} = S_{24} = S_{42} = \gamma, \\ S_{14} &= S_{41} = S_{23} = S_{32} = \delta, \end{aligned}$$

так что

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \beta & \alpha & \delta & \gamma \\ \gamma & \delta & \alpha & \beta \\ \delta & \gamma & \beta & \alpha \end{vmatrix} \quad (3.7.1)$$

Если устройство без потерь, то из свойства унитарности матрицы $[S]$ [см. уравнение (2.2.15)] следует, что

$$\text{элемент (1,1)} \quad [S][S]^* = |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad (3.7.2a)$$

$$\text{элемент (1,2)} \quad [S][S]^* = \alpha\beta^* + \beta\alpha^* + \gamma\delta^* + \delta\gamma^* = 0, \quad (3.7.2b)$$

$$\text{элемент (1,3)} \quad [S][S]^* = \alpha\gamma^* + \beta\delta^* + \gamma\alpha^* + \delta\beta^* = 0, \quad (3.7.2v)$$

$$\text{элемент (1,4)} \quad [S][S]^* = \alpha\delta^* + \beta\gamma^* + \gamma\beta^* + \delta\alpha^* = 0. \quad (3.7.2r)$$

Положим $\alpha = 0$. Это возможно для устройств определенной конфигурации, о чем сказано ниже. В этом случае из уравнений (3.7.2) имеем

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1, \quad (3.7.2a')$$

$$\gamma\delta^* + \delta\gamma^* = 0, \quad (3.7.2b')$$

$$\beta\delta^* + \delta\beta^* = 0, \quad (3.7.2v')$$

$$\beta\gamma^* + \gamma\beta^* = 0. \quad (3.7.2r')$$

Если $\beta \neq 0$, то из уравнения (3.7.2v') следует

$$\delta = -\frac{\beta\delta^*}{\beta^*}. \quad (3.7.2v'')$$

Это значение δ можно подставить в уравнение (3.7.2b')

$$\gamma\delta^* - \frac{\beta\delta^*}{\beta^*}\gamma^* = 0,$$

или

$$\beta^*\gamma - \beta\gamma^* = 0, \quad (3.7.3)$$

если

$$\delta^* \neq 0.$$

Из сравнения уравнений (3.7.3) и (3.7.2r') видно, что

$$\gamma = 0^1).$$

Аналогичным образом можно показать, что если $\alpha = 0$, то либо β , либо δ , либо γ должны быть равны 0, и, наоборот, если β , или δ ,

¹⁾ Если угол θ на фиг. 3.7.1 равен 90° , то $\gamma = \delta$, т. е. связь в этом случае аксиально симметрична, и $\gamma = \delta = 0$ при выполнении условия $\alpha = 0$. В последнем случае невозможна никакая связь, кроме «прямой».

или γ равны 0, то и $\alpha = 0$. Если $\alpha = 0$, то устройство является направленным ответвителем, и наоборот, если один выход устройства развязан, то $\alpha = 0$.

Чтобы это показать, положим $\alpha = 0$ и снова $\gamma = 0$. Матрица рассеяния «идеального» направленного ответвителя

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & \beta & 0 & \delta \\ \beta & 0 & \delta & 0 \\ 0 & \delta & 0 & \beta \\ \delta & 0 & \beta & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.4)$$

Переходное ослабление S определяется соотношением

$$S = -20 \lg |\delta|, \text{ дб.} \quad (3.7.5)$$

Мерой «идеальности» ответвителя является направленность D , определяемая соотношением

$$D = 20 \lg \left| \frac{\delta}{\gamma} \right|, \text{ дб,} \quad (3.7.6)$$

где γ — элемент матрицы $[S]$ из выражения (3.7.1).

Определение собственных векторов устройств с несколькими осями и плоскостями симметрии (см. фиг. 3.7.1) затруднено, так как каждый симметрический оператор имеет вырожденные собственные значения. Каждый оператор является оператором четвертого порядка, и, следовательно, имеет четыре корня. Только две операции симметричного преобразования приводят устройство обратно к своему первоначальному положению, и, следовательно, имеется только два различных корня. Однако собственные векторы устройств, изображенных на фиг. 3.7.1, a и b , представляют интерес, так как знание их позволит доказать, что при $\theta = 0$ β и δ из уравнения (3.7.4) всегда находятся в квадратуре, а между направленностью и входным рассогласованием имеется простая связь, так как $\gamma = \alpha$.

Даже беглое исследование характера собственных векторов устройств, изображенных на фиг. 3.7.1, показывает, что каждый волновод, рассмотренный отдельно или как произвольная пара плеч, является симметричным четырехполюсником с собственными векторами

$$a^1 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad a^2 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix} \quad (3.3.3)$$

Эти коэффициенты обязательно должны появиться в матрице преобразования $[S]$.

Симметрический оператор $[G]$, соответствующий преобразованию относительно оси симметрии J_1 на фиг. 3.7.1, *a* или симметричной плоскости P_1 на фиг. 3.7.1, *б*, записывается так

$$[G]_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.7)$$

Оператор $[G]_2$, соответствующий преобразованию относительно оси J_2 на фиг. 3.7.1, *a* или относительно плоскости P_2 на фиг. 3.7.1, *б*, представляется в виде

$$[G]_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.8)$$

Так как $[G]_1^2 = [I]$ и $[G]_2^2 = [I]$, то собственные значения этих матриц есть $+1$ и -1 . Вследствие того что $[G]_1$ и $[G]_2$ имеют четвертый порядок и их след равен нулю, каждое характеристическое уравнение, соответствующее матрицам $[G]$, имеет два корня -1 и два корня $+1$. Прямое определение собственных векторов, общих с собственными векторами матрицы $[S]$, невозможно. Однако можно составить матрицу как линейную комбинацию матриц $[G]_1$ и $[G]_2$, которая будет обладать свойством коммутативности с матрицей $[S]$. Действительно, так как

$$\begin{aligned} c[S][G]_1 &= c[G]_1[S], \\ d[S][G]_2 &= d[G]_2[S], \end{aligned}$$

то

$$[S](c[G]_1 + d[G]_2) = (c[G]_1 + d[G]_2)[S],$$

где c и d — произвольные коэффициенты. Матрицы $[M] = (c[G]_1 + d[G]_2)$ и $[S]$ имеют одни и те же собственные векторы, если только $[M]$ имеет невырожденные собственные значения. Постоянные c и d могут быть выбраны так, что $[M]$ будет иметь невырожденные собственные значения. Для этого нужно, чтобы $[M]^4 = [I]$, так как собственные значения теперь будут равны $+1$, j , -1 и $-j$. Матрица $[M]$ принимает тогда форму

$$[M] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & c & d \\ 0 & 0 & d & c \\ c & d & 0 & 0 \\ d & c & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.9)$$

и

$$[M]^4 = \begin{vmatrix} (a^2 + b^2) & 2ab & 0 & 0 \\ 2ab & (a^2 + b^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a^2 + b^2) & 2ab \\ 0 & 0 & 2ab & (a^2 + b^2) \end{vmatrix} \quad (3.7.10)$$

где

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (c^2 + d^2)^2 + (2cd)^2 = 1, \\ 2ab &= (c^2 + d^2)(2cd) = 0. \end{aligned} \quad (3.7.10')$$

Условия (3.7.10') могут быть выполнены, если

$$\begin{aligned} c &= \frac{1}{2}(1 + j), \\ d &= \frac{1}{2}(1 - j). \end{aligned} \quad (3.7.10'')$$

Собственные векторы матрицы $[M]$, которые являются также собственными векторами матрицы $[S]$, можно получить, если провести вычисления, как это указано в § 3.2, п. «в». Из этих собственных векторов может быть образована матрица преобразования

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.7.11)$$

Матрица рассеяния определяется из соотношения

$$[S] = [S][S_d][S]^{-1}$$

или

$$[S] = [S][S_d][S], \quad (3.2.16')$$

так как матрица $[S]$ ортогональна и симметрична.

Матрица $[S]$ будет иметь такой же вид, как и выражение (3.7.1), а ее элементы будут определяться соотношениями

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4}(s^1 + s^2 + s^3 + s^4), \\ \beta &= \frac{1}{4}(s^1 - s^2 + s^3 - s^4), \\ \gamma &= \frac{1}{4}(s^1 + s^2 - s^3 - s^4), \\ \delta &= \frac{1}{4}(s^1 - s^2 - s^3 + s^4). \end{aligned} \quad (3.7.12)$$

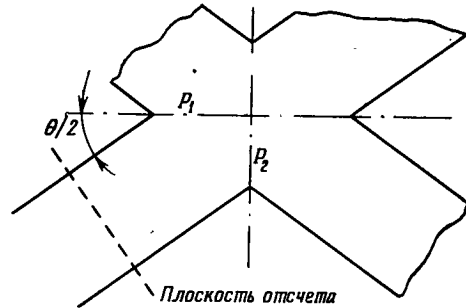
Заметим, что если $\alpha = 0$, собственные значения будут попарно сокращаться, так как их модули равны 1. Например, если

$$\begin{aligned} s^1 &= -s^2, \\ s^3 &= -s^4, \end{aligned}$$

то $\gamma = 0$.

Рассмотрим симметричную часть устройства, изображенного на фиг. 3.7.1, б, ограниченную плоскостью отсчета, стенками волновода и плоскостями симметрии P_1 и P_2 . Эта часть восьми-полосника изображена на фиг. 3.7.2.

В результате умножения $[G]_1$ на $a^1 = 1/2(1, 1, 1, 1)$ получается $1/2(1, 1, 1, 1)$, т. е. собственное значение $[G]_1$, соответствующее



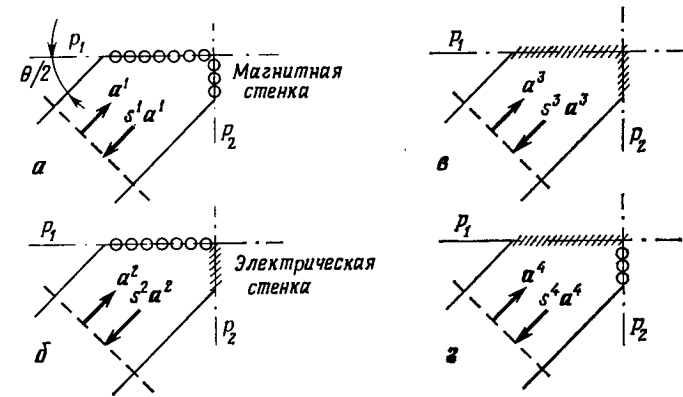
Фиг. 3.7.2. «Часть» восьмиполосника (вид сверху восьми-полосника, изображенного на фиг. 3.7.1, б).

a^1 , равно $+1$. Это говорит о том, что распределение поля, соответствующее вектору a^1 , не изменится, если в плоскости P_1 будет магнитная стенка. Точно так же собственным значением $[G]_2$, соответствующим a^1 , является $+1$, т. е. плоскость P_2 действует как магнитная стенка по отношению к полям, соответствующим a^1 . Выделенная «часть» фиг. 3.7.2 изображает граничные условия для вектора a^1 в любом плече многополосника, если плоскости P_1 и P_2 при этом служат магнитными стенками. На фиг. 3.7.3, а изображен «абстрактный» двухполосник, соответствующий любому плечу восьмиполосника для случая, когда распределение полей соответствует вектору a^1 .

Собственное значение $[G]_1$, соответствующее вектору a^2 , по-прежнему равно $+1$, т. е. в плоскости P_1 можно поместить магнитную стенку. Однако собственное значение $[G]_2$, соответствующее a^2 , равно -1 , т. е. в плоскости P_2 следует поместить электрическую стенку. В случае распределения поля, соответствующего a^3 , как в плоскости P_1 , так и в плоскости P_2 нужно поместить электрическую стенку. В случае поля, соответствующего a^4 ,

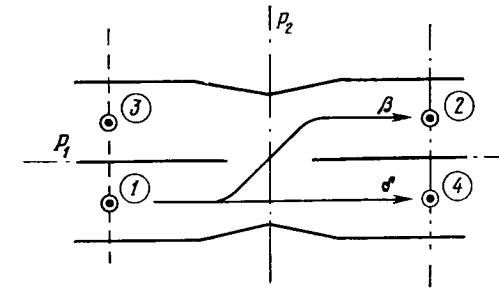
в плоскости P_1 следует поместить электрическую стенку, а в плоскости P_2 — магнитную. Эти четыре случая показаны на фиг. 3.7.3.

В общем случае нельзя определить собственное значение s^i , так как граничные условия очень сложны. Они определяются



Фиг. 3.7.3. Граничные условия для собственных векторов в любом плече.

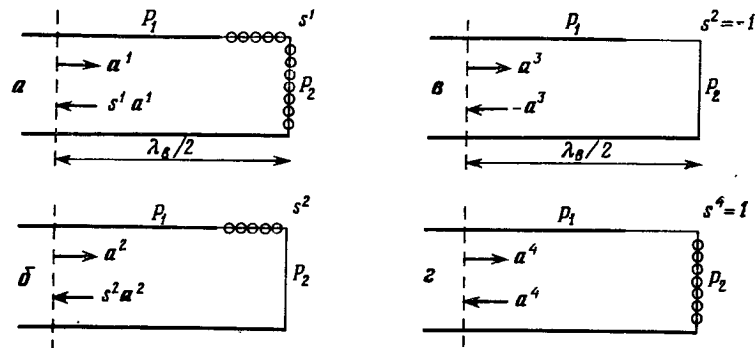
сложной комбинацией из электрических и магнитных стенок. Однако при $\theta = 0$ (связь по боковой стенке волновода) плоскость P_1 совпадает с волноводной стенкой, как это показано на фиг. 3.7.4.



Фиг. 3.7.4. Идеальный ответвитель со связью по узкой стенке волновода.

«Абстрактные» двухполосники, эквивалентные фиг. 3.7.3, представлены теперь на фиг. 3.7.5. По-прежнему нельзя определить собственные значения s^1 и s^2 , но очевидно, что в плоскости P_2 (электрическая стенка) $s^3 = -1$ и в плоскости P_1 (магнитная стенка) $s^4 = +1$. Отметим, что как a^3 , так и a^4 соответствуют

антисимметричные относительно плоскости P_1 поля; при этом тонкая неоднородность, помещенная в плоскости P_1 , не возмущает эти поля (см. § 3.3).



Ф и г. 3.7.5. Граничные условия для собственных векторов в любом плече (ответвитель со связью по узкой стенке).

В случае $s^3 = -1$ и $s^4 = 1$ соотношения (3.7.12) значительно упрощаются

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4}(s^1 + s^2), \\ \beta &= \frac{1}{4}(s^1 - s^2 - 2), \\ \gamma &= \frac{1}{4}(s^1 + s^2), \\ \delta &= \frac{1}{4}(s^1 - s^2 + 2), \end{aligned} \quad (3.7.12')$$

откуда очевидно, что

$$\alpha = \gamma; \quad (3.7.13)$$

иными словами, между входным рассогласованием и направленностью существует простая связь. Из уравнений (3.7.12') можно получить следующее соотношение между δ и β :

$$\delta - \beta = 1. \quad (3.7.14)$$

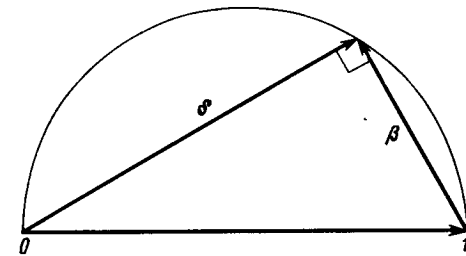
В частности, если $\alpha = 0$ (и $\gamma = 0$, т. е. направленный ответвитель идеальный), уравнение (3.7.2а') принимает вид

$$|\beta|^2 + |\delta|^2 = 1. \quad (3.7.2а'')$$

Уравнения (3.7.14) и (3.7.2а'') будут одновременно выполнены, если β и δ отличаются по фазе на 90° , причем β опережает δ ,

таким образом, ответвленная волна опережает «прямую» волну. Соответствующая векторная диаграмма показана на фиг. 3.7.6.

Из амплитудных и фазовых соотношений между β и δ можно определить матрицу рассеяния изображенного на фиг. 3.7.4 идеального направленного ответвителя со связью по узкой стенке волно-



Ф и г. 3.7.6. Фазовые и амплитудные соотношения между δ и β (идеальный ответвитель со связью по узкой стенке).

вода. Если плоскости отсчета выбраны так, что $k = \beta$ и k и β реальны и положительны, то матрица рассеяния представляется в виде

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & jk & 0 & \sqrt{1-k^2} \\ jk & 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 \\ 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 & jk \\ \sqrt{1-k^2} & 0 & jk & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.15)$$

В случае идеального направленного ответвителя со связью по узкой стенке волновода из уравнений (3.7.12') получается $\alpha = \gamma = 0$, если

$$s^1 = -s^2.$$

С другой стороны, фаза s^1 (и s^2) будет определяться величинами δ и γ .

Когда размер отверстия связи стремится к нулю, то из фиг. 3.7.5, а и б видно, что

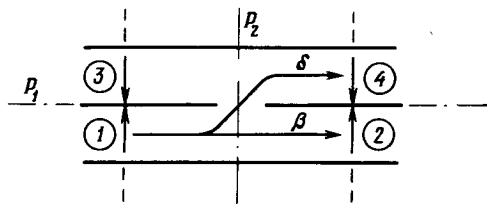
$$\begin{cases} s^1 = 1, \\ s^2 = -1. \end{cases}$$

Тогда из уравнений (3.7.12') следует

$$\begin{aligned} \alpha &= \beta = \gamma = 0, \\ \delta &= 1, \end{aligned}$$

что ожидалось и из общих соображений.

Если размеры отверстия связи небольшие, то соотношение (3.7.15) не выполняется, т. е. небольшая связь существенно направлена. Однако при дальнейшем увеличении отверстия связи можно найти такую конфигурацию этого отверстия, что $s^1 = -s^2$. Если в то же время $s^1 = j$, то восьмиполосник является трехдецибелным направленным ответвителем с «короткой щелью» или гибридным волноводным соединением [14].



Фиг. 3.7.7. Идеальный ответвитель со связью по широкой стенке волновода.

Матрица рассеяния трехдецибелного ответвителя, изображенного на фиг. 3.7.4, в случае определенных плоскостей отсчета запишется в виде

$$|S| = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & j & 0 & 1 \\ j & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \\ 1 & 0 & j & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.15')$$

Принцип работы многодырочного ответвителя со связью по узкой стенке волновода будет подробно рассмотрен ниже с другой точки зрения (см. § 4.3). Однако и сейчас можно утверждать, что соотношения (3.7.13) и (3.7.14) справедливы и для этих ответвителей.

Рассмотрим теперь устройство, изображенное на фиг. 3.7.1, а. Пусть $\theta = 0$. Симметрические операторы $[G]_1$ и $[G]_2$, которые раньше определяли операции симметричного преобразования относительно осей симметрии, теперь определяют операции относительно плоскостей симметрии P_1 и P_2 . И в этом случае восьмиполосник можно разделить на четыре «части» подобно тому, как это сделано на фиг. 3.7.5. Отметим, однако, что обозначения плеч на фиг. 3.7.4 и 3.7.7 не соответствуют друг другу. Эти различия введены только для того, чтобы использовать одни и те же симметрические операторы $[G]_1$ и $[G]_2$.

Металлическая стенка между «верхним» и «нижним» волноводами не влияет на собственные векторы, антисимметричные относительно плоскости P_1 , так как электрическое поле теперь перпендикулярно к этой плоскости. Действительно, если компоненты

a_1 и a_3 направлены в волноводе снизу вверх, то безразлично, есть ли в плоскости P_1 электрическая стенка. Следовательно, в отношении собственных векторов a^3 и a^4 оба волновода существенно развязаны и

$$s^3 = 1, \quad s^4 = -1,$$

так как a^3 является симметричным собственным вектором относительно плоскости P_2 , а a^4 — антисимметричный собственный вектор относительно той же плоскости.

Соотношения (3.7.12) в этом случае принимают вид

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4}(s^1 + s^2), \\ \beta &= \frac{1}{4}(s^1 - s^2 + 2), \\ \gamma &= \frac{1}{4}(s^1 + s^2), \\ \delta &= \frac{1}{4}(s^1 - s^2 - 2). \end{aligned} \quad (3.7.12'')$$

Как и в случае направленного ответвителя со связью по узкой стенке волновода,

$$\alpha = \gamma \quad (3.7.13')$$

и

$$\beta - \delta = 1, \quad (3.7.14')$$

т. е. если устройство, изображенное на фиг. 3.7.4, является идеальным направленным ответвителем, то β и δ сдвинуты по фазе на 90° , причем δ опережает β ¹⁾.

Необходимым и достаточным условием для получения направленной связи является условие $s^1 = -s^2$. На практике оно осуществляется с помощью двух щелей или нескольких отверстий связи в общих стенках волнопроводов.

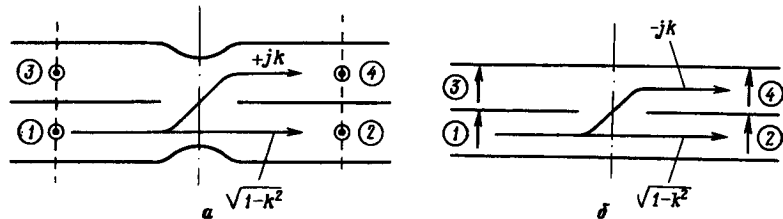
Вывод выражений матриц рассеяния для идеальных направленных ответвителей со связью по узкой и широкой стенкам волновода (фиг. 3.7.4 и 3.7.7 соответственно) был выполнен почти одновременно в соответствии с обозначениями плеч, указанными на фиг. 3.7.1. Чтобы привести в соответствие практические запросы и получить единую формулу для характеристики направленного ответвителя, следует изменить обозначения плеч восьмиполосника, как показано на фиг. 3.7.8.

¹⁾ На фиг. 3.7.7 за положительное направление электрической волны принято направление снизу вверх в нижнем волноводе и сверху вниз в верхнем волноводе. На практике за положительное направление обычно принимается направление снизу вверх в обоих волноводах. При таких обозначениях ответвленная волна *отстаёт* от проходящей волны.

Матрицы рассеяния направленных ответвителей в новых обозначениях имеют следующий вид:

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 & \pm jk \\ \sqrt{1-k^2} & 0 & \pm jk & 0 \\ 0 & \pm jk & 0 & \sqrt{1-k^2} \\ \pm jk & 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.16)$$

где k — реальное и положительное число. Знак «+» относится к идеальным ответвителям со связью по узкой стенке волновода,



Ф и г. 3.7.8. Идеальные ответвители со связью по узкой (а) и широкой (б) стенкам; обозначения плеч соответствуют выражению (3.7.16).

знак «-» — к идеальным ответвителям со связью по широкой стенке.

В случае трехдецибельного ответвителя матрица рассеяния определяется соотношением

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \pm j \\ 1 & 0 & \pm j & 0 \\ 0 & \pm j & 0 & 1 \\ \pm j & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.7.16')$$

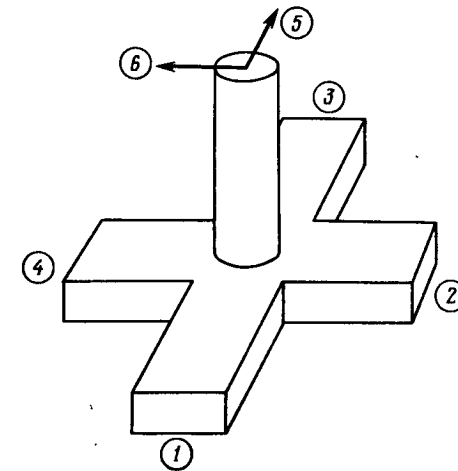
Здесь знак «+» относится к идеальному трехдецибельному ответвителю со связью по узкой стенке волновода, знак «-» — к идеальному трехдецибельному ответвителю со связью по широкой стенке¹⁾.

§ 3.8. ТУРНИКЕТНОЕ СОЕДИНЕНИЕ [4]

Турникетное соединение является симметричным двенадцати-полосником. Оно состоит из четырех прямоугольных волноводов, в которых распространяются волны типа TE_{10} , и круглого волно-

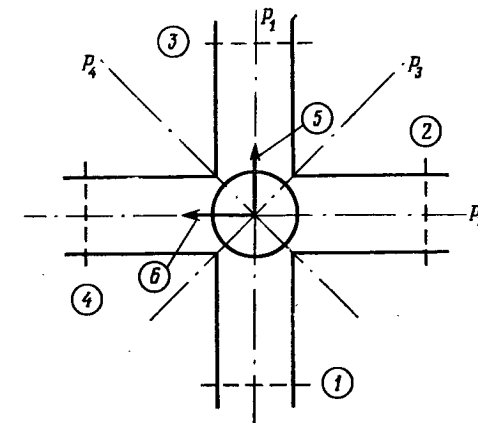
1) В этом параграфе и в работе [4] допущена неточность. В мосте со связью по узкой стенке (фиг. 3.7.8,а) волна в «основном» волноводе (плечо 2) опережает на $+\pi/2$ ответвленную волну в плече 4. В случае фиг. 3.7.8,б сдвиг фаз между указанными плечами составляет $-\pi/2$. По этому вопросу см., например, [49, 37]. — Прим. ред.

вода, в котором распространяется волна типа TE_{11} . Прямоугольные волноводы образуют крест в плоскости H , а ось круглого



Ф и г. 3.8.1. Турникетное соединение.

волновода перпендикулярна плоскости креста. Плечи 5 и 6 соответствуют двум вырожденным ортогональным в пространстве волнам; ориентация этих волн показана на фиг. 3.8.1 и 3.8.2.



Ф и г. 3.8.2. Турникетное соединение (вид сверху).

Устройство имеет четыре плоскости симметрии: P_1 , P_2 , P_3 и P_4 и одну ось симметрии J_5 . В результате операции отражения относительно плоскости P_1 меняются местами поля в плечах 2 и 4

и изменяется знак поля в плече 6, но остаются неизменными поля в плечах 1, 3 и 5. Симметрический оператор, определяющий эту операцию симметричного преобразования, имеет вид

$$[G]_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} \quad (3.8.1)$$

Точно так же можно записать симметрический оператор, соответствующий операции отражения относительно плоскости симметрии P_2 ,

$$[G]_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (3.8.2)$$

Операция отражения относительно плоскости симметрии P_3 приводит к перемене местами полей в плечах 2 и 3, 4 и 1, а в плечах 5 и 6, кроме того, изменяет знак, т. е.

$$[G]_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.3)$$

Аналогично

$$[G]_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.4)$$

Наконец, операция симметричного преобразования относительно оси симметрии J_5 , осуществляющая поворот устройства против часовой стрелки на 90° , приводит к замене полей в плече 2 полями плеча 1, полей в плече 3 полями плеча 2, полей в плече 4 полями плеча 3, полей в плече 1 полями плеча 4, полей в плече 5 полями плеча 6 (с изменением знака) и полей в плече 6 полями плеча 5. Соответствующий симметрический оператор

$$[G]_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.5)$$

Задача определения собственных векторов турникетного соединения не является простой, так как порядок симметрических операторов (шестой) выше порядка симметрии (второй или четвертый). Например,

$$[G]_1^2 = [G]_2^2 = [G]_3^2 = [G]_4^2 = [I], \quad (3.8.6)$$

т. е. $[G]_1$, $[G]_2$, $[G]_3$ и $[G]_4$ имеют только два различных корня: $+1$ и -1 . Однако

$$[G]_5^4 = [I]. \quad (3.8.7)$$

Следовательно, $[G]_5$ имеет 4 различных корня: ± 1 , j , $-j$. Решая характеристическое уравнение (3.2.5), получим

$$\begin{aligned} g^1 &= 1, \\ g^2 &= g^5 = j, \\ g^3 &= -1, \\ g^4 &= g^6 = -j. \end{aligned} \quad (3.8.8)$$

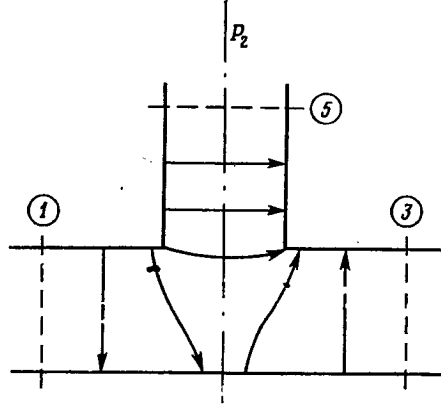
Следовательно, только собственные векторы \mathbf{a}^1 и \mathbf{a}^3 определяются однозначно. Они могут быть найдены из уравнения (3.2.7)

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.9)$$

Заметим, что составляющие, соответствующие полям в круглом волноводе, равны нулю.

Другие собственные векторы могут быть найдены путем простых преобразований [4]. Они могут быть также найдены, если отойти от формального пути и использовать результаты § 3.6.

Как видно из фиг. 3.8.3, на которой изображено поперечное сечение турникетного соединения в плоскости P_1 , турникетное соединение похоже на последовательное T -образное соединение.



Ф и г. 3.8.3. Поперечное сечение в плоскости P_1 .

В § 3.6 было показано, что плоскость отсчета в плече 5 может быть выбрана так, что собственные векторы \mathbf{a}^1 и \mathbf{a}^2 запишутся в виде

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (3.8.10)$$

Собственное значение s^1 равно 1. Уравнения (3.8.10) при соответствующем обозначении плеч определяют также собственные векторы турникетного соединения, поскольку для устройства, изображенного на фиг. 3.8.3, плечи 2, 4, и 6 полностью развязаны и справедливо следующее уравнение в собственных значениях:

$$[S] \mathbf{a}^i = s^i \mathbf{a}^i. \quad (3.2.13)$$

Такие же соотношения могут быть получены и для устройства с плечами 2, 4, 6

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (3.8.10')$$

Эти выражения аналогичны выражениям (3.8.10), хотя должны быть приняты во внимание новые обозначения плеч.

Если $s^2 = 1$, то выражения (3.8.10) можно переписать в виде

$$\mathbf{a}^2 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^4 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.11)$$

Если $s^5 = 1$, то выражения (3.8.10') также можно переписать в виде

$$\mathbf{a}^5 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^6 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (3.8.12)$$

Из симметрии ясно, что

$$s^4 = s^{6*1}). \quad (3.8.13)$$

Матрица преобразования $[S]$ определяется соотношением

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix} \quad (3.8.14)$$

Матрица рассеяния может быть найдена из уравнения

$$[S] = [S][S_d][S]^{-1} = [S][S_d][S]^T, \quad (3.2.16')$$

¹⁾ Так как s^2 , s^4 и s^5 , s^6 вырождены, то векторы \mathbf{a}^2 , \mathbf{a}^4 , \mathbf{a}^5 и \mathbf{a}^6 не являются собственными векторами оператора $[G]_5$ (ср. § 3.2, п. «е»).

поскольку матрица $[S]$ ортогональна (см. приложение I, теорема IV). В результате имеем

$$[S] = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & \delta & \gamma & \varepsilon & 0 \\ \gamma & \alpha & \gamma & \delta & 0 & \varepsilon \\ \delta & \gamma & \alpha & \gamma & -\varepsilon & 0 \\ \gamma & \delta & \gamma & \alpha & 0 & -\varepsilon \\ \varepsilon & 0 & -\varepsilon & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 & -\varepsilon & 0 & \beta \end{vmatrix} \quad (3.8.15)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{4}(s^1 + 1 + s^3 + s^4), \\ \beta &= \frac{1}{2}(1 + s^4), \\ \gamma &= \frac{1}{4}(s^1 - s^3), \\ \delta &= \frac{1}{4}(s^1 - 1 + s^3 - s^4), \\ \varepsilon &= \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - s^4). \end{aligned} \quad (3.8.16)$$

Всегда можно согласовать любое плечо такого соединения. Например, плечо 5 может быть согласовано с помощью штыря в плече 5, а плечо 6 может быть согласовано независимо аналогичным образом, так как $s_{56} = 0$. Поскольку в этом случае $\beta = 0$, то $s^4 = -1$. Можно также добиться, чтобы $\alpha = 0$, т. е. $s^1 = -s^3$, если поместить штырь на оси J_5 внутри соединения. В этом случае штырь будет возмущать только поле, соответствующее s^1 , так как все остальные собственные векторы равны нулю на оси J_5 . Если плечи 5 и 6 согласуются посредством цилиндрического плунжера, расположенного внутри соединения, то могут потребоваться добавочные регулировки.

Если плоскости отсчета выбраны так, что коэффициенты рассеяния действительны, то матрица рассеяния согласованного турникетного соединения определяется соотношением

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.15')$$

При практическом использовании турникетного соединения (см. гл. 8) в плечи 2 и 4, например, часто помещают короткозамыкающие поршни. Плоскости короткого замыкания при этом находятся на расстояниях, соответственно равных θ_2 и θ_4 электрических градусов от плоскости отсчета, причем θ_2 и θ_4 связаны соотношением

$$\theta_4 = \theta_2 + \pi/2. \quad (3.8.17)$$

В этом случае устройство является восьмиполосником, а θ_2 — параметр этого восьмиполосника. Если в плечо 1 подается волна a_1 , то вектор \mathbf{b} можно определить из соотношения

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ -b_2 e^{j2\theta_2} \\ 0 \\ b_4 e^{j2\theta_2} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} (-b_2 + b_4) e^{j2\theta_2} \\ a_1 \\ (-b_2 + b_4) e^{j2\theta_2} \\ a_1 \\ \sqrt{2} a_1 \\ \sqrt{2} (-b_2 - b_4) e^{j2\theta_2} \end{vmatrix}$$

откуда

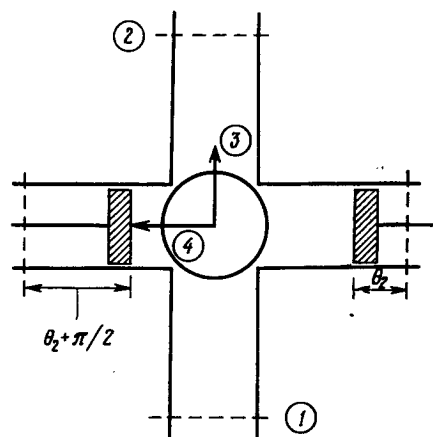
$$b_2 = b_4 = \frac{1}{2} a_1,$$

$$b_1 = b_3 = 0,$$

$$b_5 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_1,$$

$$b_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}} a_1 e^{j2\theta_2}.$$

Аналогичные выкладки можно проделать и в том случае, когда в соответствующие плечи подаются волны a_3 , a_4 , a_5 и a_6 .



Фиг. 3.8.4. Турникетное соединение, используемое для получения в круглом волноводе волны определенной поляризации; два противоположных плеча закорочены.

Можно показать, что в этом случае турникетное соединение с короткозамыкающими поршнями в двух плечах преобразует вектор

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_5 \\ a_6 \end{pmatrix}$$

в вектор

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_5 & -a_6 e^{j2\theta_2} \\ 0 & 0 & -a_5 & -a_6 e^{j2\theta_2} \\ a_1 & -a_3 & 0 & 0 \\ -a_1 e^{j2\theta_2} & -a_3 e^{j2\theta_2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

«Редуцированная» матрица рассеяния такого соединения будет иметь вид

$$[S]_{\theta_4 = \theta_2 + \pi/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -e^{j2\theta_2} \\ 0 & 0 & -1 & -e^{j2\theta_2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -e^{j2\theta_2} & -e^{j2\theta_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.8.18)$$

Плечи на фиг. 3.8.2 могут быть обозначены в соответствии с уравнением (3.8.18). Результат показан на фиг. 3.8.4.

Проходные устройства

§ 4.0. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе рассматриваются некоторые особенности узлов СВЧ-тракта. Исследуемые узлы выбраны не только с точки зрения их широкого распространения, но и их важности. Эти узлы уже не имеют ограничения пространственной симметрии, присущей элементам СВЧ, рассмотренным в предыдущей главе. Хотя описание отдельных вопросов носит специфический характер, однако, где это возможно, выделяются общие принципы.

Сначала рассматриваются вопросы широкополосного согласования в общем виде, а затем в применении к многоступенчатым переходам и многоручным направленным ответвителям. Методы описания таких узлов оказываются очень похожими. Используемые биномиальное и чебышевское распределения рассмотрены частично в настоящей главе и частично в приложении X.

Устройства на основе разветвленных линий (§ 4.4) требуют другого подхода, хотя следует отметить, что решение в виде суперпозиции четных и нечетных типов волн имеет много общего с решением, использующим собственные векторы.

В приложении XII показано, что магнитное поле в прямоугольных волноводах, работающих на основном виде колебаний, обладает круговой поляризацией в двух симметрично расположенных продольных плоскостях. Это важное положение используется для объяснения механизма связи некоторых направленных ответвителей (§ 4.5), а также принципа действия невзаимных фазовращателей и однонаправленных ослабителей (§ 4.9).

Обычные аттенюаторы и фазовращатели (§ 4.6) можно описать с помощью формул возмущения, выведенных в приложении XIII. Такой подход является чем-то средним между абсолютно строгими и приближенными количественными оценками.

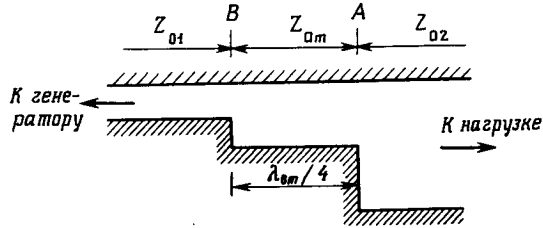
Четвертьволновые и полуволновые пластины и прецизионные фазовращатели целесообразно изучать совместно. В эту группу также можно включить прецизионные аттенюаторы, если они обладают анизотропией в поперечной плоскости.

Таким образом, несмотря на большое разнообразие проходных СВЧ-устройств, описание их имеет много общего.

§ 4.1. ШИРОКОПОЛОСНОЕ СОГЛАСОВАНИЕ

Рассмотрим следующие случаи:

а. **Четвертьволновый трансформатор.** Пусть требуется согласовать две передающие линии с различными характеристическими сопротивлениями Z_{01} и Z_{02} ¹⁾. Для этой цели используется



Ф и г. 4.1.1. Согласование передающих линий с характеристическими сопротивлениями Z_{01} и Z_{02} .

четвертьволновый трансформатор с характеристическим сопротивлением Z_{0m} и длиной, равной d . Величины Z_{0m} и d выбираются таким образом, чтобы

$$Z_{0m} = \sqrt{Z_{01}Z_{02}}, \quad (4.1.1)$$

$$d = \frac{\lambda_{0m}}{4}. \quad (4.1.1')$$

В плоскости A (фиг. 4.1.1) абсолютное значение входного сопротивления равно Z_{02} . Нормированное значение того же сопротивления по отношению к волноводу m составляет

$$\bar{z}_m(A) = \frac{Z_{02}}{Z_{0m}}.$$

Величину нормированного сопротивления в плоскости B (в том же волноводу m) можно получить из уравнения (1.3.19)

$$\bar{z}_m(B) = \frac{1}{\bar{z}_m(A)}, \quad (4.1.2)$$

так как $\cos \gamma_m z = 0$, если $z = \lambda_{0m}/4$.

Абсолютное значение входного сопротивления в плоскости B равно

$$Z(B) = \bar{z}_m(B) Z_{0m} = \frac{Z_{0m}^2}{Z_{02}}, \quad (4.1.3)$$

¹⁾ Характеристические сопротивления выражаются здесь через ток I и напряжение V или эквивалентный ток и эквивалентное напряжение (см. § 1.6).

а нормированное сопротивление в волноводу 1

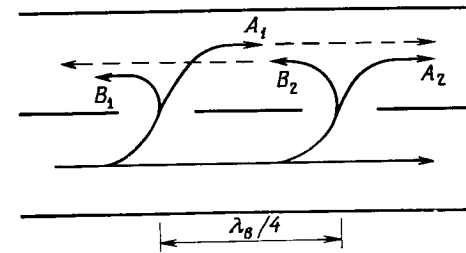
$$\bar{z}_1(B) = \frac{Z(B)}{Z_{01}} = \frac{Z_{0m}^2}{Z_{01}Z_{02}}. \quad (4.1.4)$$

Эта величина равна 1, если выполнено условие (4.1.1).

При рассмотрении не учитывался краевой эффект (если волноводы 1 и 2 имеют одинаковое сечение и отличаются только диэлектрической постоянной заполняющей среды, этот эффект отсутствует), который приводит к появлению шунтирующих емкостей в плоскостях A и B . Влияние краевого эффекта можно скорректировать уменьшением длины волновода m (см. гл. 6).

Однако длина трансформатора d равна четверти длины волны в волноводу только для одного значения частоты f_0 . На любой другой частоте появляются отражения. На практике стремятся сохранить рассогласование в строго определенных пределах в заданном частотном диапазоне.

б. **Направленный ответвитель.** Направленный ответвитель (со связью по широкой или узкой стенкам волновода) можно полу-



Ф и г. 4.1.2. Двухдырочный направленный ответвитель.

чить соединением двух волноводов таким образом, чтобы расстояние d между двумя отверстиями, излучающими в обе стороны вспомогательного волновода, равнялось $1/4$ длины волны

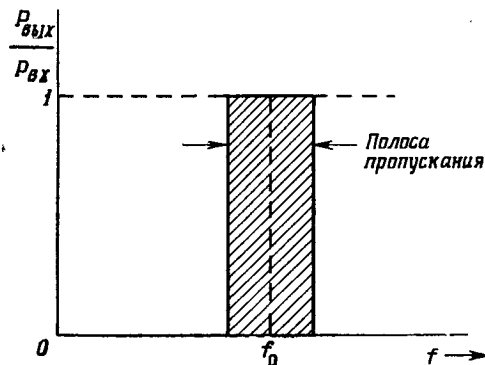
$$d = \lambda_B/4. \quad (4.1.1')$$

Как показано на фиг. 4.1.2, из основного волновода 1 во вспомогательный волновод 2 через первое отверстие отходят волны A_1 и B_1 , а через второе отверстие соответственно A_2 и B_2 . Так как два отверстия разделены на четверть длины волны, то, если эти отверстия малы и одинаковы, поля волн A_1 и A_2 будут находиться в фазе и складываться, а поля волн B_1 и B_2 в противофазе и взаимно уничтожаться.

Расстояние между отверстиями d равно $\lambda_B/4$ только на одной частоте f_0 . На любой другой частоте происходит лишь неполное гашение волн B_1 и B_2 : направленность ухудшается, и увеличивает-

ся отражение на входе (см. § 3.7). Таким образом, при создании направленных ответвителей практическая задача состоит в получении высокой направленности (и малого отражения на входе) в заданных пределах в определенном частотном диапазоне.

в. **Фильтры.** Фильтр создается следующим образом: в волновод вводится большая неоднородность, которая затем согласуется на заданной частоте f_0 методами, изложенными в приложении V. При изменении частоты в любую сторону от f_0 характеристика передачи сигнала будет падать. Таким образом, для фильтров



Ф и г. 4.1.3. П-образная частотно-передаточная характеристика.

практической задачей является поддержание постоянной характеристики передачи сигнала в заданном диапазоне частот и резкое уменьшение передачи вне указанного диапазона (П-образная характеристика, см. фиг. 4.1.3).

Хотя три отмеченные выше практические задачи различаются по целевому назначению, принципы, используемые при их решении, одни и те же. Единственное существенное отличие между первыми двумя задачами и третьей заключается в том, что рассматриваемые неоднородности предполагаются малыми для трансформатора и ответвителя, в то время как для фильтра неоднородность велика. По этой причине фильтры рассматриваются отдельно в гл. 6.

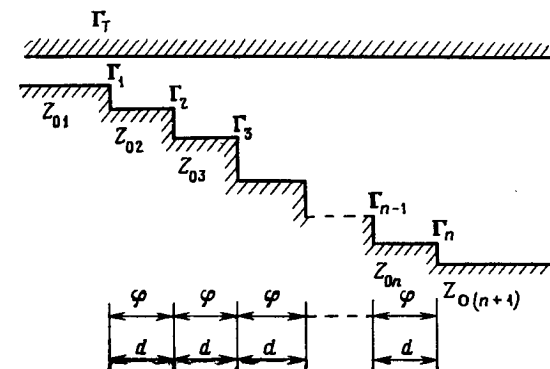
* Согласование двух волноводов в полосе частот заключается в использовании ряда четвертьволновых секций с постепенно увеличивающимися (или уменьшающимися) характеристическими сопротивлениями, как показано на фиг. 4.1.4 [15].

Рассмотрим трансформатор, состоящий из $(n - 1)$ секций, каждая из которых имеет длину (или скорректированную длину) d , равную $\lambda_n/4$ на частоте f_0 . Таким образом, имеется n ступенек, причем i -й ступеньке соответствует коэффициент отражения Γ_i . Обозначим суммарный коэффициент отражения на входе линии

через Γ_T ; первая ступенька линии имеет характеристическое сопротивление Z_{01} . На произвольно выбранной частоте f имеем

$$\Gamma_T = \Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-j2\varphi} + \Gamma_3 e^{-j4\varphi} + \dots + \Gamma_n e^{-j2(n-1)\varphi}, \quad (4.1.5)$$

где φ — полный фазовый сдвиг между соседними ступеньками трансформатора на частоте f при длине ступеньки d . Для случая



Ф и г. 4.1.4. Многоступенчатый переход.

малых Γ_i правомочность сложения коэффициентов отражения по уравнению (4.1.5), а также записи их в виде

$$\Gamma_i = \frac{Z_{0(i+1)} - Z_{0i}}{Z_{0(i+1)} + Z_{0i}}$$

показана в приложении IX.

Формально оказывается более удобным ввести гипотетический коэффициент отражения Γ'_T в середине многоступенчатого трансформатора; фаза этого коэффициента отличается от фазы Γ_T на угол $(n - 1)\varphi$

$$\Gamma'_T = \Gamma_T e^{j(n-1)\varphi} = \Gamma_1 e^{j(n-1)\varphi} + \Gamma_2 e^{j(n-3)\varphi} + \dots + \Gamma_n e^{-j(n-1)\varphi}. \quad (4.1.6)$$

Пусть

$$\Gamma_1 = \Gamma_n, \quad \Gamma_2 = \Gamma_{n-1}, \quad \Gamma_3 = \Gamma_{n-2} \text{ и т. д.} \quad (4.1.7)$$

Тогда уравнение (4.1.6) запишется в виде

$$\Gamma'_T = 2 [\Gamma_1 \cos(n-1)\varphi + \Gamma_2 \cos(n-3)\varphi + \Gamma_3 \cos(n-5)\varphi + \dots + \Gamma_{n/2} \cos \varphi], \quad (4.1.8)$$

если n четное, и

$$\Gamma'_T = 2 [\Gamma_1 \cos(n-1)\varphi + \Gamma_2 \cos(n-3)\varphi + \dots + \frac{\Gamma_{n-1}}{2} \cos 2\varphi] + \frac{\Gamma_{n+1}}{2}, \quad (4.1.8')$$

если n нечетное, так как $e^{jk\varphi} + e^{-jk\varphi} = 2 \cos k\varphi$. В случае когда $\varphi = \pi/2$ (при $f = f_0$), имеем

$$\begin{aligned} \Gamma'_T &= 0, & \text{если } n \text{ четное,} \\ \Gamma'_T &= \Gamma_{\frac{n+1}{2}} - 2\Gamma_{\frac{n-1}{2}} + 2\Gamma_{\frac{n-3}{2}} \dots \pm 2\Gamma_1, & \text{если } n \text{ нечетное;} \end{aligned}$$

при $\varphi = \pi$

$$\Gamma'_T = -2(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n), \text{ если } n \text{ четное,}$$

$$\Gamma'_T = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots) + \Gamma_{\frac{n+1}{2}}, \text{ если } n \text{ нечетное.}$$

Существует бесчисленное множество способов выбора коэффициентов отражения Γ_i . Одним из таких способов является *биномиальное приближение*, суть которого состоит в том, что коэффициенты Γ_i выбираются пропорциональными коэффициентам разложения бинома Ньютона типа $(a+b)^{n-1}$. В этом случае величина Γ_T равна нулю на частоте f_0 и медленно и монотонно увеличивается по обе стороны от f_0 . Кривая зависимости Γ'_T от частоты в области, прилежащей к f_0 , имеет максимально-плоский вид [см. уравнение (4.1.11), приведенное ниже].

Второй способ — *чебышевское приближение*, при котором коэффициент Γ'_T пропорционален полиному Чебышева $C_{n-1}(x)$, где x — функция как частоты, так и ширины рабочей полосы частот. В этом случае величина Γ'_T колеблется в диапазоне частот, однако эти колебания не превышают заданной величины ε .

а. Биномиальное распределение. При биномиальном распределении коэффициентов Γ_i последние пропорциональны коэффициентам разложения бинома $(a+b)^{n-1}$

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &\sim 1, \\ \Gamma_2 &\sim (n-1), \\ \Gamma_3 &\sim \frac{(n-1)(n-2)}{2!}, \\ \Gamma_4 &\sim \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_1, \\ \Gamma_2 &= (n-1)\Gamma_1, \\ \Gamma_3 &= \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\Gamma_1, \\ \Gamma_4 &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!}\Gamma_1 \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Эти коэффициенты можно просто найти с помощью следующей таблицы: при увеличении номера n каждый ряд коэффициентов перемещается вправо на одно место. Таким образом, получается вспомогательный ряд чисел, члены которого складываются с расположенными над ними коэффициентами по столбцам

$$\begin{array}{r} n=1 \quad 1 \\ n=2 \quad \frac{1}{1 \ 1} \\ n=3 \quad \frac{1 \ 1}{1 \ 2 \ 1} \\ n=4 \quad \frac{1 \ 2 \ 1}{1 \ 3 \ 3 \ 1} \\ n=5 \quad \frac{1 \ 3 \ 3 \ 1}{1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1} \\ n=6 \quad \frac{1 \ 4 \ 6 \ 4 \ 1}{1 \ 5 \ 10 \ 10 \ 5 \ 1} \text{ и т. д.} \end{array} \quad (4.1.9')$$

После подстановки соответствующих значений Γ_i в уравнение (4.1.8) получим

$$\Gamma'_T = 2\Gamma_1 \left[\cos(n-1)\varphi + (n-1)\cos(n-3)\varphi + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}\cos(n-5)\varphi \dots \right]. \quad (4.1.10)$$

Можно показать, что после подстановки разложения $\cos k\varphi$ по $\cos \varphi$ (см. приложение X) в уравнение (4.1.10) только один член, включающий $\cos^{n-1}\varphi$ (обозначим коэффициент, стоящий при нем, через A_{n-1}), взаимно не сократится, т. е.

$$\Gamma'_T = 2\Gamma_1 A_{n-1} \cos^{n-1}\varphi. \quad (4.1.11)$$

Производные всех порядков до $(n-2)$ -го включительно от Γ'_T при $f=f_0$ равны нулю. В силу этого биномиальные ступенчатые переходы обладают *максимально-плоской характеристикой* (фиг. 4.1.5).

Величины всех коэффициентов Γ_i определяются через Γ_1 по уравнениям (4.1.9).

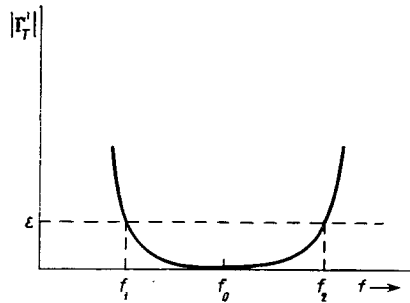
На практике задача может быть поставлена по-иному: имеется n неоднородностей и задано максимально допустимое значение коэффициента отражения $|\Gamma_T|$ в некотором диапазоне частот, равное ε .

Максимальное значение Γ_1 определяется из видоизмененного соотношения (4.1.11)

$$|\Gamma_1| \leq \frac{\varepsilon}{2A_{n-1} \cos^{n-1}\varphi_1}, \quad (4.1.11')$$

где φ_1 — полный фазовый сдвиг между соседними ступеньками на частоте f_1 , соответствующей нижней границе полосы частот; A_{n-1} — константа, определяемая из разложения $\cos(n-1)\varphi$ [см. уравнения (X.4)].

При широкополосном согласовании предполагается, что на частоте f_2 , являющейся верхней границей рабочей полосы частот,



Ф и г. 4.1.5. Зависимость $|\Gamma_T'|$ от частоты для биномиального распределения.

$|\Gamma_T'|$ также имеет значение ε . Обозначим фазовый сдвиг на этой частоте через φ_2 . Таким образом, из уравнения (4.1.11') получаем

$$\cos \varphi_1 = |\cos \varphi_2| \quad (4.1.12)$$

и

$$\varphi_2 = \pi - \varphi_1.$$

Частотный диапазон можно также характеризовать отношением длин волн в волноводе на частотах f_1 и f_2

$$\rho = \frac{\lambda_{в1}}{\lambda_{в2}} = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}. \quad (4.1.13)$$

Решая совместно уравнения (4.1.12) и (4.1.13), получим

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{1+\rho}, \quad (4.1.14)$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{1+\rho} \rho.$$

Длина d на частоте f_0 должна точно равняться $1/4$ длины волны в рассматриваемом волноводе, т. е.

$$d = \frac{\lambda_{в0}}{4}, \quad (4.1.15)$$

так что

$$\varphi_0 = \frac{2\pi d}{\lambda_{в0}} = \frac{\pi}{2}.$$

Аналогично

$$\varphi_1 = \frac{2\pi d}{\lambda_{в1}} \quad \text{или} \quad d = \frac{\varphi_1 \lambda_{в1}}{2\pi}, \quad (4.1.14')$$

$$\varphi_2 = \frac{2\pi d}{\lambda_{в2}} \quad \text{или} \quad d = \frac{\varphi_2 \lambda_{в2}}{2\pi}, \quad (4.1.14'')$$

т. е.

$$\frac{\varphi_1 \lambda_{в1}}{2\pi} = \frac{\varphi_2 \lambda_{в2}}{2\pi} = \frac{\lambda_{в0}}{4}. \quad (4.1.15)$$

После подстановки уравнений (4.1.13) и (4.1.14) в (4.1.15) получим соотношение между $\lambda_{в0}$, $\lambda_{в1}$ и $\lambda_{в2}$

$$4d = \lambda_{в0} = \frac{2\lambda_{в1}\lambda_{в2}}{\lambda_{в1} + \lambda_{в2}}. \quad (4.1.16)$$

В уравнении (4.1.11) можно произвести замену переменных с тем, чтобы ширина полосы пропускания фигурировала в явном виде

$$\cos \varphi = x \cos \varphi_1 = x \cos \left(\frac{\pi}{1+\rho} \right), \quad (4.1.17)$$

где

$$|x| = 1, \quad \text{когда} \quad f = f_1 \quad \text{или} \quad f = f_2,$$

и

$$|x| = 0, \quad \text{когда} \quad f = f_0.$$

Суммарный коэффициент отражения на входе Γ_T' как функция от x записывается в виде

$$\Gamma_T' = 2\Gamma_1 A_{n-1} \left[\cos^{n-1} \left(\frac{\pi}{1+\rho} \right) x^{n-1} \right]. \quad (4.1.11'')$$

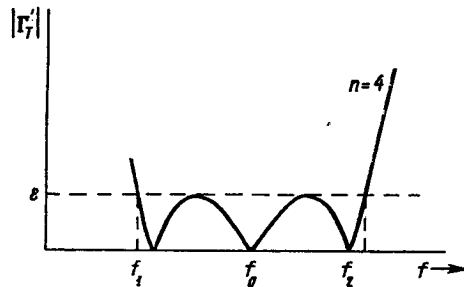
В случае многоступенчатого перехода или многодырочного направленного ответвителя обычно задаются величины ε и ρ . Кроме того, для перехода по обе его стороны известны величины характеристических сопротивлений, подлежащих сочленению, а в случае ответвителя обычно требуется получить заданный коэффициент переходного ослабления. В обоих случаях n — независимая переменная величина.

Выбор величины n производится методом последовательных приближений, т. е. последовательно задают значения n и рассчитывают величины Γ_i через Γ_1 (Γ_1 находят из условия трансформации сопротивлений или по известной величине переходного ослабления). Затем по уравнению (4.1.11') находят Γ_T' . Если

полученное значение превосходит величину ε , то выбирают большее значение n и повторяют все операции.

Как и во всякой задаче, решаемой методом подбора, результаты последовательных операций можно протабулировать, так что n можно определить непосредственно из графика или таблицы.

б. Чебышевское распределение. При чебышевском распределении коэффициентов Γ_i выражения (4.1.8) и (4.1.8') приравняются к $\varepsilon C_{n-1}(x)$, где $C_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x)$ представляет собой полином



Ф и г. 4.1.6. Зависимость $|\Gamma_T'|$ от частоты для чебышевского распределения ($n = 4$).

Чебышева n -го порядка; ε — заданная максимальная величина коэффициента отражения $|\Gamma_T'|$ в рабочей полосе частот. Переменная $x = \cos \varphi / \cos \varphi_1 = \cos \varphi / |\cos \varphi_2|$ является функцией частоты [см. уравнение (4.1.17)].

В правой части выражения (4.1.8) или (4.1.8') записываются через $\cos \varphi$ в соответствующих степенях (см. приложение X), затем $\cos \varphi$ заменяют на $x \cdot \cos \varphi_1$.

Коэффициенты при одинаковых степенях x (включая Γ_i и свободные члены) затем приравнивают и определяют Γ_i . Такой метод решения автоматически обеспечивает выполнение условия $|\Gamma_T'| \leq \varepsilon$ во всей рабочей полосе частот, так как

$$|\varepsilon C_{n-1}(x)| \leq \varepsilon$$

в этой полосе частот.

Кривая зависимости $|\Gamma_T'|$ от частоты в рабочей полосе частот имеет осциллирующий характер, однако $|\Gamma_T'|$ всюду не превышает ε (фиг. 4.1.6).

Для заданной величины трансформации сопротивлений ступенчатого перехода (либо для заданного значения переходного ослабления направленного ответвителя) и заданных величин ε и n применение полинома Чебышева дает максимальную рабочую полосу частот или, наоборот, для фиксированной полосы частот получаем наименьшее значение ε .

Пример. Возьмем $n = 4$.

Из уравнения (4.1.8) получим

$$\begin{aligned} \Gamma_T' &= 2 [\Gamma_1 \cos 3\varphi + \Gamma_2 \cos \varphi] = \\ &= 2 [\Gamma_1 (4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi) + \Gamma_2 \cos \varphi] = \\ &= 2 [\Gamma_1 (4x^3 \cos^3 \varphi_1 - 3x \cos \varphi_1) + \Gamma_2 x \cos \varphi_1] = \\ &= (8\Gamma_1 \cos^3 \varphi_1) x^3 + (2\Gamma_2 \cos \varphi_1 - 6\Gamma_1 \cos \varphi_1) x. \end{aligned}$$

Приравняем Γ_T' к $\varepsilon C_3(x) = \varepsilon (4x^3 - 3x)$, тогда

$$(4\varepsilon) x^3 - (3\varepsilon) x = (8\Gamma_1 \cos^3 \varphi_1) x^3 + (2\Gamma_2 \cos \varphi_1 - 6\Gamma_1 \cos \varphi_1) x.$$

Выпишем коэффициенты при одинаковых степенях x

$$\begin{aligned} 4\varepsilon &= 8\Gamma_1 \cos^3 \varphi_1, \\ -3\varepsilon &= 2\Gamma_2 \cos \varphi_1 - 6\Gamma_1 \cos \varphi_1, \end{aligned}$$

откуда

$$\Gamma_1 = \frac{\varepsilon}{2 \cos^3 \varphi_1}, \quad \Gamma_2 = 3\Gamma_1 (1 - \cos^2 \varphi_1) = \frac{3\varepsilon}{2 \cos^3 \varphi_1} (1 - \cos^2 \varphi_1).$$

Полученные значения Γ_i являются максимальными для заданных ε и ширины рабочей полосы частот. Найденные коэффициенты Γ_i могут оказаться неудовлетворительными для сочленения двух линий с разными характеристическими сопротивлениями или для получения заданного переходного ослабления. В этом случае следует увеличить n .

§ 4.2. МНОГУСТУПЕНЧАТЫЙ ПЕРЕХОД

На основании уравнения (1.3.18) коэффициент отражения для любой ступеньки (см. фиг. 4.1.4) выражается в виде

$$\Gamma_k = \frac{\frac{Z_{0(k+1)}}{Z_{0k}} - 1}{\frac{Z_{0(k+1)}}{Z_{0k}} + 1} \quad (4.2.1)$$

(доказательство см. в приложении IX).

Для отношений $Z_{0(k+1)}/Z_{0k}$, близких к 1, можно воспользоваться разложением $\ln x$

$$\ln x = 2 \left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^5 + \dots \right]. \quad (4.2.2)$$

Приближенно запишем

$$\ln x \approx 2 \frac{x-1}{x+1}. \quad (4.2.2')$$

Если $x=2$, $\ln x=0,694$ и $2(x-1)/(x+1)=0,667$, т. е. ошибка получается менее 4%.

Таким образом, для $\Gamma_k < 0,35$ имеем

$$\Gamma_k = \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{0(k+1)}}{Z_{0k}}. \quad (4.2.3)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{1}{2} (\ln Z_{02} - \ln Z_{01}), \\ \Gamma_2 &= \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{03}}{Z_{02}} = \frac{1}{2} (\ln Z_{03} - \ln Z_{02}), \\ &\dots \dots \dots \\ \Gamma_n &= \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{0(n+1)}}{Z_{0n}} = \frac{1}{2} (\ln Z_{0(n+1)} - \ln Z_{0n}). \end{aligned} \quad (4.2.3')$$

Складывая левые и правые части (4.2.3'), получим соотношение между коэффициентами Γ_i и отношением характеристических сопротивлений

$$\begin{aligned} \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \dots + \Gamma_n &= \frac{1}{2} (\ln Z_{0(n+1)} - \ln Z_{01}) = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{Z_{0(n+1)}}{Z_{01}} \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

или

$$\frac{1}{2} \ln \frac{Z_{0(n+1)}}{Z_{01}} = f(\Gamma_1), \quad (4.2.4')$$

где $f(\Gamma_1) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n$ является функцией, вид которой зависит от выбранного распределения (биномиального или чебышевского).

Обычно ход расчета состоит в выборе величины n , определения $f(\Gamma_1)$ и Γ_1 и сравнении заданного значения ϵ с полученным коэффициентом отражения. Если значение ϵ превышено, то выбирается большее значение n .

После нахождения удовлетворительных значений Γ_i из соотношений (4.2.3) определяются характеристические сопротивления. **Пример.** Рассчитать симметричный шестиступенчатый переход, соединяющий передающие линии с характеристическими сопротивлениями 100 и 1000 ом, если $p = \lambda_{в1}/\lambda_{в2} = 2$. Закон распределения коэффициентов отражения биномиальный.

Из уравнения (4.2.4')

$$f(\Gamma_1) = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3) = \frac{1}{2} \ln \frac{1000}{100} = 1,15.$$

Воспользовавшись уравнением (4.1.9'), при $n=6$ запишем

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_1 = \Gamma_6, \\ \Gamma_2 &= 5\Gamma_1 = \Gamma_5, \\ \Gamma_3 &= 10\Gamma_1 = \Gamma_4, \end{aligned}$$

т. е. $32\Gamma_1 = 1,15$, откуда $\Gamma_1 = 0,036$.

Следовательно, $\Gamma_1 = 0,036$, $\Gamma_2 = 0,180$, $\Gamma_3 = 0,360$.

Соответствующие характеристические сопротивления равны

$$\begin{aligned} Z_{02} &= [\operatorname{antiln}(2 \times 0,036)] \times 100 = 107,5 \text{ ом}, \\ Z_{03} &= [\operatorname{antiln}(2 \times 0,180)] \times 107,5 = 154 \text{ ом}, \\ Z_{04} &= [\operatorname{antiln}(2 \times 0,360)] \times 154 = 316 \text{ ом}, \\ Z_{05} &= [\operatorname{antiln}(2 \times 0,360)] \times 316 = 648 \text{ ом}, \\ Z_{06} &= [\operatorname{antiln}(2 \times 0,180)] \times 648 = 930 \text{ ом}. \end{aligned}$$

На краях рабочей полосы частот максимальное отражение составляет

$$|\Gamma_T|_{\max} = 2\Gamma_1 A_{n-1} \cos^{n-1} \varphi_1 = \epsilon.$$

Поскольку $A_{n-1} = 16$ [см. уравнения (X.4)] и $\cos \varphi_1 = 0,5$, имеем $\epsilon = 0,031$ и $KCBH_{\max} = 1,06$.

Если требуется получить значение ϵ меньше чем 0,031, то необходимо взять переход с числом ступеней, большим 6.

§ 4.3. МНОГОДЫРОЧНЫЙ НАПРАВЛЕННЫЙ ОТВЕТВИТЕЛЬ

Рассмотрим направленный ответвитель, показанный на фиг. 4.3.1. Расстояние между отверстиями равно d , причем

$$d = \frac{\lambda_{в0}}{4} \quad (4.3.1)$$

на частоте $f = f_0$.

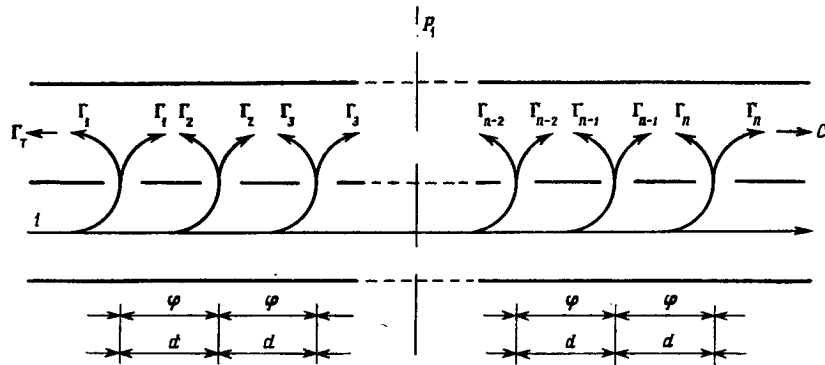
На любой другой частоте

$$d = \frac{\varphi \lambda_{в}}{2\pi}, \quad (4.3.2)$$

и в общем случае можно использовать введенные в § 4.1 величины p и x .

Отверстия связи предполагаются малыми и, следовательно, ненаправленными. Кроме того, рассматривается система, симметричная относительно плоскости P_1 (фиг. 4.3.1). Это означает, что размеры k -го и $(n+1-k)$ -го отверстий одинаковы. Обозначим коэффициент связи по напряжению k -го отверстия через Γ_k . Так как фаза волны в плоскости k -го отверстия равна $(k-1)\varphi + \varphi_{иТ}$

(где Φ_H — постоянная, которая предполагается одинаковой для всех отверстий и поэтому может не учитываться), то волна,



Ф и г. 4.3.1. Многодырочный направленный ответвитель.

ответвляемая в обратном направлении во вспомогательном волноводе, будет характеризоваться величиной Γ_T

$$\Gamma_T = \Gamma_1 + \Gamma_2 e^{-j2\varphi} + \Gamma_3 e^{-j4\varphi} + \dots + \Gamma_n e^{-j2(n-1)\varphi}. \quad (4.3.3)$$

Выражение (4.3.3) аналогично выражению (4.1.5). Обозначение Γ_k было выбрано намеренно именно по этой причине, хотя в данном случае оно характеризует переходное ослабление.

Волна, ответвляемая в прямом направлении (см. фиг. 4.3.1), характеризуется коэффициентом C

$$C = \Gamma_1 e^{-j(n-1)\varphi} + \Gamma_2 e^{-j(n-1)\varphi} + \dots + \Gamma_n e^{-j(n-1)\varphi} = (\Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n) e^{-j(n-1)\varphi}. \quad (4.3.4)$$

Перенеся плоскость отсчета в плоскость P_1 , получим для волны, ответвляемой в обратном направлении,

$$\Gamma'_T = \Gamma_T e^{j(n-1)\varphi} = 2 [\Gamma_1 \cos(n-1)\varphi + \Gamma_2 \cos(n-3)\varphi + \dots + \frac{\Gamma_n \cos \varphi}{2}], \quad (4.3.5)$$

если n четное, и

$$\Gamma'_T = 2 [\Gamma_1 \cos(n-1)\varphi + \Gamma_2 \cos(n-3)\varphi + \dots + \frac{\Gamma_{n+1}}{2}], \quad (4.3.5')$$

если n нечетное.

Для волны, ответвляемой в прямом направлении, имеем

$$C = f(\Gamma_1) e^{-j \frac{n-1}{2} \varphi}, \quad (4.3.6)$$

где $f(\Gamma_1) = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_n$.

Расчет направленного ответвителя состоит в получении требуемого коэффициента C при одновременном сохранении коэффициента $|\Gamma'_T|$ ниже определенной величины ϵ для заданного отношения длин волн p (тем самым отражение на входе сохраняется ниже той же величины ϵ , см. § 3.7) и в улучшении постоянства коэффициента C в полосе частот.

Ход расчета в точности повторяет расчет многоступенчатого перехода. Сначала выбирают тип распределения (биномиальное или чебышевское). Затем по выбранному распределению находят $f(\Gamma_1)$. Далее, задавшись некоторым числом отверстий n , по известной величине C находят Γ_1 . После этого проверяют, не превысил ли коэффициент $|\Gamma'_T|$ заданную величину ϵ . Наконец, после определения удовлетворительных значений Γ_i находят размеры отверстий по эмпирическим формулам и графикам [12, 16].

Пример. Рассчитать пятидырочный направленный ответвитель с величиной переходного ослабления 20 дБ для $p = \lambda_{в1}/\lambda_{в2} = 2$. Использовать чебышевское распределение.

Для $n = 5$ выражение (4.3.5') запишется в виде

$$\Gamma'_T = 2 [\Gamma_1 \cos(5-1)\varphi + \Gamma_2 \cos(5-3)\varphi] + \Gamma_3 = 2 [\Gamma_1 \cos 4\varphi + \Gamma_2 \cos 2\varphi] + \Gamma_3.$$

$$\text{Коэффициент } C = 2(\Gamma_1 + \Gamma_2) + \Gamma_3 = \frac{1}{\text{antilg } \frac{20}{20}} = 0,1$$

[см. уравнение (3.7.5)].

Положим $\cos \varphi = x \cos \varphi_1$, где $\varphi_1 = 180^\circ/(1+p) = 60^\circ$, так что $\cos \varphi = 0,5x$.

Тогда

$$\Gamma'_T = 2 [\Gamma_1 (8x^4 \cos^4 \varphi_1 - 8x^2 \cos^2 \varphi_1 + 1) + \Gamma_2 (2x^2 \cos^2 \varphi_1 - 1)] + \Gamma_3 = \epsilon C_4(x) = (8x^4 - 8x^2 + 1) \epsilon$$

или

$$\Gamma'_T = \Gamma_1 x^4 + (\Gamma_2 - 4\Gamma_1) x^2 + (\Gamma_3 + 2\Gamma_1 - 2\Gamma_2) = 8\epsilon x^4 - 8\epsilon x^2 + \epsilon.$$

Таким образом,

$$\Gamma_1 = 8\epsilon,$$

$$\Gamma_2 = 4\Gamma_1 - 8\epsilon = 24\epsilon,$$

$$\Gamma_3 = \epsilon + 2\Gamma_2 - 2\Gamma_1 = 33\epsilon,$$

$$C = [2(8 + 24) + 33] \epsilon = 97\epsilon = 0,1,$$

откуда $\epsilon = 0,1/97 \approx 10^{-3}$.

Из уравнения (3.7.6) определяем направленность

$$D = 20 \lg \frac{1}{\epsilon} - 20 \text{ дБ} = 40 \text{ дБ}.$$

Коэффициенты связи отдельных отверстий равны

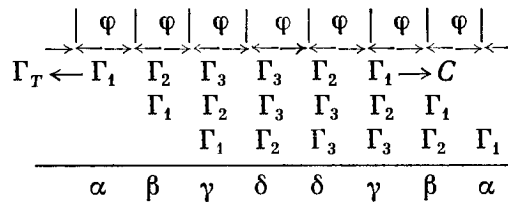
$$\Gamma_1 = 8 \cdot 10^{-3},$$

$$\Gamma_2 = 24 \cdot 10^{-3},$$

$$\Gamma_3 = 33 \cdot 10^{-3}.$$

Если требуется направленность больше 40 дБ, то нужно больше пяти отверстий.

При решении нужно учитывать, что если величина C слишком велика, то отверстия перекрываются. Но даже если отверстия не перекрываются, а располагаются слишком близко одно к другому, то коэффициенты Γ_i становятся более чувствительны к изменению частоты. Избежать этого можно либо увеличением n числа



Ф и г. 4.3.2. Способ улучшения характеристик ответвителя.

отверстий n , согласно чебышевскому или биномиальному распределению, либо изменению начального варианта распределения Γ_i .

Рассмотрим пример. На фиг. 4.3.2 показаны три ряда коэффициентов связи $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_3, \Gamma_2, \Gamma_1$, которые смещены относительно друг друга на один столбец, а затем произведено почленное сложение в столбцах, что приводит к новому ряду с коэффициентами: $\alpha = \Gamma_1$, $\beta = \Gamma_1 + \Gamma_2$, $\gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$ и $\delta = 2\Gamma_3 + \Gamma_2$. Очевидно, что суммарный коэффициент переходного ослабления теперь в три раза больше, чем у каждого ряда в отдельности (коэффициент C получившегося в результате преобразований ответвителя уменьшился на 9,55 дБ), т. е.

$$C''' = 3C. \quad (4.3.7)$$

Коэффициент Γ_T для ответвления в обратном направлении теперь равен

$$\Gamma_T''' = \Gamma_T + \Gamma_T e^{-j2\varphi} + \Gamma_T e^{-j4\varphi}. \quad (4.3.8)$$

В плоскости P_1 получим

$$|\Gamma_T'''| = |\Gamma_T| (1 + 2 \cos \varphi). \quad (4.3.8')$$

В результате направленность в диапазоне частот несколько улучшилась, так как

$$\left| \frac{C'''}{\Gamma_T} \right| = \left| \frac{3}{1 + 2 \cos \varphi} \right| \left| \frac{C}{\Gamma_T} \right| > \left| \frac{C}{\Gamma_T} \right|, \quad (4.3.9)$$

хотя число отверстий увеличилось только с 6 до 8¹⁾.

Нет необходимости указывать, что можно создать бесконечное множество подобных построений, которые будут различаться в зависимости от того, на что делается упор при конструировании: большую величину переходного ослабления, большую направленность или простоту конструкции направленного ответвителя.

§ 4.4. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ И ГИБРИДНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Синтез направленных ответвителей и гибридных соединений может быть выполнен на основе отрезков линий, длина которых выбирается равной нечетному числу четвертей длины волны. В идеальном случае такими линиями являются коаксиальные или полосковые линии, работающие на низких частотах, где влияние краевых полей сведено до минимума. В общем случае, однако, в качестве элементов, из которых синтезируются СВЧ-устройства, могут служить линии и волноводы, работающие на любой частоте при условии компенсации краевых эффектов.

В дальнейшем будет показано, что матрица проводимости четвертьволновой линии имеет очень простую форму, подходящую для сочленения.

Метод синтеза [4] состоит в предварительном выборе матрицы проводимости гибридного соединения или направленного ответвителя и в реализации такой матрицы с помощью разветвления четвертьволновых линий.

Расширение этого метода [17] позволяет анализировать системы, подобные синтезированным ниже в качестве примеров, и улучшать их переходное ослабление и частотную чувствительность.

а. Четвертьволновые линии. Рассмотрим матрицу нормированных проводимостей $[y]$ для пассивного устройства с изотропной

¹⁾ Если рассчитать восьмидырочный ответвитель, удовлетворяющий чебышевскому или биномиальному распределению для коэффициента C''' , то направленность окажется даже лучше, и α и β (см. фиг. 4.3.2) будут меньше, а γ больше. Так, при перераспределении коэффициентов переходного ослабления, как показано на фиг. 4.3.2 (каждый из трех наборов использует биномиальное распределение), их величины будут относиться как 1 : 6 : 16 : 25 : 25 : 16 : 6 : 1, а для восьмидырочного ответвителя тоже при биномиальном распределении (с таким же суммарным коэффициентом переходного ослабления) соответствующие отношения равны: 0,75 : 5, 25 : 15, 75 : 26, 15 : 26, 25 : 15, 75 : 5, 25 : 0,25.

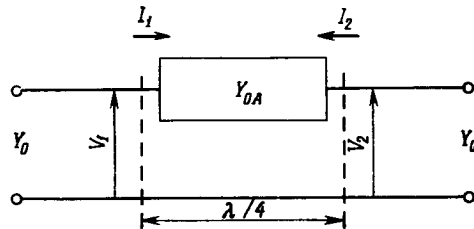
средой. Пусть она имеет вид

$$[\bar{y}] = \begin{vmatrix} \bar{y}_{11} & \bar{y}_{12} & \dots & \bar{y}_{1n} \\ \bar{y}_{21} & \bar{y}_{22} & \dots & \bar{y}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{y}_{n1} & \bar{y}_{n2} & \dots & \bar{y}_{nn} \end{vmatrix} \quad (4.4.1)$$

В силу ассоциативности сложения матриц матрицу (4.4.1) можно записать в виде

$$[\bar{y}] = \begin{vmatrix} \bar{y}_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & \bar{y}_{12} & \dots & 0 \\ \bar{y}_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \bar{y}_{ij} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} + \dots \quad (4.4.2)$$

Рассмотрим четырехполюсник, показанный на фиг. 4.4.1, представляющий собой четвертьволновую линию с характеристической проводимостью Y_{0A} , включенную в передающую линию с характеристической проводимостью Y_0 . Пусть система работает на волне



Фиг. 4.4.1. Четвертьволновая линия с характеристической проводимостью Y_{0A} .

типа *TEM* (коаксиальная, полосковая, двухпроводная линии и т. д.), так что характеристические проводимости определены на основе реальных значений U и I .

В гл. 7 показано, что матрица проводимости отрезка волновода (или линии) длиной z имеет вид

$$[Y] = \frac{jY_0}{\sin \gamma z} \begin{vmatrix} -\cos \gamma z & 1 \\ 1 & -\cos \gamma z \end{vmatrix} \quad (7.4.14')$$

Следовательно, матрица нормированных проводимостей (нормирование по Y_0) четвертьволновой линии с характеристической проводимостью Y_{0A} равна

$$[\bar{y}] = \frac{Y_{0A}}{Y_0} \begin{vmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.3)$$

Если длина линии равна $3/4$ длины волны, то (7.4.14') можно переписать так:

$$[\bar{y}] = \frac{Y_{0A}}{Y_0} \begin{vmatrix} 0 & -j \\ -j & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.4)$$

Из соотношений (4.4.2)–(4.4.4) следует, что любое устройство, матрица проводимости которого такова, что диагональные элементы ее равны нулю, а по обратной диагонали стоят чисто мнимые числа, можно синтезировать с помощью отрезков передающих линий длиной $1/4\lambda$ и $3/4\lambda$, работающих на волне типа *TEM* и имеющих соответствующие характеристические проводимости.

б. Первый пример синтеза. Рассмотрим матрицу рассеяния двойного волноводного тройника

$$[S]_{MT} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (2.5.16)$$

При перемещении всех плоскостей отсчета на электрическую длину, равную $-\pi/4$ рад (в направлении от тройника), матрица рассеяния примет вид

$$[S] = \frac{-j}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.5)$$

Свойство унитарности матрицы $[S]$ записывается следующим образом:

$$[S]^* [S] = [I], \quad (2.2.19)$$

где $[I]$ — единичная матрица.

Так как из соотношения (4.4.5)

$$[S]^* = -[S], \quad (4.4.6)$$

то, подставляя соотношение (4.4.6) в (2.2.19), получим

$$[S]^2 = -[I]. \quad (4.4.7)$$

Матрица проводимостей $[\bar{y}]$ определяется из соотношения

$$[\bar{y}] = [I - S][I + S]^{-1}. \quad (2.2.8)$$

Используя ассоциативность операций над матрицами, имеем

$$[\bar{y}] = [I - S][I - S][I - S]^{-1}[I + S]^{-1} = [I - 2S + S^2][I - S^2]^{-1}, \quad (4.4.8)$$

что приводит к соотношению

$$[\bar{y}] = -[S], \quad (4.4.9)$$

поскольку

$$[S]^2 = -[I].$$

Матрицу проводимостей

$$[\bar{y}] = \frac{j}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.9')$$

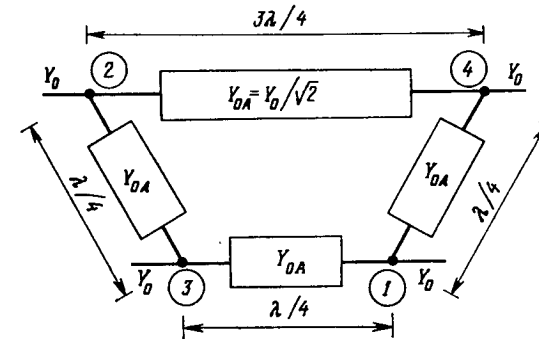
можно получить, используя линии длиной $1/4\lambda$ (для положительных элементов) и $3/4\lambda$ (для отрицательных элементов), нормированная характеристическая проводимость которых равна

$$\frac{Y_{0A}}{Y_0} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4.4.10)$$

Элементы матрицы нормированных проводимостей с одинаковыми индексами \bar{y}_{11} , \bar{y}_{22} , \bar{y}_{33} и \bar{y}_{44} равны нулю. Так как $\bar{y}_{12} = \bar{y}_{34} = 0$, то между входами 1 и 2, а также 3 и 4 отсутствуют непосредственно соединяющие их элементы. Но между входами 1 и 3 имеется отрезок линии длиной $1/4\lambda$ с нормированной характеристической проводимостью $1/\sqrt{2}$. То же можно сказать относительно связи между входами 1 и 4. Между входами 2 и 4 нужно поместить линию длиной $3/4\lambda$ с нормированной характеристической проводимостью $1/\sqrt{2}$, так как $\bar{y}_{24} = -j/\sqrt{2}$. Полная схема синтеза приведена на фиг. 4.4.2.

Практическое осуществление схемы на коаксиальной линии (кольцевой мост) показано на фиг. 4.4.3. Создание подобной системы на полосковых линиях не представляет затруднений. Отметим, что все элементы матрицы нормированных проводимостей с одинаковыми индексами (их можно определить, закорачивая все выходы, кроме рассматриваемого) действительно равны нулю. Что касается волноводов, то самая очевидная реализация

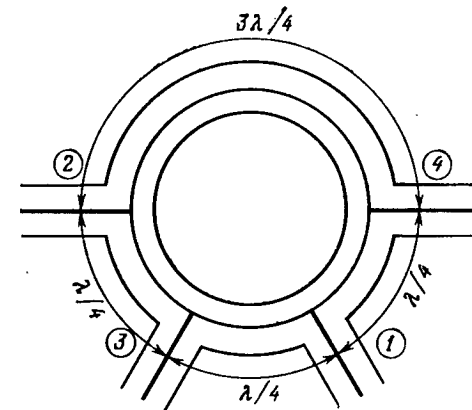
вышерассмотренной схемы — это волноводный кольцевой мост с ответвлениями в плоскости H . В этом случае, однако, существует значительное осложнение, связанное с природой величин



Фиг. 4.4.2. Первая схема синтеза двойного волноводного тройника.

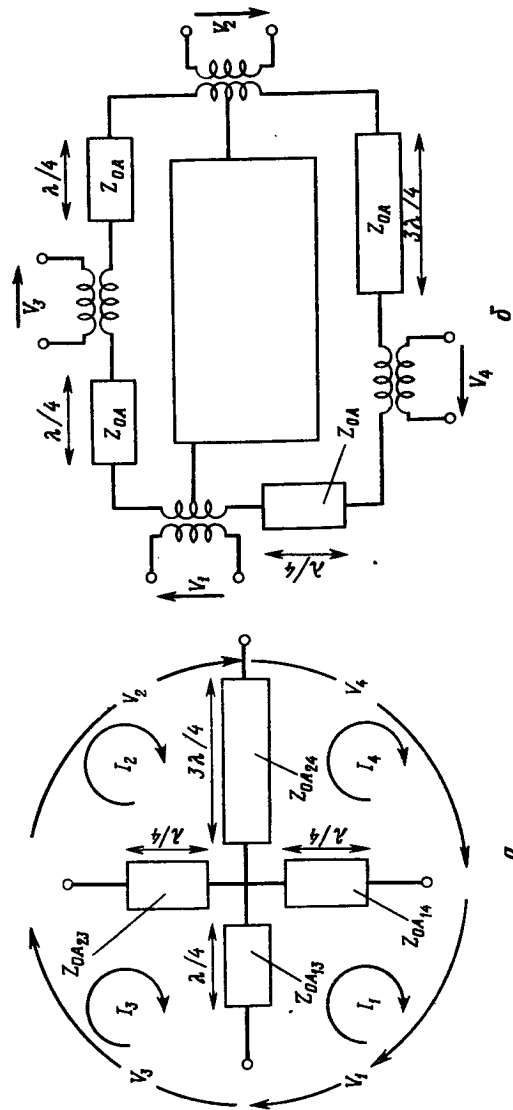
Y_{0A} и Y_0 , которые должны быть проводимостями, определенными через реально существующие напряжения и токи.

Все проводимости, выраженные через эквивалентные ток и напряжение (см. § 1.6), содержат множитель a/b . Размер a



Фиг. 4.4.3. Кольцевой мост на коаксиальной линии.

определяется частотой отсечки и стремлением не допустить возникновения высших типов волн; его нельзя изменять произвольно. Размер b , напротив, можно менять как угодно. Однако в случае волноводного кольцевого моста с ответвлениями в плоскости H



Ф и г. 4.4.4. Синтез на основе матрицы нормированных сопротивлений.

изменение размера b собственно кольца по сравнению с размером b ответвлений вызвало бы образование больших неоднородностей. По этой причине такое кольцо применяется редко.

При рассмотрении фиг. 4.4.4, *a*, которая является видоизменением фиг. 4.4.2, виден более удачный подход к физической реализации на волноводах. Здесь взаимными элементами являются линии с характеристическим сопротивлением Z_{0A} длиной $\lambda_B/4$ и $3\lambda_B/4$. В гл. 7 [уравнение (7.4.14)] показано, что матрица сопротивлений отрезка волновода, имеющего длину z и характеристическое сопротивление Z_0 , имеет вид

$$[Z] = \frac{-jZ_0}{\sin \gamma z} \begin{vmatrix} \cos \gamma z & 1 \\ 1 & \cos \gamma z \end{vmatrix}$$

Следовательно, матрицу нормированных сопротивлений четвертьволновой линии с характеристическим сопротивлением Z_{0A} (нормирование проведено по Z_0) можно записать в виде

$$[\bar{z}] = -j \frac{Z_{0A}}{Z_0} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.11)$$

а для линии длиной $3/4$ волны

$$[\bar{z}] = j \frac{Z_{0A}}{Z_0} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.12)$$

Из этого следует, что элементы матрицы нормированных сопротивлений с разными индексами для схемы, показанной на фиг. 4.4.4, *a*, равны

$$\begin{aligned} -j \frac{Z_{0A}}{Z_0} &= -\frac{j}{\sqrt{2}} \quad (\text{для линии длиной } \lambda_B/4), \\ -j \frac{Z_{0A}}{Z_0} &= \frac{j}{\sqrt{2}} \quad (\text{для линии длиной } 3\lambda_B/4). \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Кроме того, все элементы с одинаковыми индексами (их можно определить при работе на холостом ходе всех плеч, кроме рассматриваемого) равны нулю¹⁾.

1) Для нахождения элемента \bar{z}_{11} разомкнем вход, соответствующий напряжению V_4 . Тогда элемент схемы z_{0A14} окажется эффективно закороченным. Если разомкнуть еще вход, соответствующий напряжению V_3 , то окажется закороченным Z_{0A13} . Следовательно, $\bar{z}_{11} = 0$. Это может быть более наглядно видно из фиг. 4.4.5, где каждое плечо расположено между двумя открытыми (т. е. разомкнутыми) плечами, отстоящими на расстоянии либо $\lambda_B/4$, либо $3\lambda_B/4$.

Матрица нормированных сопротивлений для цепи, изображенной на фиг. 4.4.4, а, теперь запишется как

$$[\bar{z}] = -\frac{j}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.14)$$

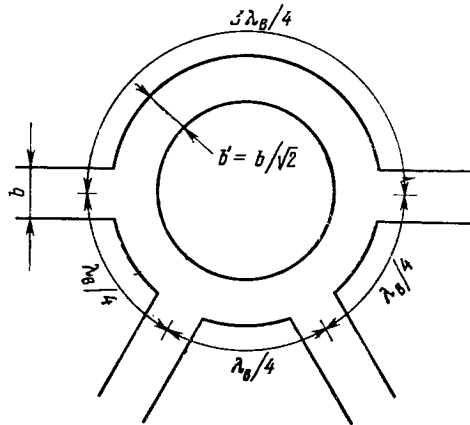
Но из соотношений (4.4.14), (4.4.9) и (4.4.9')

$$[\bar{z}] = -[\bar{y}] = [S], \quad (4.4.15)$$

т. е. матрица рассеяния рассматриваемой цепи

$$[S] = -\frac{j}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.16)$$

На фиг. 4.4.4, б показана двухпроводная реализация схемы, приведенной на фиг. 4.4.4, а¹⁾. На фиг. 4.4.5 изображена



Фиг. 4.4.5. Волноводный кольцевой мост (тройники в плоскости E).

волноводная реализация матрицы (4.4.14) — волноводный кольцевой мост с ответвлениями в плоскости E . Если последовательные волно-

¹⁾ Следует отметить, что симметрирующие трансформаторы, которые на фиг. 4.4.4, б отражают наличие ответвлений в плоскости E (поле E на входе разделяется несимметрично), трудно реализовать на коаксиальных линиях, особенно на более высоких частотах, где определение напряжений между центральными проводниками, как показано на фиг. 4.4.4, а, совершенно теряет смысл.

водные тройники обладают идеальной трансформацией импедансов [(т. е. если они подчиняются выражению (3.6.28)], то величину нормированного характеристического сопротивления, равную $1/\sqrt{2}$, можно получить, изменив размер b кольца до величины b' , причем

$$b' = \frac{b}{\sqrt{2}}. \quad (4.4.17)$$

в. Второй пример синтеза. Переместим плоскости отсчета двойного тройника, определенные выражением (2.5.16), на электрические углы

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \theta_3 = \pi/2, \\ \theta_2 &= \theta_4 = \pi. \end{aligned}$$

Тогда получим матрицу рассеяния в виде

$$[S] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & j \\ 0 & 0 & j & 1 \\ 1 & j & 0 & 0 \\ j & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.18)$$

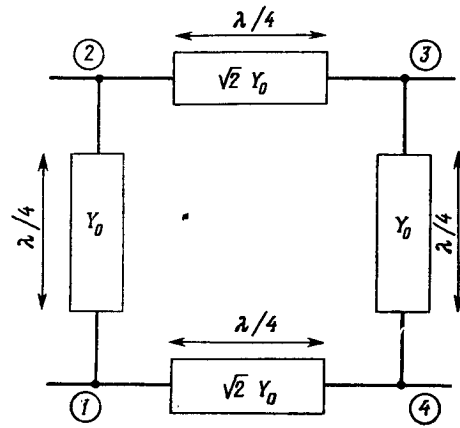
Соответствующая матрица нормированных проводимостей определяется из выражения (2.2.8)

$$[\bar{y}] = j \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.4.19)$$

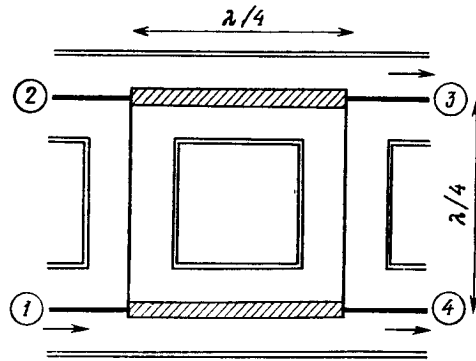
Она реализуется при помощи четвертьволновых отрезков линий, имеющих соответствующие характеристические проводимости. Схема синтеза для этого случая показана на фиг. 4.4.6, а физическая реализация на коаксиальной линии — на фиг. 4.4.7. Аналогичная реализация на полосковых линиях не представляет затруднений.

Непосредственное воплощение такой схемы синтеза на волноводах встретило бы затруднения, упомянутые при рассмотрении первого примера синтеза. Поэтому более практичным подходом опять является использование последовательных волноводных ответвлений в плоскости E , образующих «кольцевое» устройство, показанное на фиг. 4.4.8. Соединяющие плечи имеют нормированное характеристическое сопротивление, равное $\sqrt{2}$, поэтому размер b у них изменен

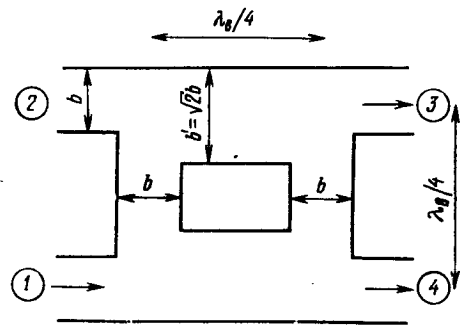
$$b' = \sqrt{2} b. \quad (4.4.20)$$



Ф и г. 4.4.6. Вторая схема синтеза двойного тройника.



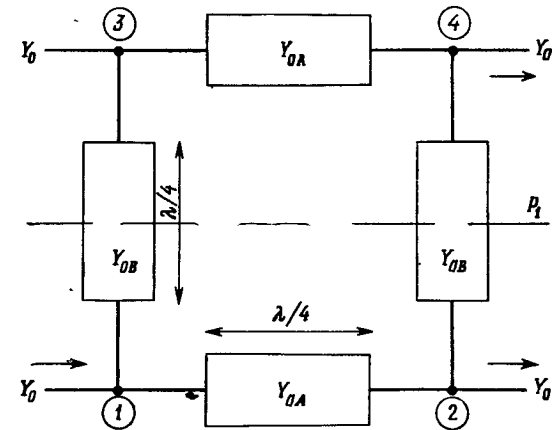
Ф и г. 4.4.7. Реализация схемы синтеза двойного тройника на коаксиальных линиях.



Ф и г. 4.4.8. Реализация второй схемы синтеза на волноводах.

г. Анализ симметричных четвертьволновых разветвлений. Коаксиальное устройство, изображенное на фиг. 4.4.7 (и его волноводный аналог на фиг. 4.4.8), можно усложнить, если изменить относительные проводимости отрезков линий или же если изменить и величины проводимостей и количество отрезков линий (шлейфов).

Однако вместо синтеза таких усложненных устройств на основе рассмотренных образцов более целесообразно ввести общую схему, провести ее анализ и вывести ряд полезных соотношений.



Ф и г. 4.4.9. Схема восьмиполосника на четвертьволновых линиях.

Рассмотрим сначала схему, показанную на фиг. 4.4.9. Отметим изменение в нумерации входов: нумерация проведена в соответствии с фиг. 3.7.8 и выражением (3.7.4). Допустим, что все входы согласованы, и подведем к входам 1 и 3 одинаковые по амплитуде и синфазные волны

$$a_{1e} = a_{3e} = a/2. \quad (4.4.21)$$

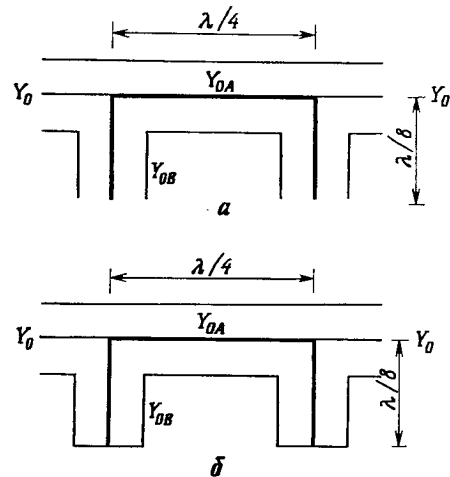
В силу симметрии системы максимум напряжения будет иметь место в плоскости P_1 , т. е. распределение напряжений таково, как если бы в плоскости P_1 цепь была разомкнута (холостой ход). Так как ко входам 1 и 3 системы подведены «четные» или «симметричные» волны a_{1e} и a_{3e} , то волны b_{1e} , b_{2e} , b_{3e} и b_{4e} отраженные от входов 1, 2, 3 и 4, связаны соотношениями

$$\begin{aligned} b_{1e} &= b_{3e} = s_{11e} \frac{a}{2}, \\ b_{2e} &= b_{4e} = s_{12e} \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (4.4.22)$$

Если же ко входам 1 и 3 подвести одинаковые по амплитуде, но сдвинутые по фазе на 180° волны, т. е.

$$a_{1o} = -a_{3o} = a/2, \quad (4.4.23)$$

то в плоскости P_1 зарегистрируем нуль напряжения, и распределение напряжения будет таким же, как если бы плоскость P_1



Фиг. 4.4.10. Четная (а) и нечетная (б) системы.

была короткозамыкающей. Волны b_{1o} , b_{2o} , b_{3o} , b_{4o} отраженные от входов 1, 2, 3 и 4 соответственно, будут связаны соотношениями

$$\begin{aligned} b_{1o} &= -b_{3o} = s_{11o} \frac{a}{2}, \\ b_{2o} &= -b_{4o} = s_{12o} \frac{a}{2}. \end{aligned} \quad (4.4.24)$$

В случае наличия и четных и нечетных волн решение определится в виде суперпозиции частных решений для четного и нечетного случаев:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_{1e} + a_{1o} = a, \\ a_3 &= a_{3e} + a_{3o} = 0, \\ b_1 &= b_{1e} + b_{1o} = (s_{11e} + s_{11o}) \frac{a}{2} = s_{11} a, \\ b_2 &= b_{2e} + b_{2o} = (s_{12e} + s_{12o}) \frac{a}{2} = s_{12} a, \\ b_3 &= b_{3e} + b_{3o} = (s_{11e} - s_{11o}) \frac{a}{2} = s_{13} a, \\ b_4 &= b_{4e} + b_{4o} = (s_{12e} - s_{12o}) \frac{a}{2} = s_{14} a. \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

На этом анализ считается законченным при условии, что известны матрица рассеяния $[S]_e$ двухплечевого узла, соответствующего четному частному решению (фиг. 4.4.10, а), и матрица рассеяния $[S]_o$ двухплечевого узла, соответствующего нечетному частному решению (фиг. 4.4.10, б).

Задача определения $[S]_e$ и $[S]_o$ более систематически решается с использованием матрицы типа $[A]$ (см. приложение XI). Каждому элементу (параллельная разомкнутая на конце линия длиной $\lambda/8$, параллельная закороченная линия длиной $\lambda/8$, последовательная линия длиной $\lambda/4$) соответствует матрица $[A]$. Так как эти элементы образуют каскадное соединение, их матрицы просто перемножаются, и находится результирующая матрица. Выражения для $[S]_e$ и $[S]_o$ получаются из $[A]_e$ и $[A]_o$ с помощью соотношений

$$\begin{aligned} s_{11} = s_{22} &= \frac{\bar{B} - \bar{C}}{2\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}, \\ s_{12} = s_{21} &= \frac{2}{2\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}, \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

где \bar{A} , \bar{B} , \bar{C} , \bar{D} определены в приложении XI [уравнения (XI.13)].

Для четного случая, показанного на фиг. 4.4.10, а (см. приложение XI),

$$[A]_e = \begin{vmatrix} -\frac{Y_{0B}}{Y_{0A}} & \frac{j}{Y_{0A}} \\ j \left(Y_{0A} - \frac{Y_{0B}^2}{Y_{0A}} \right) & -\frac{Y_{0B}}{Y_{0A}} \end{vmatrix} \quad (4.4.27a)$$

а для нечетного случая (фиг. 4.4.10, б)

$$[A]_o = \begin{vmatrix} \frac{Y_{0B}}{Y_{0A}} & \frac{j}{Y_{0A}} \\ j \left(Y_{0A} - \frac{Y_{0B}^2}{Y_{0A}} \right) & \frac{Y_{0B}}{Y_{0A}} \end{vmatrix} \quad (4.4.27b)$$

Из соотношений (4.4.26) следует, что устройство будет согласовано, если для четного и нечетного случаев $\bar{B} = \bar{C}$. То же условие накладывается и на $[A]_e$ и $[A]_o$

$$\frac{Y_0}{Y_{0A}} = \left(Y_{0A} - \frac{Y_{0B}^2}{Y_{0A}} \right) \frac{1}{Y_0} \quad (4.4.28)$$

или

$$Y_0^2 = Y_{0A}^2 - Y_{0B}^2.$$

В таком случае устройство является направленным ответвителем.

Из соотношений (4.4.25) — (4.4.28) определяются переходное ослабление

$$s_{14} = \frac{s_{12e} - s_{12o}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{A+B} \right)_e - \left(\frac{1}{A+B} \right)_o \right] = -\frac{Y_{0B}}{Y_{0A}} = -\frac{\sqrt{Y_{0A}^2 - Y_0^2}}{Y_{0A}} \quad (4.4.29)$$

и «коэффициент прохождения»

$$s_{12} = \frac{s_{12e} + s_{12o}}{2} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{A+B} \right)_e + \left(\frac{1}{A+B} \right)_o \right] = -\frac{jY_0}{Y_{0A}} \quad (4.4.30)$$

Связь, т. е. переходное ослабление, можно произвольно менять, выбирая величины Y_{0A} и Y_{0B} таким образом, чтобы выполнялось равенство (4.4.28).

В частном случае, когда $Y_{0B} = Y_0$ и $Y_{0A} = \sqrt{2} Y_0$, имеем

$$s_{14} = -1/\sqrt{2}, \quad (4.4.29')$$

$$s_{12} = -j/\sqrt{2}, \quad (4.4.30')$$

что совпадает со значениями элементов в выражениях (4.4.18) (разница лишь в том, что нумерация плеч изменена) или в (3.7.16'), за исключением множителя j .

Устройство, изображенное на фиг. 4.4.3, также можно проанализировать этим методом, т. е. рассматривая четные и нечетные частные решения по отношению к плоскости симметрии.

Число поперечных отрезков передающих линий (шлейфов) на фиг. 4.4.9 можно увеличить от двух до любого числа и анализировать систему методом, описанным выше.

При увеличении числа шлейфов согласование достигается несколькими путями. В общем случае чем больше число шлейфов, тем большую полосу пропускания можно получить при данной направленности [17].

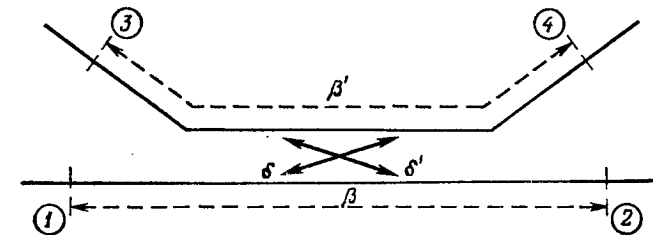
Физическая реализация на волноводах будет включать особенности, упомянутые при рассмотрении примеров синтеза.

§ 4.5. ОБЗОР НАПРАВЛЕННЫХ ОТВЕТВИТЕЛЕЙ

Гибридные соединения и двойные тройники являются частным случаем трехдецибелльных направленных ответвителей. Они были рассмотрены в § 2,6, 3.7 и 4.4. В гл. 8 будет показано, что комбинация двух мостовых соединений и переменного фазовращателя образует направленный ответвитель с переменной связью.

Матрица рассеяния симметричных ответвителей с общей стенкой (боковой или верхней) рассматривалась в § 3.7, причем были

сделаны два важных вывода: 1) прошедшая и ответвленная волны находятся в квадратуре в симметричных плоскостях отсчета; 2) коэффициенты отражения и прохождения в нежелательном направлении имеют одинаковую величину. В § 4.3 рассматривались методы получения заданной направленности в широкой полосе частот для таких направленных ответвителей с общей стенкой.



Ф и г. 4.5.1. Общая схема направленного ответвителя.

Второй класс ответвителей (ответвители на разветвлениях или шлейфах) рассматривался в предыдущем параграфе на основе теории четырехполюсников. Из уравнения (4.4.29) видно, что переходное ослабление можно менять произвольно, если изменять проводимости линий.

Существует, однако, много других типов направленных ответвителей, принцип работы которых удобнее объяснить, используя не теорию цепей, а теорию электромагнитного поля. Для несимметричных направленных ответвителей в большинстве случаев можно записать матрицу рассеяния в виде

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & \beta & 0 & \delta \\ \beta & 0 & \delta' & 0 \\ 0 & \delta' & 0 & \beta' \\ \delta & 0 & \beta' & 0 \end{vmatrix} \quad (4.5.1)$$

где

$$\begin{aligned} \delta &= ke^{j\theta_1}, \\ \delta' &= ke^{j\theta_2}, \\ \beta &= \sqrt{1-k^2} e^{j\theta_3}, \\ \beta' &= \sqrt{1-k^2} e^{j\theta_4}, \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

k — действительное число.

Доказательство справедливости выражения (4.5.1) аналогично доказательству, проведенному при выводе (3.7.4). Рассмотрим согласованный взаимный восьмиполусник без потерь (не обяза-

тельно симметричный). Пусть его матрица рассеяния имеет вид

$$[S] = \begin{bmatrix} 0 & s_{12} & s_{13} & s_{14} \\ s_{12} & 0 & s_{23} & s_{24} \\ s_{13} & s_{23} & 0 & s_{34} \\ s_{14} & s_{24} & s_{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.5.3)$$

Тогда из условия $[S][S]^* = [I]$ получим

$$s_{13}s_{23}^* + s_{14}s_{24}^* = 0, \quad (4.5.4a)$$

$$s_{12}s_{23}^* + s_{14}s_{34}^* = 0, \quad (4.5.4b)$$

$$s_{12}s_{24}^* + s_{13}s_{34}^* = 0, \quad (4.5.4в)$$

$$s_{12}s_{13}^* + s_{24}s_{34}^* = 0, \quad (4.5.4г)$$

$$s_{12}s_{14}^* + s_{23}s_{34}^* = 0. \quad (4.5.4д)$$

Из уравнений (4.5.4в) и (4.5.4г) следует

$$\frac{s_{12}}{s_{34}^*} = -\frac{s_{13}}{s_{24}^*} = -\frac{s_{24}}{s_{13}^*} \quad (4.5.5)$$

или

$$|s_{13}| = |s_{24}| \quad \text{и} \quad |s_{12}| = |s_{34}|.$$

Из уравнений (4.5.4б) и (4.5.4д) имеем

$$\frac{s_{12}}{s_{34}^*} = -\frac{s_{14}}{s_{23}^*} = -\frac{s_{23}}{s_{14}^*} \quad (4.5.6)$$

или

$$|s_{14}| = |s_{23}|$$

Сравнивая уравнения (4.5.5) и (4.5.6), находим

$$s_{14}s_{24}^* = s_{13}s_{23}^*. \quad (4.5.7)$$

Подставляя соотношение (4.5.7) в (4.5.4а), получим

$$2s_{13}s_{23}^* = 0. \quad (4.5.8)$$

Поэтому если $s_{23} \neq 0$, то $s_{13} = 0$. Матрица рассеяния представляется в виде (4.5.1), если

$$\begin{aligned} \beta &= s_{12}, & \delta &= s_{14}, \\ \beta' &= s_{34}, & \delta' &= s_{23}. \end{aligned}$$

Плоскости отсчета в плечах 2 и 4 всегда можно выбрать так, чтобы β и β' были действительными и, следовательно, равными. Тогда, воспользовавшись соотношением (4.5.6), запишем

$$\delta = -\delta'^* \quad \text{или} \quad \theta_1 = \pi - \theta_2. \quad (4.5.9)$$

В частном случае, если δ — чисто мнимая величина, то

$$\delta = \delta'. \quad (4.5.9')$$

Однако для несимметричной системы (в отличие от симметричной), если β — действительное число, последнее равенство может не выполняться.

Ключ к пониманию принципа действия многих различных устройств, таких, как ответвитель Бете и ответвитель с петлей связи, лежит в рассмотрении электрической и магнитной связей, которые действуют противоположно. Электрическая связь симметрична, магнитная несимметрична. Если величины их равны [18, 19, 26], то поля складываются в одном направлении и взаимно уничтожаются в другом, создавая, таким образом, направленность.

Работу других ответвителей можно объяснить на основании или только магнитной связи (ответвитель Швингера), или рассматривая круговую поляризацию магнитного поля в определенных плоскостях прямоугольного волновода (волна типа TE_{10}).

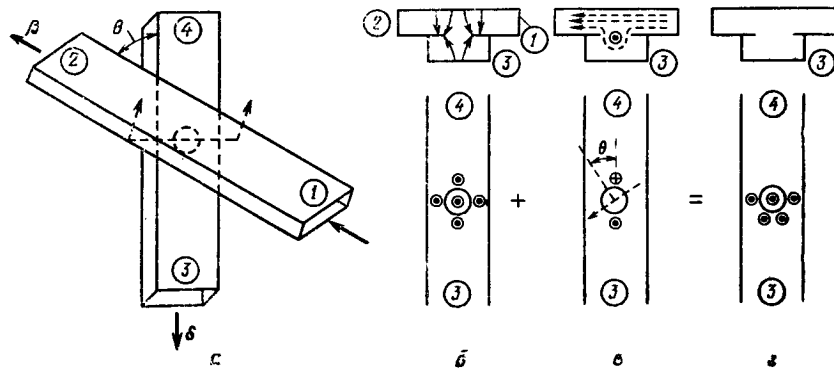
Наконец, для объяснения распределенной связи и очевидных аномальных отклонений следует воспользоваться теорией связанных типов волн.

а. Ответвитель Бете. Рассмотрим ответвитель, изображенный на фиг. 4.5.2, в котором два волновода связаны отверстием в общей широкой стенке. Из уравнения (3.7.12) видно, что в этом случае собственные значения попарно уничтожаются, однако более наглядное представление о работе направленного ответвителя можно получить на основании рассмотрения распределения электрического и магнитного полей. Связь за счет электрического поля симметрична. Это означает, что волна из плеча 1 ответвляется в плечи 3 и 4 так, что фаза и амплитуда ответвленных волн одинаковы (фиг. 4.5.2, б).

Магнитное поле, «провисающее» в отверстие связи, в свою очередь возбуждает во вспомогательном волноводе электрическое поле. Силовые линии последнего оканчиваются на стенке волновода, причем с одной стороны отверстия они входят в нее, а с другой выходят (это объясняется способом возбуждения электрического поля, фиг. 4.5.2, в). Изменяя угол θ , можно изменять величину провисающего магнитного поля пропорционально $\cos \theta$. Можно найти такой угол θ , при котором величина электрического поля, возбужденного за счет электрической связи, окажется равной величине электрического поля, возбужденного за счет магнитной связи. При этом устройство начинает работать как направленный ответвитель.

Заметим, что в плечо 3 сигнал идет в направлении, почти противоположном направлению распространения основного сигнала в плече 1. Это происходит потому, что магнитное поле во вспомогательном

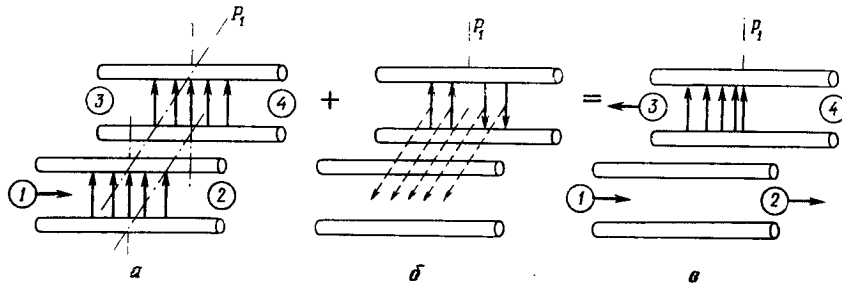
волноводе находится в фазе с магнитным полем в основном волноводе, а электрическое поле сдвинуто по фазе на 180° (фиг. 4.5.2, б).



Фиг. 4.5.2. Однодвухпроводный ответвитель Бете.

а — общий вид; б — электрическое поле в волноводе 3—4, возбуждаемое электрическим полем волновода 1—2; в — электрическое поле в волноводе 3—4, возбуждаемое магнитным полем волновода 1—2; г — суммарное электрическое поле в волноводе 3—4.

б. Направленный ответвитель на связанных двухпроводных линиях. Рассмотрим систему, изображенную на фиг. 4.5.3. Она состоит из двух двухпроводных линий, расположенных в непосред-



Фиг. 4.5.3. Направленный ответвитель на связанных двухпроводных линиях.

а — электрическое поле в линии 3—4, возбуждаемое электрическим полем линии 1—2; б — электрическое поле в линии 3—4, возбуждаемое магнитным полем линии 1—2; в — суммарное электрическое поле в линии 3—4.

ственной близости друг от друга. Не теряя общности изложения, допустим, что электрическое поле принимает максимальное значение в момент времени $t = 0$ в плоскости P_1 . Так как волна распространяется по линии 1—2 слева направо, то максимум магнитного поля также находится в плоскости P_1 , а направление его отмечено стрелками на фиг. 4.5.3, б.

В силу существования краевого электрического поля в линии 1—2 в линии 3—4 возбуждается электрическое поле. Возбуждение симметрично по отношению к плоскости P_1 , а величина напряженности электрического поля не зависит от частоты, если двухпроводные линии расположены достаточно близко (фиг. 4.5.3, а).

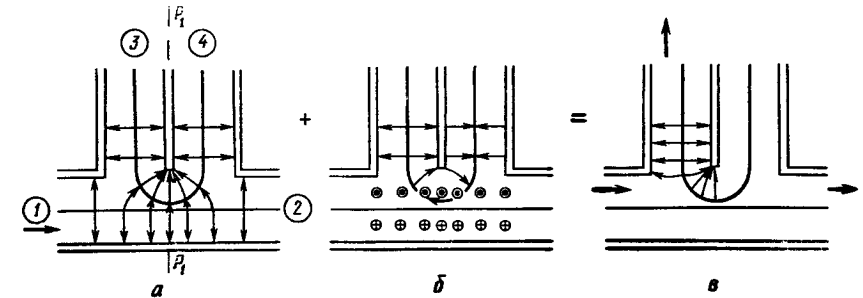
Магнитное поле в линии 1—2 также возбуждает электрическое поле в линии 3—4. Эти поля подчиняются уравнению Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (1.1.7)$$

В плоскости P_1 наведенное магнитным полем электрическое поле равно нулю, так как $d\mathbf{B}/dt = 0$. По обеим сторонам от плоскости P_1 в линии 3—4 возбуждаются противоположно направленные электрические поля, напряженность которых зависит от частоты и расстояния между линиями. При определенном расстоянии между рассматриваемыми линиями электрические поля, возбужденные в линии 3—4 электрическим и магнитным полями из линии 1—2, взаимно уничтожаются в плече 4 и складываются в плече 3 (фиг. 4.5.3, в). Ответвление энергии во вспомогательной линии 3—4 происходит в направлении, *противоположном* движению энергии по основной линии 1—2.

На том же принципе основана работа подобного устройства на полосковых и двухпроводных экранированных линиях.

в. Ответвитель с малой петлей связи. По принципу действия рассматриваемый ответвитель аналогичен системе на связанных двухпроводных линиях.



Фиг. 4.5.4. Направленный ответвитель с петлей связи.

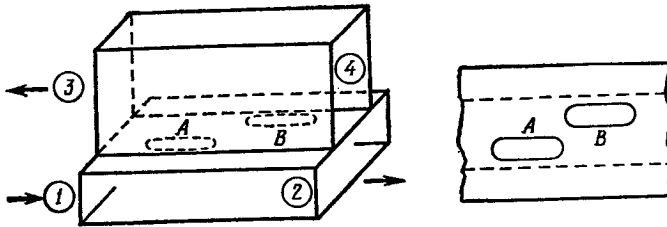
а — электрическое поле, возбуждаемое электрическим полем; б — электрическое поле, возбуждаемое магнитным полем; в — суммарное электрическое поле.

В плечах 3 и 4 коаксиального направленного ответвителя, сигнал в который подается через плечо 1, благодаря присутствию петли связи возбуждаются симметричные электрические поля (фиг. 4.5.4, а), созданные электрическим полем основной линии 1—2.

Однако за счет связи по магнитному полю в плечах 3 и 4 возбуждаются противоположно направленные электрические поля. Если размеры ответвителя подобраны правильно, то величина электрического поля, возбужденного за счет электрической связи, оказывается равной величине поля за счет магнитной связи. Тогда электрические поля сложатся в плече 3 и взаимно уничтожатся в плече 4.

Петлю связи можно ввести также в центре широкой стенки прямоугольного волновода (волна типа TE_{10}). При этом, несмотря на очевидные различия, получим аналогичный рассмотренному выше направленный ответвитель.

г. **Направленный ответвитель Швингера.** Ответвитель Швингера изображен на фиг. 4.5.5. Две щели, разнесенные на расстояние $\lambda_B/4$, прорезаны в широкой стенке основного волновода 1—2 и в прилегающей к ней узкой стенке вспомогательного волновода 3—4.



Ф и г. 4.5.5. Направленный ответвитель Швингера.

В первом приближении из-за ориентации щелей по отношению к волноводу 3—4 электрической связью в данном случае можно пренебречь. По той же причине можно не учитывать составляющую магнитного поля H_x .

Рассмотрим составляющую магнитного поля H_z волны, входящей в плечо 1. Из уравнения (1.2.1) для нижней волны TE_{10} имеем

$$H_z = \cos \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t - \gamma z)}. \quad (4.5.10)$$

Пусть H_z в месте расположения щели A равна

$$H_{zA} = \cos \frac{\pi x_1}{a}, \quad (4.5.10')$$

тогда у щели B

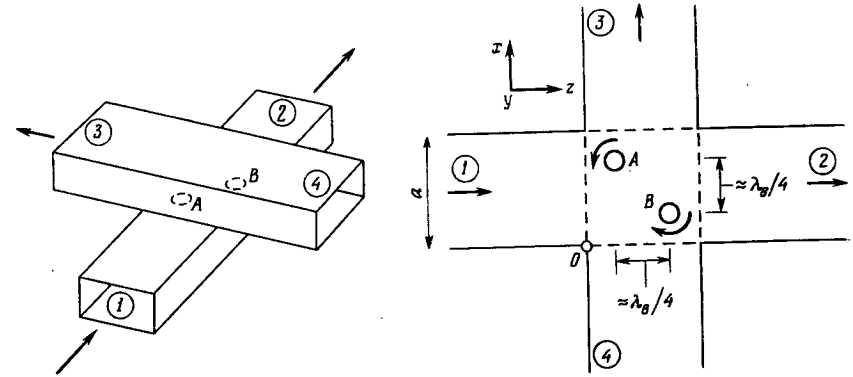
$$H_{zB} = \cos \frac{\pi x_2}{a} e^{-j(\pi/2)} = j \cos \frac{\pi x_1}{a}, \quad (4.5.10'')$$

так как очевидно, что

$$x_2 = a - x_1.$$

Вычитание полей происходит в плече 4, поскольку H_{zA} принимает значение $-j \cos(\pi x_1/a)$ у щели B, а сложение — в плече 3 (H_{zB} принимает значение $\cos(\pi x_1/a)$ у щели A).

д. **Крестообразный направленный ответвитель.** Крестообразный ответвитель показан на фиг. 4.5.6. Два волновода перекрещиваются под прямым углом; в общей для них широкой стенке имеются два отверстия связи. Форма и расположение отверстий определены



Ф и г. 4.5.6. Крестообразный направленный ответвитель.

эмпирически. Оба отверстия A и B удалены на расстояние $a/4$ от стенки и разнесены друг от друга приблизительно на $\lambda_B/4$ (в рабочем диапазоне частот для данных волнопроводов).

Для объяснения работы такого ответвителя достаточно рассмотреть только магнитные поля.

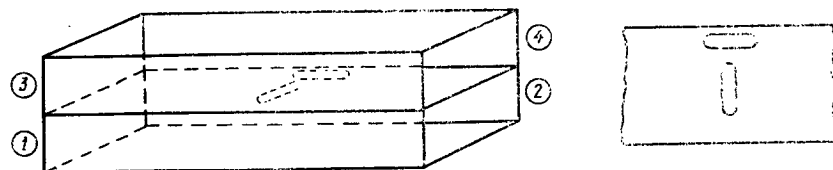
В области расположения отверстия A магнитное поле волновода 1—2 имеет правостороннюю круговую поляризацию (см. приложение XII). Через отверстие A в волновод 3—4 ответвляется магнитное поле также с правосторонней поляризацией, в результате чего энергия ответвленного сигнала движется в направлении плеча 3. Однако при ответвлении направление распространения изменяется на 90° , поэтому фаза волны в волновод 3—4 отстает на 90° от фазы волны в волновод 1—2.

В месте расположения отверстия B имеем аналогичную картину. Здесь магнитное поле с левосторонней круговой поляризацией в волновод 3—4, и энергия также поступает в направлении к плечу 3. При этом, так как волна сделала правосторонний поворот на 90° , фаза волны в волновод 3—4 опережает фазу волны в волновод 1—2 на 90° .

В плече 3 ответвленные волны находятся в фазе, поскольку волна B отстает по фазе на 90° (-180° из-за наличия промежутка

между отверстиями и $+90^\circ$ вследствие поворота) и волна A также отстает на 90° .

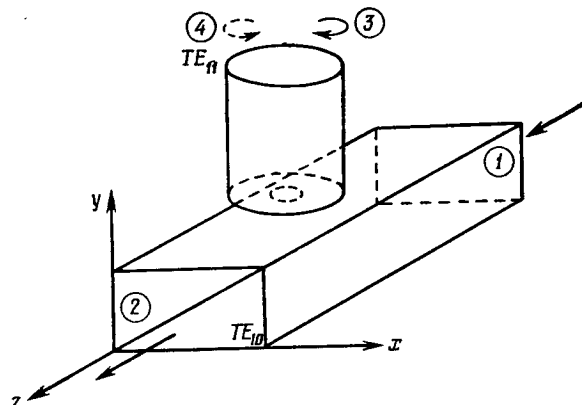
Таким образом, каждое из отверстий обеспечивает направленность. При разнесении отверстий на расстояние $\lambda_B/4$ направленность



Ф и г. 4.5.7. Направленный ответвитель Риблета.

увеличивается. Кроме того, это приводит к увеличению ответвляемого сигнала в плечо 3 и содействует уменьшению сигнала в нежелательном направлении (ср. с фиг. 4.1.2).

Другой способ связи, использующей круговую поляризацию (направленная связь), имеет место в ответвителе Риблета с двумя



Ф и г. 4.5.8. Поляризационный направленный ответвитель.

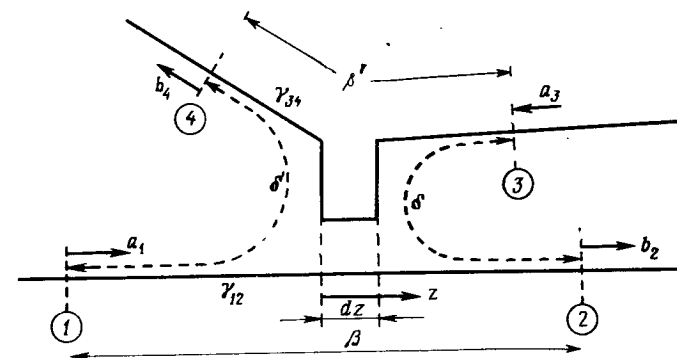
щелями, расположенными в виде буквы Т (фиг. 4.5.7). Щели подбираются и размещаются таким образом, что в ответвленном магнитном поле составляющие H_z и H_x связаны соотношением

$$H_z = \pm jH_x. \quad (4.5.11)$$

В соответствии с тем же принципом направленная передача сигнала может осуществляться от прямоугольного к круглому волноводу, в котором ответвленный сигнал обладает круговой поляризацией магнитного поля. Если диаметр круглого волновода

выбран так, что последний пропускает только волну низшего типа TE_{11} , то ответвленная волна окажется поляризованной по кругу. Плечо 3 будет соответствовать левосторонней круговой поляризации (фиг. 4.5.8), и ответвление в него будет происходить при распространении сигнала от плеча 1 к плечу 2. В плечо 4 (правосторонняя круговая поляризация) будет поступать сигнал, если распространение происходит от плеча 2 к плечу 1 (см. приложение XII).

е. Распределенная связь. При увеличении длины взаимодействия между двумя линиями в направленном ответвителе типа системы двух двухпроводных линий коэффициент связи сначала увеличивается до единицы, а затем начинает уменьшаться и, наконец,



Ф и г. 4.5.9. Распределенная связь.

становится равным нулю. Чтобы объяснить этот кажущийся аномальным эффект, следует рассмотреть связанные типы волн [20], теория которых учитывает не только связь в направлении от линии 1—2 к линии 3—4, но и обратную связь от линии 3—4 к линии 1—2. Такое рассмотрение всегда необходимо проводить, если связь значительна и имеет распределенный характер.

Для случая сосредоточенной связи выражения для выходных волн b_2 и b_4 (фиг. 4.5.9) можно получить из уравнений (4.5.1) и (4.5.2)

$$\begin{aligned} b_2 &= \beta a_1 + \delta a_3, \\ b_4 &= \delta' a_1 + \beta' a_3. \end{aligned} \quad (4.5.12)$$

Выберем плоскость отсчета так, чтобы

$$\begin{aligned} \beta &= \beta' && \text{(действительная величина),} \\ \delta &= -\delta'^* \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Тогда выражения (4.5.12) запишутся в виде

$$\begin{aligned} b_2 &= \sqrt{1-k^2} a_1 + k e^{j\theta_1} a_3, \\ b_4 &= -k e^{-j\theta_1} a_1 + \sqrt{1-k^2} a_3, \end{aligned} \quad (4.5.13)$$

где k — коэффициент связи.

Если связь отсутствует ($k=0$), то

$$\begin{aligned} b_2 &= b_{02} = a_1, \\ b_4 &= b_{04} = a_3. \end{aligned} \quad (4.5.14)$$

Введем по оси z бесконечно малую область связи dz так, что коэффициент связи будет пропорционален dz , т. е.

$$k = K dz, \quad (4.5.15)$$

где K — переходное ослабление на единицу длины.

Тогда и фазы, и амплитуды волн b_2 и b_4 изменятся по сравнению со случаем сосредоточенной связи.

Электрическая длина для волны a_1 увеличится на величину $\gamma_{12} dz$, где γ_{12} — постоянная распространения в линии 1—2. Соответствующее увеличение для волны a_3 равно $\gamma_{34} dz$, где γ_{34} — постоянная распространения в линии 3—4. Для связанных волн электрическая длина увеличится на величину $1/2(\gamma_{12} + \gamma_{34}) dz$. Если пренебречь величинами $(dz)^2$, то волны b_2 и b_4 теперь записываются в виде

$$\begin{aligned} b_2 &= b_{02} + db_2 = e^{-j\gamma_{12} dz} a_1 + K dz e^{j\left(\theta_1 - \frac{\gamma_{12} + \gamma_{34}}{2} dz\right)} a_3, \\ b_4 &= b_{04} + db_4 = -K dz e^{-j\left(\theta_1 + \frac{\gamma_{12} + \gamma_{34}}{2} dz\right)} a_1 + e^{-j\gamma_{34} dz} a_3. \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

После подстановки приближения

$$e^{-j\gamma dz} \approx 1 - j\gamma dz$$

в соотношения (4.5.16), вновь пренебрегая членами $(dz)^2$, получим

$$\begin{aligned} db_2 &= -j\gamma_{12} dz b_{02} + K dz e^{j\theta_1} b_{04}, \\ db_4 &= -K dz e^{-j\theta_1} b_{02} - j\gamma_{34} dz b_{04}. \end{aligned} \quad (4.5.17)$$

При увеличении dz необходимо произвести интегрирование. Уравнения (4.5.17) при этом остаются справедливыми, если b_{02} и b_{04} заданы как величины, интегрируемые по z . В этом смысле обозначения можно изменить: b_{02} на b_2 , b_{04} на b_4 , где b_2 и b_4 — переменные величины.

В пределе уравнения (4.5.17) превращаются в два совместных дифференциальных уравнения

$$\begin{aligned} \frac{db_2}{dz} + j\gamma_{12} b_2 - K e^{j\theta_1} b_4 &= 0, \\ \frac{db_4}{dz} + j\gamma_{34} b_4 + K e^{-j\theta_1} b_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

Будем искать решения этих уравнений в виде $B e^{-j\gamma z}$ для b_2 и $B' e^{-j\gamma z}$ для b_4 . Подставим их в уравнения (4.5.18)

$$\begin{aligned} jB(\gamma_{12} - \gamma) - B' K e^{j\theta_1} &= 0, \\ BK e^{-j\theta_1} + jB'(\gamma_{34} - \gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

Исключим постоянные B и B'

$$\frac{B'}{B} = j \frac{\gamma_{12} - \gamma}{K e^{j\theta_1}}; \quad (4.5.20)$$

тогда

$$K e^{-j\theta_1} - \frac{(\gamma_{34} - \gamma)(\gamma_{12} - \gamma)}{K e^{j\theta_1}} = 0 \quad (4.5.21)$$

или

$$\gamma^2 - (\gamma_{12} + \gamma_{34})\gamma + (\gamma_{12}\gamma_{34} - K^2) = 0. \quad (4.5.21')$$

Решения последнего уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{\gamma_{12} + \gamma_{34}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_{12} - \gamma_{34}}{2}\right)^2 + K^2}, \\ \gamma_2 &= \frac{\gamma_{12} + \gamma_{34}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\gamma_{12} - \gamma_{34}}{2}\right)^2 + K^2}. \end{aligned} \quad (4.5.22)$$

Общие решения для b_2 и b_4 запишутся таким образом:

$$\begin{aligned} b_2 &= B_1 e^{-j\gamma_1 z} + B_2 e^{-j\gamma_2 z}, \\ b_4 &= j \left[\frac{\gamma_{12} - \gamma_1}{K} B_1 e^{-j\gamma_1 z} + \frac{\gamma_{12} - \gamma_2}{K} B_2 e^{-j\gamma_2 z} \right]. \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

Если $\gamma_{12} = \gamma_{34} = \gamma_0$, как в случае системы двух двухпроводных линий (волна типа ТЕМ), выражения (4.5.22) упрощаются

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \gamma_0 + K, \\ \gamma_2 &= \gamma_0 - K. \end{aligned} \quad (4.5.22')$$

Теперь, если положить $a_1 = a_1$, $a_3 = 0$, что имеет место при $z = 0$ (связь отсутствует), то уравнение (4.5.23) примет вид

$$\begin{aligned} b_2 &= B_1 + B_2 = a_1, \\ b_4 &= -B_1 + B_2 = 0, \end{aligned} \quad (4.5.23')$$

откуда $B_1 = B_2 = a_1/2$.

Окончательно на выходе системы двух двухпроводных линий имеем

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{a_1}{2} (e^{-j(\gamma_0+K)z} + e^{-j(\gamma_0-K)z}) = a_1 e^{-j\gamma_0 z} \cos Kz, \\ b_4 &= j \frac{a_1}{2} (-e^{-j(\gamma_0+K)z} + e^{-j(\gamma_0-K)z}) = a_1 e^{-j\gamma_0 z} \sin Kz, \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

Таким образом, амплитуда волны, ответвляемой в плечо 4, увеличивается для малых Kz до значения $Kz = \pi/2$, при котором $|b_4| = |a_1|$ и $b_2 = 0$, т. е. вся мощность поступает в линию 3—4. При дальнейшем увеличении z происходит обратный процесс, т. е. мощность из линии 3—4 начинает возвращаться обратно в линию 1—2. Читатель может проверить, что аналогичный процесс имеет место при каскадном соединении волноводных ответвителей. Например, при соединении двух трехдецибелльных гибридных устройств получаем полное ответвление мощности во вспомогательную линию (§ 8.1, п. «в»). Соединяя три гибридных устройства, получим трехдецибелльную связь, а при соединении четырех гибридных устройств во вспомогательную линию мощность совсем не ответвляется.

§ 4.6. ФАЗОВРАЩАТЕЛИ И АТТЕНУАТОРЫ

а. Диэлектрические фазовращатели. Простейший фазовращатель можно получить, если в прямоугольный волновод ввести диэлектрическую пластину толщиной t , высотой h , имеющую диэлектрическую проницаемость ϵ и расположенную параллельно электрическим силовым линиям (волна типа TE_{10}).

Пусть пластина находится на расстоянии $x = x_1$ от стенки. Постоянная распространения всей системы является функцией величин ϵ , t , h и x_1 и не поддается строгому расчету; только для случая $h = b$ точное ее значение находится достаточно просто.

Для инженерных расчетов как качественные, так и достаточно точные количественные оценки могут быть получены из формулы возмущения, приведенной в приложении XIII:

$$\beta - \beta_0 = \epsilon_0 (\epsilon' - 1) \frac{\omega \int_{\Delta S} \mathbf{E}'_0^* \mathbf{E}' da}{4P}, \quad (\text{XIII.32})$$

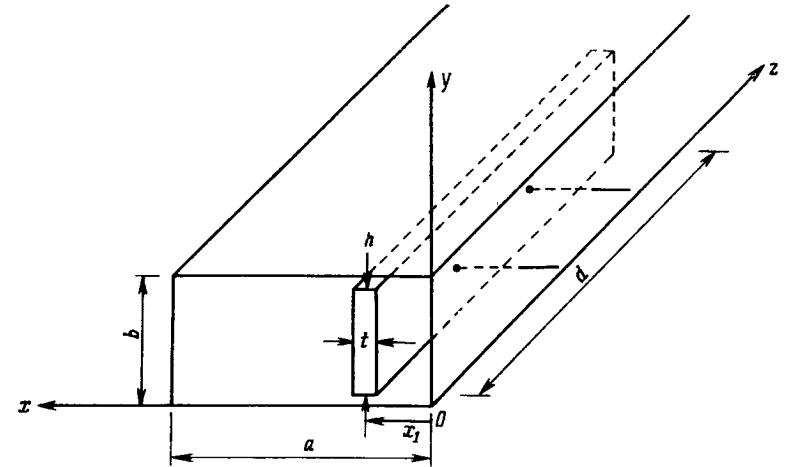
где β — действительная часть постоянной распространения γ системы в целом; β_0 — действительная часть постоянной распространения γ_0 полого волновода; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость свободного пространства; ϵ' — относительная диэлектрическая проницаемость материала пластины; \mathbf{E}'_0 — напряженность электрического поля в полном волноводе (множитель $e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}$ не учитывается);

\mathbf{E}' — напряженность электрического поля системы в целом (множитель $e^{j(\omega t - \gamma z)}$ не учитывается).

Пользуясь обозначениями, приведенными на фиг. 4.6.1 (волна типа TE_{10}), и уравнением (1.2.1), запишем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}'_0 = a_y E_m \sin \frac{\pi x}{a}. \quad (4.6.1)$$

Через E_m обозначено значение \mathbf{E}' при $x = a/2$, так как тангенциальные составляющие на границе раздела двух сред равны



Фиг. 4.6.1. Фазовращатель с диэлектрической пластиной.

и возмущение считается пренебрежимо малым вне диэлектрической пластины.

Запишем выражение для P через \mathbf{E}'_0 на основании уравнения (1.2.12)

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2Z_0} \int_S |\mathbf{E}_t|^2 da = \frac{E_m^2}{2Z_0} \int_0^b \int_0^a \sin^2 \frac{\pi x}{a} dx dy = \\ &= \frac{E_m^2}{4Z_0} ab = \frac{E_m^2}{4Z_0} S, \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

где

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0} \lambda_{в0} / \lambda.$$

Ширина пластины t предполагается малой, поэтому

$$\int_{\Delta S} \mathbf{E}'_0^* \mathbf{E}' da = th E_m^2 \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} = E_m^2 \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} \Delta S.$$

Из уравнения (XIII.32) разность фазовых постоянных

$$\begin{aligned} \beta - \beta_0 &= (\epsilon' - 1) (\omega \epsilon_0 \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}) (\lambda_{B0} / \lambda) \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} (\Delta S / S) = \\ &= 2\pi (\epsilon' - 1) \left(\frac{\Delta S}{S} \right) \frac{\lambda_{B0}}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

или

$$\frac{1}{\lambda_B} - \frac{1}{\lambda_{B0}} = (\epsilon' - 1) \left(\frac{\Delta S}{S} \right) \frac{\lambda_{B0}}{\lambda^2} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}. \quad (4.6.3')$$

Таким образом, соотношение (4.6.3') характеризует зависимость длины волны рассматриваемой системы λ_B от диэлектрической проницаемости материала пластины ϵ' , относительной площади поперечного сечения пластины $\Delta S/S$ и расположения пластины x_1 . Как и следовало ожидать, максимальное влияние пластины оказывает при $x_1 = a/2$, а минимальное при $x_1 = 0$.

Читателю следует помнить, что уравнение (4.6.3) приближенное и справедливо только при выполнении допущений теории возмущений. В частности, им нельзя пользоваться, если значения ϵ' и t велики или если $\lambda_{B0} \gg \lambda$ (область, близкая к отсечке). Кроме того, уравнение несправедливо, если размер h мало отличается от размера t .

В практических конструкциях фазовращателей пластины заостряются с двух сторон для уменьшения отражений, а перемещение их в поперечном направлении осуществляется с помощью двух поддерживающих штырьков, разнесенных на расстояние около $\lambda_B/4$. При работе в узкой полосе частот вместо клинообразных концов можно применить согласующие одноступенчатые трансформаторы (см. § 4.1).

Как видно из уравнения (4.6.3), основным недостатком рассматриваемого фазовращателя является зависимость фазового сдвига $[(1/\lambda_B) - (1/\lambda_{B0})] 2\pi d$ от отношения λ_{B0}/λ^2 , иными словами, от частоты.

6. Атенуатор с поглощающей пластиной. По внешнему виду и конструкции рассматриваемый ослабитель напоминает фазовращатель с диэлектрической пластиной, однако теперь последняя заменена поглощающей пластиной.

Величину ослабления сигнала можно оценить по уравнению (XIII.33) в приложении XIII

$$\alpha = \epsilon_0 \epsilon'' \frac{\omega \int_{\Delta S} \mathbf{E}' * \mathbf{E}' da}{4P}, \quad (XIII.33)$$

если не нарушаются начальные предпосылки теории возмущений.

Величина ϵ'' является мнимой частью комплексной диэлектрической проницаемости

$$\epsilon = \epsilon_0 (\epsilon' - j\epsilon''). \quad (XIII.12)$$

ϵ'' можно определить как $\sigma/\epsilon_0\omega$, поскольку четвертое уравнение Максвелла с учетом зависимости от времени $e^{j\omega t}$ можно записать в виде

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + j\omega \epsilon' \epsilon_0 \mathbf{E} = j\omega \epsilon \mathbf{E}, \quad (4.6.4)$$

где

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(\epsilon' - j \frac{\sigma}{\epsilon_0 \omega} \right).$$

После проведения преобразований, аналогичных проделанным для фазовращателя, уравнение (XIII.33) примет вид

$$\begin{aligned} \alpha &= \epsilon'' \epsilon_0 \frac{\omega t h \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} Z_0}{ab} = \\ &= \frac{h}{R_s} \left(\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{\lambda_{B0}}{\lambda} \right) \frac{1}{ab} \sin^2 \frac{\pi x_1}{a}, \text{ nep/m}, \end{aligned} \quad (4.6.5)$$

где R_s — поверхностное сопротивление материала пластины. Оно связано с t и σ соотношением [2]

$$R_s = \frac{1}{\sigma t} \quad (4.6.6)$$

при условии что, t меньше глубины проникновения поля в поглощающий материал.

Выражение (4.6.5) определяет зависимость α от R_s : чем меньше R_s , тем больше α . Однако для очень малых значений R_s (обычно меньше 50 ом) предпосылки теории возмущений не выполняются.

Выражение (4.6.5) показывает также, что величина α пропорциональна $\sin^2(\pi x_1/a)$, т. е. $\alpha = 0$, если $x = 0$, и имеет максимальное значение при расположении пластины в центре волновода ($x_1 = a/2$).

На практике изменение ослабления мощности осуществляется либо перемещением пластины в поперечном направлении (изменение x_1), либо изменением h путем введения пластины через продольную щель в центре широкой стенки волновода (аттенуатор ножевого типа). В любом случае для уменьшения отражений пластина должна иметь плавные скосы на концах или должна содержать согласующие трансформаторы.

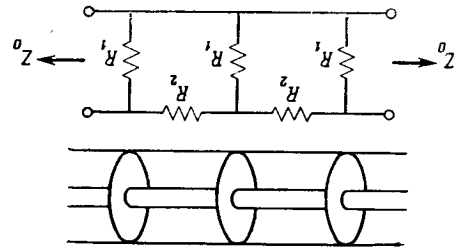
Как видно из уравнения (4.6.5), основным недостатком ножевого аттенуатора, подобно рассмотренному выше фазовращателю,

является зависимость ослабления α от отношения λ_B/λ_r иначе говоря, от частоты колебаний.

в. Атенюатор с поглощающими стенками. В прямоугольном волноводе, работающем на волне типа TE_{10} , затухание, вызванное поглощением мощности в стенках, определяется через поверхностное сопротивление R_s по уравнению [2]

$$\alpha = \frac{R_s}{b} \frac{\lambda_B}{\sqrt{\mu/\epsilon}} \frac{\lambda_B}{\lambda} \left[1 + \frac{2b}{a} \left(\frac{\lambda}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2 \right], \text{ неп/м.} \quad (4.6.7)$$

Атенюатор с поглощающими стенками обладает рядом недостатков, а именно: зависимостью ослабления от частоты, отсутствием регулировки ослабления, значительными величинами R_s ,



Ф и г. 4.6.2. Короткий коаксиальный аттенюатор.

требующимися для создания коротких систем. Однако он применяется для рассеяния больших уровней мощности, так как выделяющееся тепло легко отводится от стенок волновода.

Для двухпроводных линий на волне типа TEM имеется следующая зависимость затухания от R — последовательного сопротивления на единицу длины [24]:

$$\alpha \approx 0,5 \frac{R}{Z_0}, \text{ неп/м,} \quad (4.6.8)$$

где Z_0 — характеристическое сопротивление, выраженное через напряжение и ток. В этом случае затухание не зависит от частоты, если R не меняется с изменением частоты (последнее условие обеспечивается при использовании поглощающей пленки толщиной t , меньшей глубины проникновения на любой рабочей частоте). Поглощающие стенки используются в прецизионных коаксиальных ослабителях (с соответствующими согласующими секциями), а также в полосковых линиях, где поглощающая полоска расположена перпендикулярно силовым линиям электрического поля.

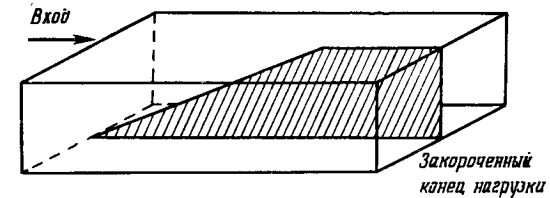
На низких частотах удобно пользоваться эквивалентными цепями с сосредоточенными постоянными, так как размеры элементов передающих линий становятся малыми по сравнению

с длиной волны. Одна из возможных эквивалентных схем показана на фиг. 4.6.2 [9], где

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{Z_0}{\text{th}(\alpha_T/2)}, \\ R_2 &= Z_0 \text{sh} \alpha_T, \end{aligned} \quad (4.6.9)$$

α_T — полное ослабление в неперлах.

г. Согласованные нагрузки. Согласованные нагрузки в общем случае представляют закороченные с одного конца аттенюаторы.



Ф и г. 4.6.3. Согласованная нагрузка ножевого типа.

Подводимая ко входу мощность P_0 ослабляется у короткозамкнутого конца на величину, определяемую множителем $e^{-2\alpha_T}$. Непоглощенная мощность отражается и вновь ослабляется при обратном прохождении как $e^{-2\alpha_T}$. В итоге мощность, отражаемая от нагрузки, равна

$$P_{\text{отр}} = P_0 e^{-4\alpha_T} = P_0 e^{-4\alpha d}, \quad (4.6.10)$$

где d — длина нагрузки, а α — коэффициент затухания, неп/м.

Выбирая достаточно большое значение α_T , можно получить $P_{\text{отр}}$ меньше любой наперед заданной величины. Для уменьшения отражений от входного конца нагрузки используются либо скос поглощающего материала, либо согласующие трансформаторы.

Для низкого уровня мощности согласованные нагрузки выполняются в виде закороченного отрезка волновода с расположенной внутри поглощающей пластиной (фиг. 4.6.3) или закороченного отрезка коаксиальной линии с поглощающим мощность центральным проводником.

Для среднего и высокого уровней мощности используется поглощение в стенках. Из уравнения (4.6.7) видно, что α увеличивается при уменьшении размеров b и a (λ_B увеличивается). Практическое решение для волноводов состоит в уменьшении размеров a и b и в применении поглощающего материала с большим значением поверхностного сопротивления R_s . В других конструкциях вместо пластины используются клинообразные или конусные

вставки из поглощающего материала. При этом достигается эффективное поглощение в стенках и, кроме того, поперечное сечение плавно уменьшается. В коаксиальных линиях α увеличивается с уменьшением расстояния между внутренним и внешним проводниками, так как [из уравнения (4.6.8)] Z_0 при этом уменьшается [см. выражения (1.6.2а) и (1.6.2б)]. В практических конструкциях диаметр внутреннего проводника с нанесенным поглощающим материалом плавно увеличивается к короткозамкнутому концу.

§ 4.7. ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВЫЕ И ПОЛУВОЛНОВЫЕ ПЛАСТИНЫ [4, 5, 21]

а. Четвертьволновые пластины. Рассмотрим круглый волновод, работающий на волне типа TE_{11} и содержащий внутри диэлектрическую пластину конечной длины. Форма или расположение пластины таковы, что обе составляющие волны TE_{11} , одна из которых поляризована в плоскости, параллельной плоскости расположения пластины, а вторая — в плоскости, перпендикулярной к первой, не имеют отражений. Допустим далее, что три параметра пластины — длина, толщина и диэлектрическая проницаемость — выбраны так, что на выходе волна, поляризованная вдоль пластины, на 90° отстает от волны, поляризованной в плоскости, перпендикулярной к пластине. Такая система представляет собой дифференциальную 90° -секцию или четвертьволновую пластину (условное обозначение такой пластины $\Delta 90^\circ$).

Рассматриваемая в целом система является существенно анизотропной в поперечной плоскости.

Дифференциальный фазовый сдвиг 90° можно получить не только указанным выше способом. Так, например, его можно получить в волноводе эллиптического поперечного сечения, а также при введении в волновод ребер, прямоугольных или овальных диафрагм и штырей. Во всех этих случаях система является существенно анизотропной в поперечной плоскости, иными словами, в этой плоскости имеется преимущественное направление¹⁾.

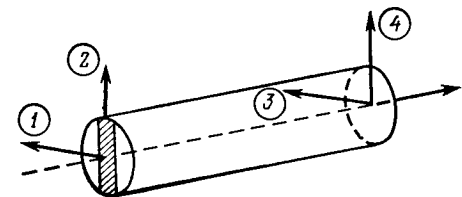
Хотя отмеченные свойства четвертьволновой пластины позволяют в каждом отдельном случае определить, что произойдет с волной, поданной на вход пластины [4, 5, 21], более удобно исследовать ее воздействие с помощью матрицы рассеяния. Задача состоит, следовательно, в нахождении этой матрицы.

Четвертьволновую пластину следует рассматривать как четырехплечевую систему. Несмотря на то что фактически мы имеем только

¹⁾ Турникетное соединение, у которого два противоположных плеча закорочены, как показано на фиг. 3.8.4 ($\theta_2 = \pi/4$), также представляет собой дифференциальную 90° -секцию, имеющую анизотропию в поперечной плоскости.

один вход и один выход, будем считать, что существуют два плеча на входе и два плеча на выходе, так как при рассмотрении принципа действия системы используется вырождение волны типа TE_{11} . Те волны на входе, направленные электрического вектора которых параллельно диэлектрической вставке, входят в плечо 2, а волны с электрическим вектором, перпендикулярным к диэлектрику, входят в плечо 1.

Волну, поляризованную в произвольно выбранной плоскости, можно рассматривать как сумму волн, входящих в плечи 1 и 2.



Фиг. 4.7.1. Четвертьволновая пластина.

На выходе плечо 3 соответствует плечу 1, а плечо 4 — плечу 2 (фиг. 4.7.1). Направления плечей 1, 2 и ось z образуют правинтовую тройку векторов.

Пусть волна a_1 входит в плечо 1. При прохождении секции фаза ее изменяется на угол φ_1 , так что волна, выходящая из плеча 3,

$$b_3 = a_1 e^{-j\varphi_1}. \quad (4.7.1)$$

Аналогично, если волна a_2 входит в плечо 2, то фаза ее изменяется на угол $\varphi_1 + \pi/2$.

Тогда из плеча 4 выйдет волна

$$b_4 = a_2 e^{-j(\varphi_1 + \pi/2)} = -ja_2 e^{-j\varphi_1}. \quad (4.7.2)$$

В силу очевидных свойств обратимости между парами a_1, b_3 и a_3, b_1 , с одной стороны, и a_2, b_4 и a_4, b_2 — с другой, имеем

$$b_1 = a_3 e^{-j\varphi_1}, \quad (4.7.3)$$

$$b_2 = a_4 e^{-j(\varphi_1 + \pi/2)} = -ja_4 e^{-j\varphi_1}. \quad (4.7.4)$$

Сопоставляя все записанные величины, получим матрицу рассеяния четвертьволновой пластины

$$[S]_{\Delta 90^\circ} = e^{-j\varphi_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.7.5)$$

Действительно, выражение $[S] \mathbf{a} = \mathbf{b}$ охватывает выражения (4.7.1) — (4.7.4).

Свойства четвертьволновой пластины можно непосредственно вывести из уравнения (4.7.5).

Из них наибольший интерес представляют следующие.

1. Волна, линейно поляризованная в плоскости, расположенной под углом 45° к плечу 1, на выходе превращается в поляризованную по кругу волну (правополяризованная волна).

Действительно, если $a_1 = a_2 = ae^{j\varphi_0}$, где φ_0 — произвольный фазовый угол, на выходе получим

$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ -ja \end{vmatrix} \quad (4.7.6)$$

Правая часть представляет собой математическую запись правополяризованной по кругу волны (см. приложение VII).

2. Волна, линейно поляризованная в плоскости, расположенной под углом -45° по отношению к плечу 1, преобразуется в левополяризованную по кругу волну.

Если $a_1 = -a_2 = ae^{j\varphi_0}$, то на выходе имеем

$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ -a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ ja \end{vmatrix} \quad (4.7.7)$$

В правой части записана левополяризованная по кругу волна (см. приложение VII).

3. Правополяризованная по кругу волна преобразуется в линейно поляризованную волну с плоскостью поляризации, расположенной под углом -45° к плечу 1, т. е.

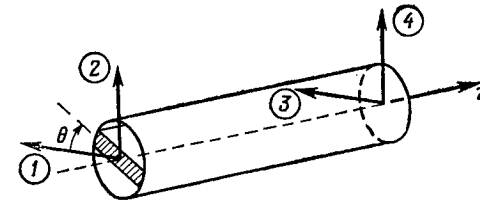
$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ -ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ -a \end{vmatrix} \quad (4.7.8)$$

4. Левополяризованная по кругу волна преобразуется в линейно поляризованную волну с плоскостью поляризации, расположенной под углом $+45^\circ$ к плечу 1, т. е.

$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a \end{vmatrix} \quad (4.7.9)$$

б. Полуволновая пластина. Полуволновая пластина по принципу действия аналогична четвертьволновой, за исключением того, что составляющая падающей волны, поляризованная в плоскости, параллельной диэлектрической пластине, имеет сдвиг фазы, на 180° больший, чем составляющая, поляризованная в плоскости, перпендикулярной к первой.

Если в четвертьволновой пластине плоскость диэлектрической вставки соответствует плечам 2 и 4, то в полуволновой пластине



Ф и г. 4.7.2. Полуволновая пластина.

плоскость диэлектрика ориентирована под произвольным углом θ ; положительный угол считается по часовой стрелке от направления плеча 1 (фиг. 4.7.2).

Воздействие полуволновой пластины на волну a_1 , входящую в плечо 1, довольно сложно. На выходе получим не только волну, выходящую из плеча 3, но и волну, выходящую из плеча 4.

Падающая волна a_1 может рассматриваться как векторная сумма двух взаимно перпендикулярных составляющих, одна из которых параллельна, а другая перпендикулярна диэлектрической пластине (фиг. 4.7.3). При прохождении системы фаза волны a_1^\perp изменится на угол φ_2 , а фаза волны a_1^\parallel — на угол $(\varphi_2 + 180^\circ)$. Запишем a_1^\perp и a_1^\parallel через a_1

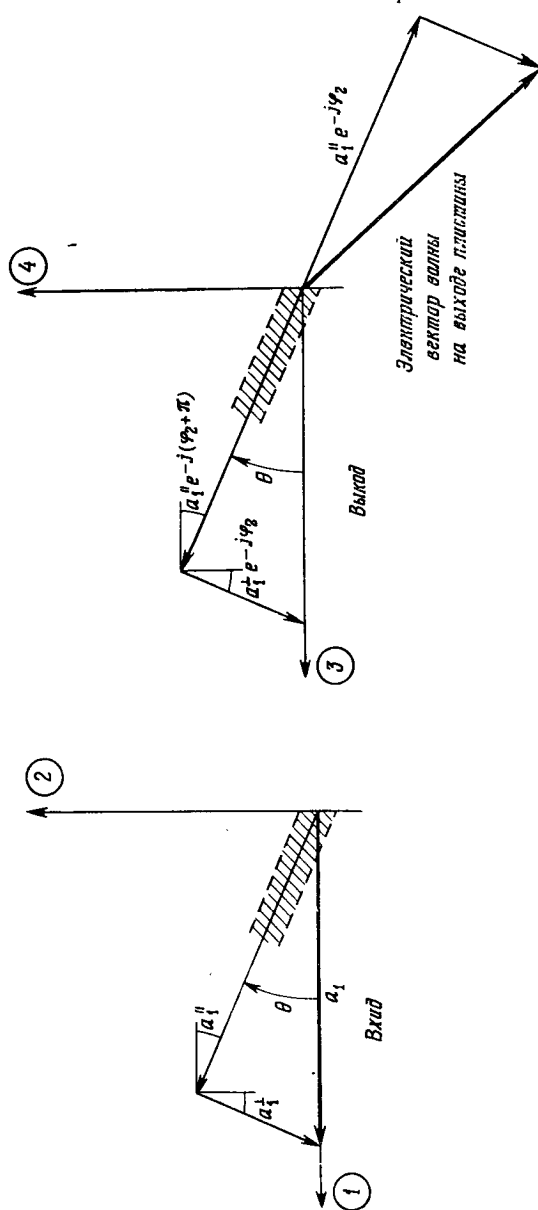
$$\begin{aligned} a_1^\perp &= a_1 \sin \theta, \\ a_1^\parallel &= a_1 \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.7.10)$$

Тогда на выходе получим

$$\begin{aligned} a_{1\text{ВЫХ}}^\perp &= a_1 \sin \theta e^{-j\varphi_2}, \\ a_{1\text{ВЫХ}}^\parallel &= a_1 \cos \theta e^{-j(\varphi_2 + 180^\circ)} = -a_1 \cos \theta e^{-j\varphi_2}. \end{aligned} \quad (4.7.11)$$

Эти величины можно привести к плоскости плеча 3

$$\begin{aligned} b_3 &= a_{1\text{ВЫХ}}^\perp \sin \theta + a_{1\text{ВЫХ}}^\parallel \cos \theta = \\ &= a_1 (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) e^{-j\varphi_2} = -a_1 \cos 2\theta e^{-j\varphi_2} \end{aligned} \quad (4.7.12)$$



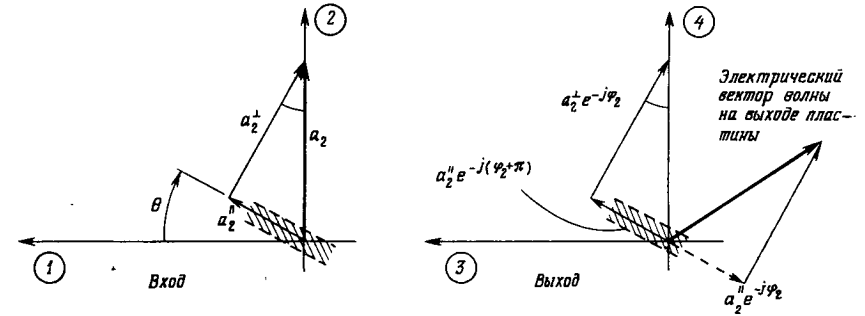
Ф и г. 4.7.3. Воздействие полуволновой пластины на волну a_1 .

и к плоскости плеча 4

$$b_4 = -a_{1\text{ВЫХ}}^{\perp} \cos \theta + a_{1\text{ВЫХ}}^{\parallel} \sin \theta = -a_1 (\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) e^{-j\varphi_2} = -a_1 \sin 2\theta e^{-j\varphi_2}. \quad (4.7.13)$$

Таким образом, первый столбец (и первая строка, так как система симметрична) матрицы рассеяния должен состоять из элементов 0, 0, $-\cos 2\theta$, $-\sin 2\theta$.

Аналогично волну a_2 можно рассматривать как векторную сумму двух ортогональных составляющих, одна из которых



Ф и г. 4.7.4. Воздействие полуволновой пластины на волну a_2 .

параллельна, а вторая перпендикулярна плоскости диэлектрической вставки (фиг. 4.7.4). После прохождения полуволновой пластины фаза волны a_2^{\perp} изменится на угол φ_2 , а фаза волны a_2^{\parallel} — на угол $(\varphi_2 + 180^\circ)$.

Запишем a_2^{\perp} и a_2^{\parallel} через a_2

$$\begin{aligned} a_2^{\perp} &= a_2 \cos \theta, \\ a_2^{\parallel} &= a_2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (4.7.14)$$

Тогда на выходе получим

$$\begin{aligned} a_{2\text{ВЫХ}}^{\perp} &= a_2 \cos \theta e^{-j\varphi_2}, \\ a_{2\text{ВЫХ}}^{\parallel} &= a_2 \sin \theta e^{-j(\varphi_2 + 180^\circ)} = -a_2 \sin \theta e^{-j\varphi_2}. \end{aligned} \quad (4.7.15)$$

Эти выходные величины можно разложить на составляющие в плоскостях плеч 3 и 4.

В плоскости плеча 3

$$b_3 = -a_{2\text{ВЫХ}}^{\perp} \sin \theta + a_{2\text{ВЫХ}}^{\parallel} \cos \theta = -a_2 (\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) e^{-j\varphi_2} = -a_2 \sin 2\theta e^{-j\varphi_2}. \quad (4.7.16)$$

В плоскости плеча 4

$$b_4 = a_{2\text{ВЫХ}}^\perp \cos \theta + a_{2\text{ВЫХ}}^{\parallel} \sin \theta = a_2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) e^{-j\varphi_2} = a_2 \cos 2\theta e^{-j\varphi_2}. \quad (4.7.17)$$

Следовательно, второй ряд (и вторая строка, так как система симметрична) матрицы рассеяния должен состоять из элементов 0, 0, $-\sin 2\theta$, $\cos 2\theta$.

Полностью матрица рассеяния для полуволновой пластины имеет вид

$$[S]_{\Delta 180^\circ} = e^{-j\varphi_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.7.18)$$

Напомним, что θ — положительный пространственный угол между плечом 1 и плоскостью диэлектрика. В прецизионном фазовращателе (§ 4.8) θ — переменный угол, поэтому элементы матрицы рассеяния (4.7.18) также являются переменными величинами.

Свойства полуволновой пластины определяются из вида матрицы рассеяния (4.7.18). Представляют интерес следующие свойства:

1. Правополяризованная по кругу волна, подведенная к входу полуволновой пластины, преобразуется на выходе в левополяризованную волну. Более того, фаза каждой компоненты изменяется на угол, одна часть которого постоянна, а другая часть равна удвоенному пространственному углу θ .

2. Левополяризованная по кругу волна преобразуется в правополяризованную. Кроме того, фаза каждой компоненты, с одной стороны, уменьшается на постоянный угол, а с другой — увеличивается на угол, равный удвоенному пространственному углу θ .

Пусть

$$a = e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ \mp ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

(см. приложение VII), где знак « $-$ » относится к правополяризованной волне, а « $+$ » — к левополяризованной.

На выходе имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= e^{-j\varphi_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ \mp ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \\ &= ae^{-j(\varphi_2 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\cos 2\theta \pm j\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta \mp j\cos 2\theta \end{vmatrix} = ae^{-j(\varphi_2 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{\mp j2\theta} \\ \mp je^{\mp j2\theta} \end{vmatrix} = \\ &= ae^{-j(\psi \pm 2\theta)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ \pm ja \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.7.19)$$

где угол $\psi = \varphi_2 - \varphi_0 + \pi$ не зависит от θ .

3. Линейно поляризованная волна, плоскость поляризации которой расположена под углом θ_1 , преобразуется в линейно поляризованную волну, плоскость поляризации которой расположена под углом $(2\theta - \theta_1)$.

Пусть

$$a = e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \cos \theta_1 \\ a \sin \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Тогда на выходе

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= e^{-j\varphi_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} ae^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \\ &= ae^{-j(\varphi_2 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -(\cos 2\theta \cos \theta_1 + \sin 2\theta \sin \theta_1) \\ -(\sin 2\theta \cos \theta_1 + \cos 2\theta \sin \theta_1) \end{vmatrix} = \\ &= ae^{-j\psi} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(2\theta - \theta_1) \\ \sin(2\theta - \theta_1) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (4.7.20)$$

где $\psi = \varphi_2 - \varphi_0 + \pi$.

В частности, если $\theta = \theta_1$ (т. е. если падающая волна поляризована в плоскости диэлектрической пластины), то плоскость поляризации остается неизменной.

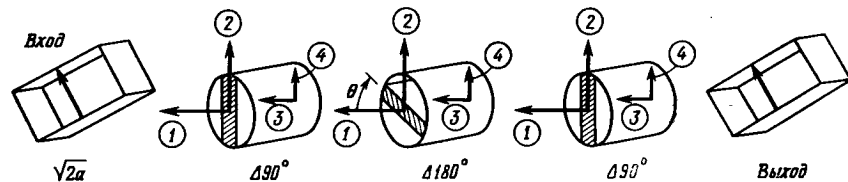
При $\theta - \theta_1 = 45^\circ$ (падающая волна поляризована в плоскости, расположенной под углом -45° по отношению к полуволновой пластине) угол ориентации поворачивается на 90° , так как

$$(2\theta - \theta_1) = 2(\theta - \theta_1) + \theta_1 = 90^\circ + \theta_1. \quad (4.7.21)$$

В приложении XIV выводится матрица рассеяния для произвольной дифференциальной секции и для произвольного угла расположения плоскости поляризации.

§ 4.8. ПРЕЦИЗИОННЫЕ ФАЗОВРАЩАТЕЛИ И АТТЕНЮАТОРЫ

а. Прецизионные дифференциальные фазовращатели. Прецизионные дифференциальные фазовращатели состоят из двух четвертьволновых пластин, вращающейся полуволновой пластины и переходов с круглого на прямоугольный волновод.



Фиг. 4.8.1. Прецизионный дифференциальный фазовращатель.

Такие фазовращатели обладают рядом преимуществ по сравнению с фазовращателями, рассмотренными в § 4.6. Дифференциальный фазовый сдвиг в них равен удвоенному пространственному углу θ , поэтому калибровка осуществляется просто и точно. Кроме того, четвертьволновые и полуволновые пластины можно сделать широкополосными [22]; но даже на частотах, где эти элементы начинают работать хуже, ошибка в определении изменения фазы волны остается обычно малой. Недостатком этих элементов являются повышенные вносимые потери.

Рассмотрим систему, изображенную на фиг. 4.8.1. Входной прямоугольный волновод, ориентированный под углом 45° к плечу 1, соединен последовательно (через переход, не показанный на фигуре) с четвертьволновой пластиной, полуволновой вращающейся пластиной, второй четвертьволновой пластиной и выходным прямоугольным волноводом (переход с круглого на прямоугольный волновод не показан).

Если для удобства записать входную волну в виде $\sqrt{2}ae^{j\varphi_0}$, то волна, которая подходит к плечу 1 первой четвертьволновой пластины, будет иметь вид

$$a_1 = ae^{j\varphi_0}.$$

Такой же вид будет иметь волна, входящая в плечо 2,

$$a_2 = ae^{j\varphi_0}.$$

Из уравнения (4.7.5)

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} = e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ -ja \end{vmatrix} \quad (4.8.1)$$

т. е. на выходе первой четвертьволновой пластины имеем правополяризованную по кругу волну.

Совершенно очевидно, что волна, входящая в плечо 1 полуволновой пластины, есть не что иное, как волна, выходящая из плеча 3 первой четвертьволновой пластины, а волна, входящая в плечо 2 полуволновой пластины, — это волна, выходящая из плеча 4 четвертьволновой пластины.

Таким образом, к полуволновой пластине подходит волна вида

$$e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} a \\ -ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}. \quad (4.8.1')$$

Из уравнения (4.7.19) на выходе полуволновой пластины получим

$$\begin{aligned} e^{-j\varphi_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ 0 & 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta \\ -\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0 & 0 \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} a \\ -ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \\ = ae^{-j(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -\cos 2\theta + j \sin 2\theta \\ -\sin 2\theta - j \cos 2\theta \end{vmatrix} = ae^{-j(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -e^{-2j\theta} \\ -je^{-2j\theta} \end{vmatrix} = \\ = e^{-j(\psi + 2\theta)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ ja \end{vmatrix} \quad (4.8.2) \end{aligned}$$

где $\psi = \varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0 + \pi$.

Выходные условия для полуволновой пластины являются входными для второй четвертьволновой пластины. Согласно уравнению (4.7.5), на выходе второй четвертьволновой пластины получим волну в виде

$$e^{-j(\psi'+2\theta)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a \end{vmatrix} \quad (4.8.3)$$

где $\psi' = 2\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0 + \pi$.

В прямоугольном волноводе на выходе системы волна запишется в виде

$$\sqrt{2}ae^{-j(\psi'+2\theta)}, \quad (4.8.4)$$

где ψ' — фиксированная величина, не зависящая от углового положения диэлектрической вставки в полуволновой пластине.

Таким образом, при изменении угла θ на $\Delta\theta$ фаза сигнала на выходе системы изменяется на величину $2\Delta\theta$.

При рассмотрении системы с несколькими полуволновыми пластинами, соединенными последовательно, вышеописанная методика может быть легко расширена. Так, согласно уравнению (4.8.2), на входе второй полуволновой пластины получим

$$e^{-j[(\varphi_1 + \varphi_2 - \varphi_0 + \pi) + 2\theta_1]} \begin{vmatrix} a \\ ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (4.8.2')$$

где теперь положение диэлектрической вставки в первой полуволновой пластине определяется углом θ_1 , а не θ .

На выходе второй полуволновой пластины

$$\mathbf{b} = ae^{-j[(\varphi_1 + 2\varphi_2 - \varphi_0) + (2\theta_1 - 2\theta_2)]} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ -ja \end{vmatrix} \quad (4.8.5)$$

где угол θ_2 определяет пространственное положение диэлектрической вставки во второй полуволновой пластине. Таким образом, фаза волны на выходе второй пластины уменьшилась на угол $2\theta_1$ и увеличилась на угол $2\theta_2$.

Если $\theta_1 = \theta_2$ (диэлектрические вставки полуволновых пластин компланарны), то изменение фазы волны не зависит от углового

расположения пластин. Это и не удивительно, так как мы получили дифференциальную 360° -секцию, которая сохраняет неизменной разность фаз любых двух волн, плоскости поляризации которых ортогональны.

При наличии трех полуволновых пластин следует воспользоваться выражением (4.8.2), при наличии четырех пластин — выражением (4.8.5) и т. д.

В общем случае при наличии n полуволновых пластин волна на выходе запишется в виде

$$\sqrt{2}ae^{-j(\psi + 2\theta_1 - 2\theta_2 + 2\theta_3 + \dots + (-1)^{n-1}2\theta_n)}. \quad (4.8.6)$$

Очевидно, что углы θ_i могут принимать положительные, отрицательные и нулевые значения.

Практический интерес представляет случай, когда выходная четвертьволновая пластина (фиг. 4.8.1) закорочена на конце. Сигнал на выходе отражается в плечи 3 и 4. Знак каждой составляющей изменяется в плоскости короткозамыкателя, так что разность фаз между ними останется неизменной.

После отражения получим волну в виде

$$e^{-j(\psi' + \pi + 2\theta)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ a \end{vmatrix} \quad (4.8.3')$$

Если проследить за этой отраженной волной обратно к входу системы, умножая ее сначала на $[S]_{\Delta 90^\circ}$, потом на $[S]_{\Delta 180^\circ}$ и, наконец, на $[S]_{\Delta 90^\circ}$, то можно доказать, что на выходе системы волна будет иметь вид $\sqrt{2}ae^{j(2\psi' + \pi + 4\theta)}$. Таким образом, фаза волны, отраженной от короткозамкнутой четвертьволновой пластины, изменяется на величину, равную 4θ . Легко также проверить, что в случае закороченной полуволновой пластины произойдет компенсация изменения фазы на угол 2θ .

Если в закороченной на конце системе имеется не одна, а много полуволновых пластин, то общие выводы, полученные ранее, сохраняют силу. При отражении от короткозамкнутой четвертьволновой пластины фаза волны уменьшается на угол $4(\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \dots + (-1)^{n-1}\theta_n)$, а при отражении волны от закороченной полуволновой пластины фаза волны на выходе остается неизменной.

Погрешности, обусловленные неидеальностью четвертьволновых и полуволновых пластин, можно оценить с помощью выражений, приведенных в приложении XIV.

Результатом воздействия неидеальной четвертьволновой пластины, дифференциальный фазовый сдвиг которой равен $\pi/2 + \delta'$, на линейно поляризованную волну

$$\mathbf{a} = e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

является сумма двух поляризованных по кругу волн: правополяризованной (рабочая волна A_0^+) и левополяризованной с малой амплитудой (паразитная волна, вызванная неидеальностью пластины, A_0^-), т. е.

$$\mathbf{b} = ae^{-j\varphi_1} \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -j \end{vmatrix} + j \frac{\delta'}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ j \end{vmatrix} \right\} \quad (\text{XIV.11})$$

где

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \delta'/2 - \varphi_0$$

или

$$\mathbf{b} = A_0^+ + j \frac{\delta'}{2} A_0^- \quad (4.8.7)$$

В результате воздействия неидеальной полуволновой пластины, дающей дифференциальный фазовый сдвиг $\pi + \delta$, на правополяризованную волну получим левополяризованную волну, сдвинутую по фазе на угол -2θ , и вызванную неидеальностью пластины правополяризованную волну с малой амплитудой (фаза ее не изменяется)

$$\mathbf{b} = ae^{-j(\varphi_2 - \varphi_0 + \pi)} \left\{ \beta e^{-j2\theta} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ j \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -j \end{vmatrix} \right\} \quad (\text{XIV.8})$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} (1 - e^{-j\delta}), \quad (\text{XIV.4})$$

$$\beta = \frac{1}{2} (1 + e^{-j\delta}).$$

Аналогично результатом воздействия такой неидеальной полуволновой пластины на левополяризованную волну является сумма правополяризованной волны и слабой не смещенной по фазе левополяризованной волны.

Если соединить выход неидеальной четвертьволновой пластины со входом неидеальной полуволновой пластины, то на выходе соединения получим четыре волны:

$$\beta A_0^- e^{-j2\theta} - \alpha A_0^+ + j\beta \frac{\delta'}{2} A_0^+ e^{j2\theta} - j\alpha \frac{\delta'}{2} A_0^-. \quad (4.8.8)$$

Наконец, в результате воздействия неидеальной четвертьволновой пластины на поляризованную по кругу волну получим две волны, линейно поляризованные во взаимно перпендикулярных плоскостях:

$$\mathbf{b} \approx ae^{-j(\varphi_1 + \delta'/2 - \varphi_0)} \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm 1 \end{vmatrix} + j \frac{\delta'}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm 1 \end{vmatrix} \right\} \quad (\text{XIV.12})$$

Отметим, что только волны, плоскости поляризации которых расположены под углом 45° к плечу Z , проходят в прямоугольный волновод (фиг. 4.8.1). Следовательно, хотя четыре волны [уравнение (4.8.8)] дают на выходе восемь волн, в прямоугольный волновод проходят только четыре из восьми волн. Остальные четыре можно исключить, если расположить параллельно широкой стенке волновода поглощающую пластину, т. е. на выходе получим следующие компоненты:

$$\beta A_0^- e^{-j2\theta} - j \frac{\delta'}{2} \alpha A_0 - \beta \frac{\delta'^2}{4} A_0 e^{+j2\theta} - j\alpha \frac{\delta'}{2} A_0. \quad (4.8.9)$$

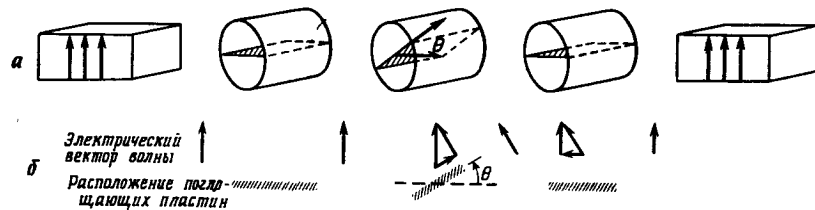
На основании этого выражения можно оценить погрешность градуированного фазового сдвига, а также потери в диэлектрике.

Отметим, что при наличии идеальных четвертьволновых пластин ($\delta' = 0$) фазовая погрешность в фазовращателе отсутствует и имеют место только потери в диэлектрике независимо от качества полуволновой пластины.

6. Прецизионные аттенюаторы. Прецизионные аттенюаторы до некоторой степени аналогичны прецизионным дифференциальным фазовращателям, поскольку калиброванное ослабление зависит от пространственного угла (хотя нелинейно) и система основана на анизотропии в поперечной плоскости.

Рассмотрим прецизионный аттенюатор, изображенный на фиг. 4.8.2. Прямоугольный волновод через переход, не показанный на фигуре, соединяется с неподвижным круглым волноводом, содержащим горизонтальную поглощающую пластину. Далее следует вращающийся отрезок круглого волновода с поглощающей пластиной, затем круглый волновод, аналогичный первому, и, наконец, выходной прямоугольный волновод (переход от круглого волновода к прямоугольному не показан).

При рассмотрении принципа действия системы предполагается, что поглощающие пластины достаточно эффективны и полностью поглощают составляющую электрического поля, параллельную им. Волна, распространяющаяся слева направо (фиг. 4.8.2), ослабляется сначала в подвижной секции пропорционально $\cos \theta$, а затем в третьей секции круглого волновода тоже пропорционально



Фиг. 4.8.2. Прецизионный аттенюатор.

$\cos \theta$ (общее ослабление пропорционально $\cos^2 \theta$). Первая секция круглого волновода работает при распространении волны в обратном направлении.

Частотные характеристики поглощающих секций не имеют значения; важно лишь, чтобы затухание было как можно большим. Максимально возможное ослабление системы определяется ослаблением в подвижной секции. Это ослабление нельзя сделать бесконечным. Следовательно, наибольшая погрешность в определении величины ослабления имеет место при больших ослаблениях. Для малых значений ослабления ошибка пренебрежимо мала, даже если ослабление каждой секции только на несколько децибелов больше, чем суммарное требуемое ослабление.

§ 4.9. НЕВЗАИМНЫЕ ФЕРРИТОВЫЕ УСТРОЙСТВА

Многие распространенные ферритовые устройства легко могут трактоваться с позиций СВЧ-цепей, если предположить справедливость следующих двух постулатов:

1. Для ферритового устройства с подмагничиванием в некотором направлении поляризованные по кругу высокочастотные магнитные поля, перпендикулярные к направлению постоянного магнитного поля, имеют различную фазовую постоянную в зависимости от направления круговой поляризации, т. е.

$$\beta^+ \neq \beta^- \quad (4.9.1)$$

в широком диапазоне частот или значений подмагничивающего поля.

2. Для ферритового устройства с подмагничиванием в некотором направлении (в сравнительно небольшом диапазоне частот или значений подмагничивающего поля) магнитные поля с круговой поляризацией, перпендикулярные к направлению постоянного магнитного поля, имеют различное значение коэффициента затухания в зависимости от направления круговой поляризации, т. е.

$$\alpha^+ \neq \alpha^- \quad (4.9.2)$$

Качественный и количественный анализ этих предположений, а также многих других менее важных явлений в ферритах, которые не рассматриваются в настоящей главе, можно найти в учебниках по ферритам [23, 41].

Ионизованный газ, помещенный в постоянное магнитное поле, проявляет гироскопические свойства, подобные свойствам ферритов, но только по отношению к высокочастотным электрическим, а не магнитным полям.

С точки зрения матричного анализа свойство невязности предполагает, что

$$s_{ij} \neq s_{ji} \quad (4.9.3)$$

Однако если система без потерь, то равенство

$$[S]^H [S] = [I] \quad (2.2.15)$$

справедливо независимо от того, взаимна система или нет.

а. **Фарадеевский вращатель поляризации.** Рассмотрим круглый волновод с помещенным по его оси ферритовым стержнем длиной d . Намагничивающее поле направлено вдоль стержня, так что условие (4.9.1) выполнено. Пусть по волноводу распространяется низшая волна типа TE_{11} .

Введем угол θ , определяемый из соотношения

$$\beta^- d = \beta^+ d + 2\theta. \quad (4.9.4)$$

Величина θ может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, какая фазовая постоянная больше ($\beta^- > \beta^+$ или $\beta^+ > \beta^-$).

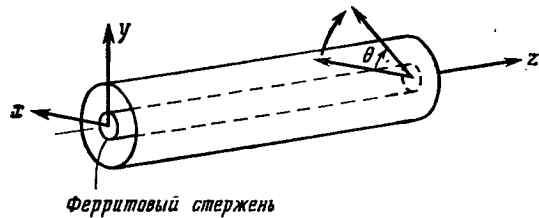
Подадим на вход устройства линейно поляризованную волну с направлением поляризации вдоль оси x . Запишем ее в виде:

$$a_x E_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}$$

Эту волну можно рассматривать в виде суммы двух поляризованных по кругу волн (см. приложение VII)

$$a_x E_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)} = \left[a_x \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t + \varphi_0)} + a_y j \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \right] + \left[a_x \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t + \varphi_0)} - a_y j \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t + \varphi_0)} \right]. \quad (4.9.5)$$

Члены, стоящие в первой квадратной скобке, относятся к левополяризованной волне, вращающейся против часовой стрелки или в отрицательном направлении, если наблюдатель смотрит в направлении распространения волны. Члены, стоящие во второй квадрат-



Ф и г. 4.9.1. Фарадеевский вращатель поляризации.
Магнит не показан.

ной скобке, относятся к правополяризованной волне, вращающейся по часовой стрелке или в положительном направлении.

На выходе волна, распространяющаяся в отрицательном направлении, запишется в виде

$$a_x \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t + \varphi_0 - \beta^- d)} + a_y j \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t + \varphi_0 - \beta^- d)}, \quad (4.9.6)$$

а волна, распространяющаяся в положительном направлении, в виде

$$a_x \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t - \varphi_0 + \beta^+ d)} - a_y j \frac{E_0}{2} e^{j(\omega t - \varphi_0 + \beta^+ d)}. \quad (4.9.7)$$

Эти две волны в сумме дают линейно поляризованную волну [см. уравнение (VII.3)], но теперь фаза ее равна

$$\varphi_0 - \frac{\beta^- + \beta^+}{2} d,$$

а пространственный угол расположения плоскости поляризации

$$\theta = \left(\frac{\beta^- - \beta^+}{2} \right) d.$$

Если та же бегущая волна $a_x E_0 e^{j(\omega t + \varphi_0)}$ распространяется в обратном направлении, т. е. от $z=0$ к $z=d$, то форма записи выражений (4.9.6) и (4.9.7) не изменится, так как каждая компонента на выходе будет иметь вид

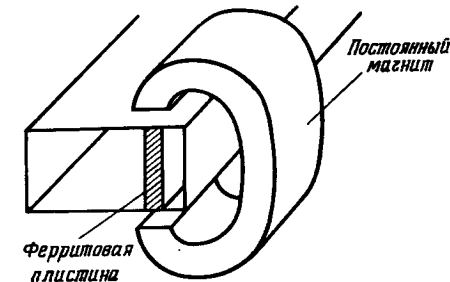
$$e^{j(\omega t + \varphi_0 + \beta^\mp z)} = e^{j(\omega t + \varphi_0 - \beta^\mp d)}$$

Следовательно, независимо от направления распространения фаза волны уменьшится на величину $(\beta^- + \beta^+)/2d$, а угол плоскости поляризации увеличится на величину $(\beta^- - \beta^+)/2d$.

Такое вращение плоскости поляризации получило название *эффекта Фарадея*. Заметим, что прямоугольный волновод без

феррита, скрученный на угол θ , обеспечивает поворот плоскости поляризации волны в одном направлении на угол $+\theta$, а в противоположном на угол $-\theta$.

б. Независимые фазовращатели. 1. *Прямоугольный волновод.* Необратимый фазовращатель можно получить, если поместить в прямоугольный волновод ферритовую пластину в плоскости, где магнитное поле поляризовано по кругу (приложение XII). Пластина располагается в поперечном постоянном магнитном поле, поэтому для различных направлений круговой поляризации система



Ф и г. 4.9.2. Независимый фазовращатель.

имеет различную величину эффективной магнитной проницаемости, т. е. $\mu^+ \neq \mu^-$ (см. постулат 1). Направление поляризации высокочастотного магнитного поля в свою очередь зависит от направления распространения волны (приложение XII).

Анализ устройства аналогичен анализу диэлектрического фазовращателя (§ 4.6), за исключением того, что теперь рассматриваются не электрическое поле и диэлектрическая проницаемость, а магнитное поле и магнитная проницаемость.

Так как величина магнитной проницаемости зависит от направления распространения волны, то фазовый сдвиг для волны, распространяющейся в прямом направлении, будет отличаться от фазового сдвига для волны, распространяющейся в противоположном направлении. В § 3.3 анализируется матрица рассеяния подобной системы без потерь.

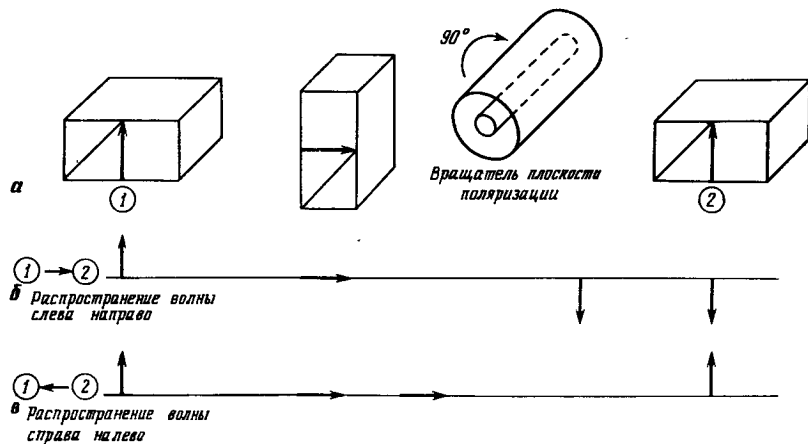
2. *Круглый волновод. Фарадеевский вращатель плоскости поляризации.* Гиратор (т. е. фазовращатель, который в одном направлении дает сдвиг фазы волны на 180° больше, чем в другом) можно получить на основе 90° -вращателя плоскости поляризации.

Гиратор состоит из прямоугольного волновода (плечо 1, фиг. 4.9.3, а), соединенного с помощью скрученной секции и перехода, не показанного на фигуре, с 90° -ным фарадеевским вращате-

лем поляризации. Последний в свою очередь соединен со вторым переходом (на фигуре не показан) и прямоугольным волноводом (плечо 2).

Прохождение волны из плеча 1 в плечо 2 показано на фиг. 4.3.9, б. Волна на выходе оказывается в противофазе с входной волной, если не считать постоянного фазового сдвига, зависящего от положения плоскостей отсчета.

Распространение волны в обратном направлении от плеча 2 к плечу 1 представлено на фиг. 4.9.3, в. В этом случае волна на выходе оказывается в фазе с волной на входе (вновь не учитывается



Ф и г. 4.9.3. Дифференциальный 180°-фазовращатель.

постоянный фазовый сдвиг, вызванный определенным расположением плоскостей отсчета). Таким образом, дифференциальный фазовый сдвиг составляет 180°.

в. Вентили. Вентили — это устройства, в которых сигнал может распространяться только в одном направлении. В идеальном случае вентиль не ослабляет волну в прямом направлении и полностью поглощает ее в обратном, т. е. матрица рассеяния идеального вентиля имеет вид

$$[S] = e^{-j\varphi} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.9.7')$$

Существует несколько практических исполнений вентиляей.

1. *Резонансный вентиль*. Резонансный вентиль на базе прямоугольного волновода по конструкции похож на невзаимный фазовращатель (фиг. 4.9.2). Как и в последнем, в резонансном вентиле имеется ферритовая пластина и поперечное подмагничивающее

поле. Пластина помещается в плоскости, где магнитное поле имеет круговую поляризацию. Однако имеется существенное отличие. Напряженность постоянного магнитного поля выбирается такой величины, чтобы обеспечить условие «резонанса» (см. постулат 2), которое заключается в том, что на определенной частоте различные направления круговой поляризации соответствуют различным коэффициентам затухания. Следовательно, для одного направления распространения волна испытывает незначительное ослабление, а для противоположного — значительное, при этом мощность поглощается в феррите.

2. *Вентиль на «смещении поля»*. По внешнему виду вентиль на «смещении поля» также напоминает невзаимный фазовращатель, за исключением того, что на поверхности ферритовой пластины расположена поглощающая пленка. Обычно величина подмагничивающего поля лежит в диапазоне, соответствующем постулату 1 [уравнение (4.9.1)].

Работа вентиля в принципе противоречит предположениям теории возмущения по крайней мере с точки зрения распределения поля в непосредственной близости к возмущающему телу. Когда величина эффективной проницаемости $\mu_{\text{эфф}}$ мала, поле \mathbf{B} вблизи феррита мало и, следовательно, в силу третьего уравнения Максвелла поле \mathbf{E} тоже мало. Поэтому поглощающая пленка оказывает малое влияние на проходящую волну. Но если величина $\mu_{\text{эфф}}$ велика (для противоположного направления распространения), то поле \mathbf{B} велико, поэтому и поле \mathbf{E} велико; следовательно, имеется значительное затухание волны из-за наличия поглощающей пленки.

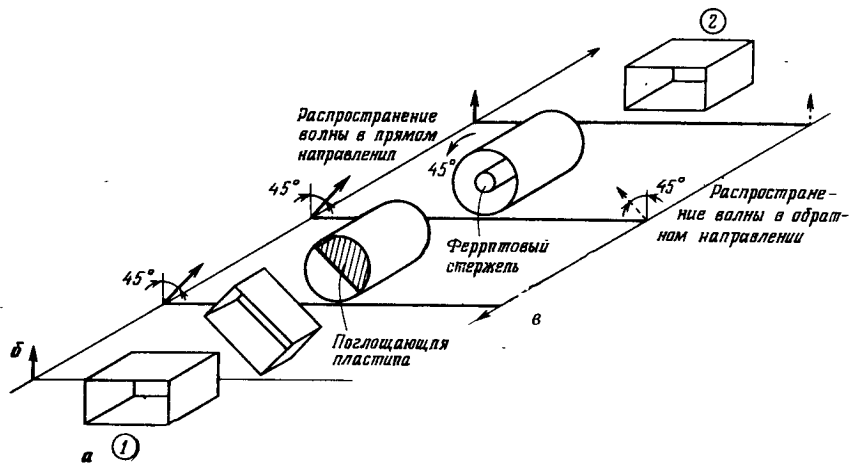
Основным преимуществом такого вентиля по сравнению с резонансным является то, что область справедливости постулата 1 (диапазон частот и напряженностей подмагничивающего поля) очень широка, тогда как резонансный вентиль сравнительно более критичен.

3. *Вентиль, использующий эффект Фарадея*. Описываемое устройство по внешнему виду напоминает фарадеевский 180°-гиратор, за исключением того, что используется скрученный на 45° волновод, а сам вращатель плоскости поляризации поворачивает последнюю не на 90°, а на 45° (фиг. 4.9.4, а).

На фиг. 4.9.4, б схематически показано распространение волны из плеча 1 в плечо 2. Электрический вектор волны в скрученном волноводе поворачивается сначала по часовой стрелке на 45°, затем в фарадеевском вращателе поворачивается на 45° против часовой стрелки, и волна выходит неослабленной из плеча 2.

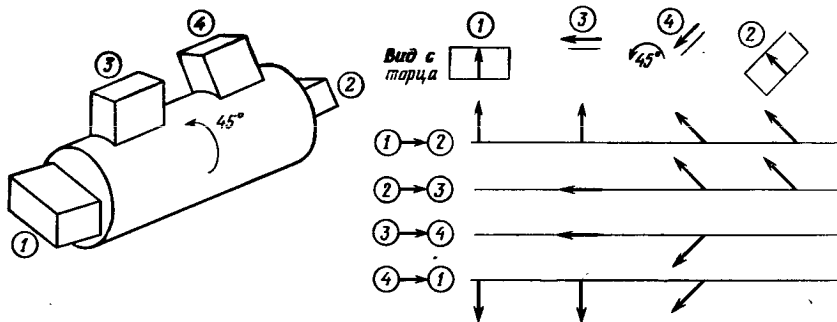
На фиг. 4.9.4, в показано, как электрический вектор волны, входящей в плечо 2, поворачивается в ферритовом вращателе против часовой стрелки на 45°, затем на 45° в том же направлении в скрученном волноводе. Поэтому волна выходит из плеча 1 с изме-

ненной плоскостью поляризации и рассеивается в поглощающей пластине, расположенной параллельно широкой стенке прямоугольного волновода. Поглощающая пластина не оказывает влияния на волну, проходящую от плеча 1 к плечу 2.



Ф и г. 4.9.4. Вентиль, использующий эффект Фарадея.

г. Циркуляторы. Циркуляторами называются согласованные невзаимные устройства, в которых (фиг. 4.9.5) сигнал, поступаю-



Ф и г. 4.9.5. Циркулятор, использующий эффект Фарадея.

щий в плечо 1, выходит из плеча 2; сигнал, поступающий в плечо 2, выходит из плеча 3; сигнал, поступающий в плечо 3, выходит из плеча 4 и т. д.

Матрица рассеяния для четырехплечевого циркулятора при соответствующей нумерации плеч имеет вид

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (4.9.8)$$

Как и в случае других СВЧ-устройств, физическая реализация циркуляторов может быть различной как по принципу действия, так и по внешнему виду.

1. Циркулятор в виде звезды. Конфигурация типа звезды рассматривается в приложении VIII в частном случае трехплечевого циркулятора. Принцип действия такого циркулятора основан на том факте, что оказывается возможным устранить вырождение собственных значений матрицы рассеяния симметричной системы при помощи феррита в постоянном магнитном поле, так как для соответствующих собственных векторов магнитные поля имеют различные направления круговой поляризации.

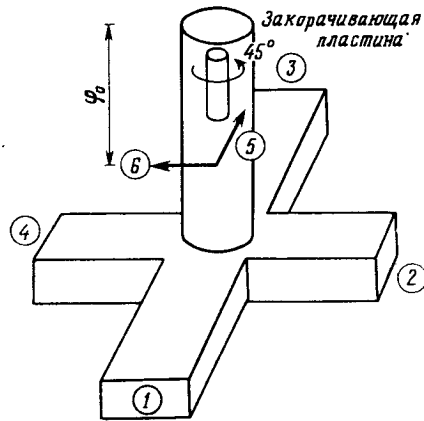
2. Циркулятор, использующий эффект Фарадея. Циркулятор, работающий на эффекте Фарадея, состоит из прямоугольного волновода (плечо 1, фиг. 4.9.5), круглого волновода (соединенного с прямоугольным с помощью перехода), в котором помещен 45°-ный ферритовый вращатель плоскости поляризации, скрученного на 45° волновода и второго прямоугольного волновода (плечо 2). В качестве плеча 3 используется прямоугольный волновод, перпендикулярный к плечу 1 (узкая стенка плеча 3 параллельна широкой стенке плеча 1) и расположенный вместе с плечом 1 по одну сторону от вращателя плоскости поляризации. Плечом 4 является прямоугольный волновод, расположенный перпендикулярно к плечу 2 (узкая стенка плеча 4 параллельна широкой стенке плеча 2) и по одну сторону с ним от вращателя.

Как и в вентиле, использующем эффект Фарадея, волна, входящая в плечо 1, выходит из плеча 2. Волна, входящая в плечо 2, имеет у плеча 1 такое направление плоскости поляризации, что не может через него выйти; она может выйти только через плечо 3. Если волна входит в плечо 3, то она выйдет из плеча 4, а если волна войдет в плечо 4, то она выйдет через плечо 1. Отметим, что во всех случаях прохождение волны определено однозначно при условии, что все плечи циркулятора согласованы.

3. Циркулятор турникетного типа. Рассмотрим согласованный мост, описанный в § 3.8. Матрица рассеяния его имеет вид

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.15')$$

Введем в круглый волновод 45° -вращатель плоскости поляризации (направление вращения против часовой стрелки, если смотреть сверху) и закоротим его. Внешний вид полученного устройства показан на фиг. 4.9.6.



Ф и г. 4.9.6. Циркулятор турникетного типа.

Нормированная падающая волна a_5 образуется при отражении от короткозамыкающей плоскости волны b_6 , причем знак последней при отражении изменяется на противоположный, а фаза ее при прохождении двойного расстояния между короткозамыкателем и плоскостью отсчета изменится на угол $2\psi_0$ (ψ_0 — фазовый сдвиг между короткозамыкающей плоскостью и плоскостью отсчета). Напомним, что 45° -вращатель в сумме поворачивает плоскость поляризации на 90° против часовой стрелки. Следовательно,

$$a_5 = b_6 e^{-j2\psi_0}. \quad (4.9.9)$$

Аналогично

$$a_6 = -b_5 e^{-j2\psi_0}. \quad (4.9.10)$$

Если в плечо 1 входит волна a_1 , то после преобразования получим значения волн на выходе:

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_6 e^{-j2\psi_0} \\ -b_5 e^{-j2\psi_0} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \sqrt{2} b_6 e^{-j2\psi_0} \\ a_1 - \sqrt{2} b_5 e^{-j2\psi_0} \\ -\sqrt{2} b_6 e^{-j2\psi_0} \\ a_1 + \sqrt{2} b_5 e^{-j2\psi_0} \\ \sqrt{2} a_1 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{vmatrix} \quad (4.9.11)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} b_6 &= 0, \\ b_5 &= (1/\sqrt{2}) a_1, \\ b_1 &= b_3 = 0, \\ b_2 &= \frac{a_1}{2} (1 - e^{-j2\psi_0}), \\ b_4 &= \frac{a_1}{2} (1 + e^{-j2\psi_0}). \end{aligned} \quad (4.9.11')$$

Если, кроме того, выбрать ψ_0 так, что

$$e^{-j2\psi_0} = -1,$$

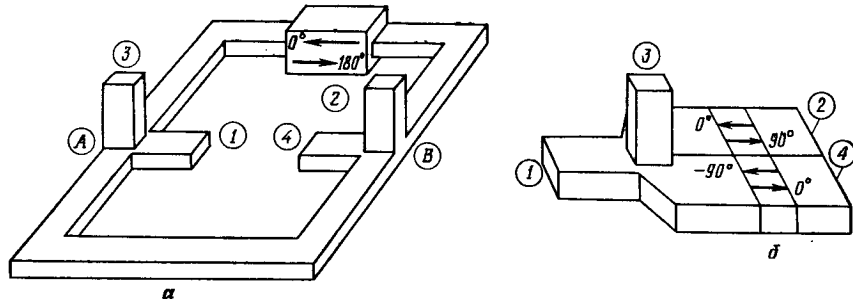
т. е. $\psi_0 = \pi/2$, то $b_2 = a_1$.

Можно проверить, что при таком условии волна, входящая в плечо 2, выходит из плеча 3; волна, входящая в плечо 3, выходит из плеча 4, а волна, входящая в плечо 4, выходит из плеча 1.

4. **Гибридные циркуляторы.** Циркулятор можно получить с помощью двух гибридных (мостовых) соединений и подходящих дифференциальных фазовращателей.

В одном из возможных устройств (фиг. 4.9.7, а) сигнал, который подается в плечо 1 двойного тройника А, разделяется на два одинаковых по амплитуде и фазе сигнала. Однако эти два сигнала подходят к второму двойному тройнику В в противофазе, так как в тракт введен 180° -гиратор. Здесь они складываются и выходят из плеча 2, соответствующего Е-плечу двойного тройника В.

Сигнал, входящий в плечо 2, разделяется в двойном тройнике В на два сигнала, одинаковых по амплитуде, но противоположных



Ф и г. 4.9.7. Циркуляторы с двумя мостами.

по фазе. Оба сигнала подходят к двойному тройнику А также в противофазе и выходят из плеча 3 (плечо в плоскости Е).

Сигнал, входящий в плечо 3, разделяется в двойном тройнике А на два одинаковых по амплитуде противофазных сигнала. Эти сигналы подходят к двойному тройнику В в фазе из-за наличия в схеме 180° -гиратора и выходят из плеча 4.

Наконец, сигнал, поступающий в плечо 4, разделяется в тройнике В на два одинаковых по амплитуде и синфазных сигнала. Эти сигналы подходят к тройнику А в фазе и выходят из плеча 1.

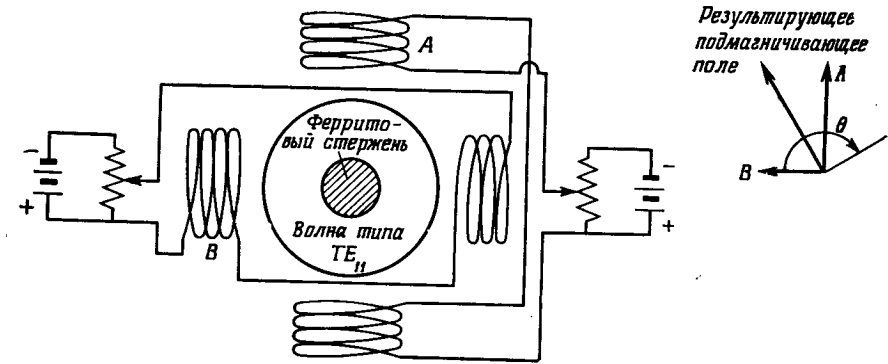
Во втором возможном варианте гибридного циркулятора (фиг. 4.9.7, б) используется двойной тройник со свернутыми плечами, трехдецибелльный мост и 90° -гиратор. Сигнал, поступающий в плечо 1, разделяется в двойном тройнике на два одинаковых по амплитуде синфазных сигнала. Эти сигналы подходят к гибриднему соединению со сдвигом по фазе на 90° , поэтому волна выходит из плеча 2.

Сигнал, входящий в плечо 2, разделяется в гибридном соединении на два равных сигнала в квадратуре. Относительный сдвиг фазы, равный 90° , увеличивается до 180° из-за наличия гиратора, и сигнал выходит через плечо 3. Аналогично можно показать, что

сигнал, входящий в плечо 3, выходит из плеча 4, а сигнал, входящий в плечо 4, выходит из плеча 1.

В случае когда качественное объяснение работы циркулятора затруднительно, можно прибегнуть к выражениям (2.5.16) для двойного тройника и (3.7.16) для трехдецибелльного гибридного соединения.

д. **Взаимные ферритовые устройства.** Ферритовый стержень в круглом волноводе (волна типа TE_{11}), помещенный в поперечное подмагничивающее поле, действует подобно устройствам, описанным в § 4.7 и приложении XIV. Два постулата (§ 4.9) в данном



Ф и г. 4.9.8. Схема регулируемого фазовращателя.

случае неприменимы, так как направление подмагничивающего поля не перпендикулярно к плоскости круговой поляризации высокочастотного магнитного поля. Поэтому рассмотрим анизотропию в поперечной плоскости. В направлении постоянного магнитного поля магнитная проницаемость μ мала, а в направлении, перпендикулярном постоянному магнитному полю в поперечной плоскости, велика (ср. с более высоким значением ϵ диэлектрической пластины). Следовательно, при соответствующем выборе размеров стержня можно получить либо четвертьволновую, либо полуволновую пластину. Пространственный угол θ , рассмотренный в § 4.7, является углом между плечом 1 и направлением, перпендикулярным к приложенному полю смещения. Если расположение плеч устройства не меняется, то элементы матрицы рассеяния будут меняться при изменении направления поля подмагничивания.

Таким образом, можно получить регулируемый фазовращатель без подвижных элементов, если менять величину результирующего магнитного поля, создаваемого четырьмя катушками (фиг. 4.9.8).

ГЛАВА 5

Резонаторы

§ 5.0. ВВЕДЕНИЕ

Резонаторы, по-видимому, являются самым значительным классом сверхвысокочастотных устройств. Они составляют неотъемлемую часть большинства генераторов и многих усилителей. Одноточные резонаторы или их комбинации применяются в качестве фильтров (гл. 6). Отдельные свойства их используются в эхорезонаторах (§ 5.5) и частотных дискриминаторах (гл. 8).

Поверхностный обзор текущей и опубликованной ранее литературы, посвященной резонаторам, может запутать читателя наличием явных противоречий в уравнениях. Это происходит потому, что резонаторы могут рассматриваться либо с точки зрения эквивалентных цепей с сосредоточенными постоянными (§ 5.3, 5.5, 5.7, 5.8), либо с точки зрения передающих линий, ограниченных известными неоднородностями (§ 5.1, 5.9 и приложение XV). Резонаторы типа бегущей волны, в которых происходит по существу те же явления, что и в объемных резонаторах, рассматриваются с последней точки зрения (§ 5.2). Эти два подхода приводят к одним и тем же результатам при высоких значениях добротности (приложение XV); при низких значениях добротности эквивалентные схемы с сосредоточенными постоянными дают неудовлетворительные результаты. В случае низких добротностей трудность заключается в основном в том, что соседние резонансы расположены близко друг к другу. Поэтому однополюсные представления, соответствующие единственному виду колебаний, уже не являются достаточными.

Явление резонанса характеризуется высоким уровнем энергии, накопленной в резонаторе. Небольшая часть энергии, накопленной в резонаторе, возвращается к генератору. Эта волна имеет противоположную фазу с волной, отраженной от входной неоднородности; суммарная отраженная волна минимальна по величине.

Для удобства плоскость отсчета, т. е. плоскость эквивалентного представления параметров резонатора, выбирается в сечении входной линии, где располагается минимум стоячей волны при сильной расстройке резонатора. В этой плоскости коэффициент отражения равен -1 на частотах, далеких от резонансной (или по крайней мере коэффициент отражения является отрицательным и максимальным по величине, если соседние полюса расположены слишком

близко). Удачно, что она является также плоскостью, где коэффициент матрицы рассеяния s_{11} , характеризующий неоднородность, является отрицательным и действительным, так что относительно просто переходить от эквивалентной цепи с сосредоточенными параметрами к линии передачи, и наоборот.

«Острота» резонанса характеризуется нагруженной добротностью Q_n , определяемой через энергию и частоту, которые являются величинами, инвариантными при любой принятой эквивалентной схеме. Нагруженная добротность может быть выражена через ненагруженную добротность Q_0 , которая определяет потери в резонаторе, и через внешнюю добротность $Q_{вн}$, которая характеризует связь резонатора с линией.

Основные понятия, введенные при рассмотрении резонатора с одним элементом связи, могут быть с небольшими изменениями перенесены на резонатор, имеющий два элемента связи и включенный по проходной схеме.

Пренебрежение потерями приводит к значительным упрощениям соотношений для проходного резонатора. Однако следует предостеречь читателя, чтобы он проверил, справедливо ли это предположение для рассматриваемого частного случая ($Q_0 \gg Q_{вн}$).

В § 5.9 подробно изучаются проходные волноводные резонаторы без потерь на основе рассмотрения реактивной проводимости неоднородностей. Такие резонаторы являются составными элементами фильтров сверхвысоких частот, рассматриваемых в следующей главе. В § 5.10 рассматриваются полосковые резонаторы проходного типа без потерь.

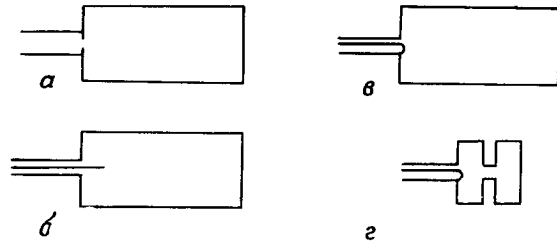
§ 5.1. РЕЗОНАТОРЫ С ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ СВЯЗИ.
ЯВЛЕНИЕ РЕЗОНАНСА

Рассмотрим четыре резонатора, показанные на фиг. 5.1.1. Первые три резонатора *a*, *b*, *в* являются объемными резонаторами сверхвысоких частот. Они характеризуются механизмом связи (щель, зонд или петля) и объемом, имеющим протяженность по крайней мере в половину длины волны для одного из размеров (аксиального или радиального). Для рассмотрения как установившегося, так и переходного процессов в таких устройствах необходимо учитывать волновые явления.

Четвертый резонатор вогнутого типа (фиг. 5.1.1, *г*) по своим свойствам приближается к схеме с сосредоточенными постоянными. На данной резонансной частоте все его размеры могут быть сделаны сколь угодно малыми уменьшением высоты зазора. Емкость резонатора может быть сосредоточена в зазоре; полость, прилегающая к зазору снаружи, играет роль индуктивности. В предельном случае при очень малых размерах волновыми явлениями можно

пренебречь; фазы как электрического, так и магнитного полей являются постоянными в пространстве.

Ниже будет показано, что в *стационарном режиме* оба типа резонаторов могут быть представлены одной и той же эквивалентной схемой (*RLC*). Однако здесь следует отметить, что переходный



Ф и г. 5.1.1. Объемные резонаторы (*a* — *b*) и резонатор с сосредоточенными постоянными (*c*).

процесс в эквивалентной *RLC*-схеме несколько отличается от переходного процесса в реальных объемных резонаторах ¹⁾.

Как следует из фиг. 5.1.2, для определенного положения плоскостей отсчета связь можно характеризовать матрицей рассеяния

$$[S] = \begin{vmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{vmatrix} \quad (5.1.1)$$

Плоскости отсчета удобно выбрать таким образом, чтобы s_{11} и s_{22} являлись действительными и отрицательными. Если предполагается, что потери в цепи связи отсутствуют, то матрица $[S]$ унитарна (см. § 3.3), т. е.

$$\begin{aligned} s_{11} &= s_{22} = -|s_{11}|, \\ s_{12} &= s_{21} = \pm j\sqrt{1 - |s_{11}|^2}. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Пусть $\sqrt{1 - |s_{11}|^2} = |k|$, где k — действительное число (положительное или отрицательное), характеризующее связь через отверстие. Соотношения (5.1.2) приобретают вид

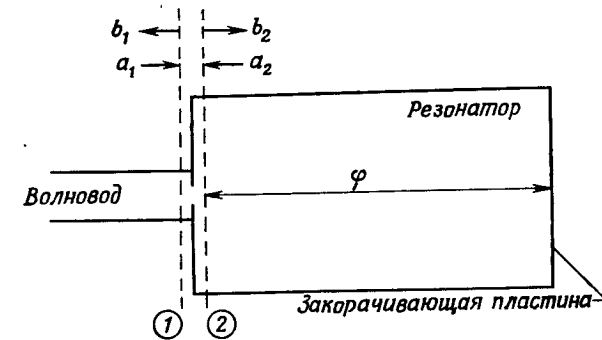
$$\begin{aligned} s_{11} &= s_{22} = -\sqrt{1 - k^2}, \\ s_{12} &= s_{21} = jk, \end{aligned} \quad (5.1.2')$$

¹⁾ Третий тип резонаторов — это вогнутые резонаторы, один из размеров которых близок к половине длины волны. Анализ таких резонаторов более сложен, но он не включает в себя никаких новых представлений.

а матрица рассеяния

$$[S] = \begin{vmatrix} -\sqrt{1 - k^2} & jk \\ jk & -\sqrt{1 - k^2} \end{vmatrix} \quad (5.1.1')$$

Предположим сначала, что расстояние между плоскостью отсчета 2 в резонаторе и коротким замыканием на конце резонатора равно произвольной электрической длине φ . Кроме того, предположим, что полное затухание от плоскости отсчета 2 до сечения



Ф и г. 5.1.2. Полый резонатор с одним элементом связи.

короткого замыкания и обратно равно α_T (*нел*). Соотношение между a_2 и b_2 (фиг. 5.1.2) имеет вид

$$a_2 = -b_2 e^{-(\alpha_T + j2\varphi)}, \quad (5.1.3)$$

поэтому отраженные волны определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -\sqrt{1 - k^2} & jk \\ jk & -\sqrt{1 - k^2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ -b_2 e^{-(\alpha_T + j2\varphi)} \end{vmatrix} &= \\ = \begin{vmatrix} -\sqrt{1 - k^2} a_1 - jk b_2 e^{-(\alpha_T + j2\varphi)} \\ jk a_1 + \sqrt{1 - k^2} b_2 e^{-(\alpha_T + j2\varphi)} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

Отсюда

$$b_1 = -\left(\sqrt{1 - k^2} - \frac{k^2 e^{-(\alpha_T + j2\varphi)}}{1 - \sqrt{1 - k^2} e^{-(\alpha_T + j2\varphi)}} \right) a_1, \quad (5.1.5)$$

$$b_2 = \frac{jk}{1 - \sqrt{1 - k^2} e^{-(\alpha_T + j2\varphi)}} a_1. \quad (5.1.6)$$

Для заданных значений полного затухания α_T и коэффициента связи k величина b_2 является максимальной, когда

$$2\varphi = 2n\pi, \quad n = 0, 1, 2 \dots$$

или

$$\varphi = n\pi, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (5.1.7)$$

При выполнении первого условия, как следует из уравнения (5.1.5), $|b_1|$ принимает минимальное значение. Это и есть *условие резонанса*, при котором b_1 и b_2 соответственно равны

$$\begin{aligned} b_1 &= - \left(\sqrt{1-k^2} - \frac{k^2 e^{-\alpha_T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} \right) a_1 = \\ &= - \left(\frac{\sqrt{1-k^2} - e^{-\alpha_T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} \right) a_1, \end{aligned} \quad (5.1.5')$$

$$b_2 = \frac{jk}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} a_1. \quad (5.1.6')$$

Таким образом, если электрическая длина от плоскости отсчета до плоскости короткого замыкания равна целому числу полуволн¹⁾, амплитуда отраженной волны b_1 имеет минимальное значение, тогда как волна в резонаторе b_2 достигает максимального значения.

Когда $2\varphi = n\pi$, при нечетном n (электрическая длина равна целому числу полуволн плюс четверть длины волны) величина $|b_1|$ максимальна, $|b_2|$ минимальна. Это условие называется иногда *антирезонансом*.

Для данного полного затухания α_T , если k — переменная величина, максимальную величину b_2 получим из условия

$$\frac{d|b_2|}{dk} = \frac{\sqrt{1-k^2} - e^{-\alpha_T}}{(1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T})^2 \sqrt{1-k^2}} |a_1| = 0, \quad (5.1.8)$$

т. е.

$$\sqrt{1-k^2} = e^{-\alpha_T}, \quad k = \pm \sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}. \quad (5.1.9)$$

При резонансе для критической величины k имеем

$$b_1 = 0, \quad (5.1.5'')$$

$$b_2 = \pm j \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}} a_1. \quad (5.1.6'')$$

¹⁾ Должно быть ясно, что для малого отверстия диафрагмы или слабой связи плоскость отсчета 2 очень близка к плоскости диафрагмы. Следовательно, при резонансе внутренний размер резонатора приблизительно равен целому числу полуволн. В общем случае длина резонатора может быть больше или меньше целого числа полуволн в зависимости от того, будет ли связь в плоскости отсчета емкостной или индуктивной (§ 5.6).

При условии «критической» связи вся падающая энергия поглощается в резонаторе. На практике стремятся к тому, чтобы α_T было как можно меньше. В результате, если связь близка к критической, то $|b_2|$ может быть на один, два или даже три порядка больше $|a_1|$. При этом k предельно мало (очень малое отверстие диафрагмы).

С качественной точки зрения положение заключается в следующем¹⁾.

В плоскости 1 большая часть падающей волны a_1 отражается от малого отверстия диафрагмы (отраженная волна — $|s_{11}| a_1$). Однако b_1 уменьшается за счет небольшой части интенсивной волны, двигающейся взад и вперед внутри резонатора и «просачивающейся» через отверстие связи в сторону генератора. Последняя волна складывается с первой таким образом, что амплитуда суммарной отраженной волны уменьшается. При критической связи $b_1 = 0$.

В плоскости 2 внутри резонатора бегущая волна, имеющая значительную амплитуду, частично ослабляется за счет внутренних потерь (множитель $e^{-\alpha_T}$) и утечки обратно к плоскости 1 (внешние потери, коэффициент $\sqrt{1-k^2}$). Однако в установившемся режиме эти два вида потерь полностью компенсируются частью падающей волны a_1 . (Эта часть равна 1 при критической связи.)

Если $|k| \neq \sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}$, то величина b_1 уже не равна 0 при резонансе. Как следует из соотношения (5.1.5'), при $|k| < \sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}$ (связь меньше, чем критическая, или случай *недосвязанного* резонатора)

$$b_1 < 0 \text{ при резонансе,} \quad (5.1.10)$$

т. е. плоскость отсчета 1 расположена в минимуме стоячей волны.

Однако если $|k| > \sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}$ (случай *пересвязанного* резонанса)

$$b_1 > 0 \text{ при резонансе,} \quad (5.1.10')$$

т. е. плоскость отсчета 1 расположена в максимуме стоячей волны.

В первом случае отраженная волна b_1 создается в основном за счет отражения от диафрагмы, во втором — за счет волны из резонатора. Отметим, однако, что на частотах, далеких от резонансной, или при антирезонансе плоскость отсчета 1 всегда расположена в минимуме стоячей волны независимо от того, какая связь имеет место при резонансе (случай недосвязанного или пересвязанного резонатора).

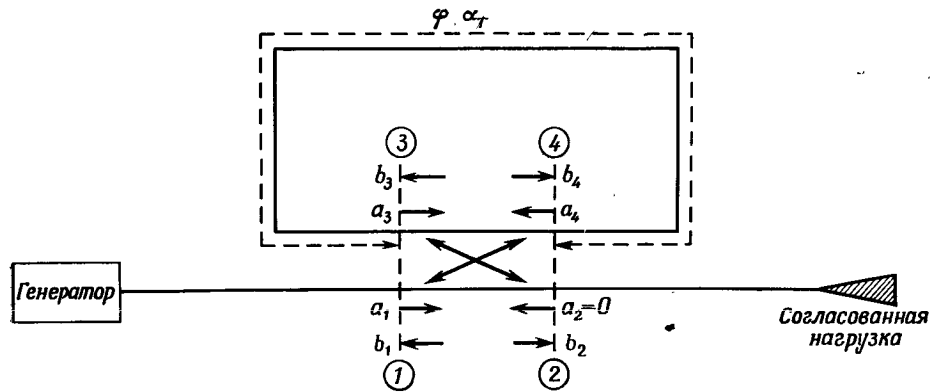
¹⁾ Выражения (5.1.3), (5.1.5) и (5.1.6) описывают картину стоячей волны как внутри, так и вне резонатора для различных величин φ и справедливы для стационарного режима.

Если бы можно было непосредственно измерить коэффициенты рассеяния соединения или по крайней мере произвольно изменять их, то исследование резонаторов на основе нормированных волн было бы достаточным как для теоретических, так и для практических целей. Однако резонаторы часто герметически запаиваются или по крайней мере изготавливаются неразборными для уменьшения потерь. Даже если устройство связи можно было бы отделить, измерения коэффициентов рассеяния были бы затруднены при цилиндрических поверхностях отсчета (приложение III)¹⁾.

По этим причинам в соответствии с теоремой Фостера резонатор можно представить в виде параллельной RLC -цепи. В этом случае измерения и расчеты становятся довольно простыми. Такой подход рассматривается в § 5.3.

§ 5.2. РЕЗОНАТОРЫ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ

Прежде чем изучать эквивалентную схему RLC -резонатора с одним элементом связи, рассмотрим резонаторы бегущей волны, один из которых приведен на фиг. 5.2.1, так как процессы, происходящие в таких резонаторах, и даже уравнения, описывающие их,



Фиг. 5.2.1. Резонатор типа бегущей волны.

аналогичны полученным в предыдущем параграфе. Более того, в этом случае экспериментальное исследование основано на измерениях (или изменениях) коэффициентов матрицы рассеяния соединения.

¹⁾ Если резонатор представляет собой отрезок стандартного волновода, то подход, изложенный в этом параграфе, является практически достаточным.

Для идеального симметричного направленного ответвителя плоскости отсчета можно выбрать таким образом, что

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 & jk \\ \sqrt{1-k^2} & 0 & jk & 0 \\ 0 & jk & 0 & \sqrt{1-k^2} \\ jk & 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 \end{vmatrix} \quad (5.2.1)$$

где k — действительная величина (положительная или отрицательная)¹⁾ [ср. с уравнением (3.7.16)].

Если входные сигналы подаются ко всем четырем плечам, то на выходе имеем

$$b_1 = \sqrt{1-k^2} a_2 + jk a_4, \quad (5.2.2a)$$

$$b_2 = \sqrt{1-k^2} a_1 + jk a_3, \quad (5.2.2b)$$

$$b_3 = jk a_2 + \sqrt{1-k^2} a_4, \quad (5.2.2в)$$

$$b_4 = jk a_1 + \sqrt{1-k^2} a_3. \quad (5.2.2г)$$

Определим φ как полный сдвиг фазы, а α_T как полное затухание по кольцу от плеча 3 до плеча 4 (фиг. 5.2.1). При отсутствии неоднородностей внутри контура будут выполняться следующие соотношения:

$$a_3 = b_4 e^{-(\alpha_T + j\varphi)}, \quad (5.2.3a)$$

$$a_2 = \Gamma_2 b_2 = 0 \text{ (согласованный выход)}, \quad (5.2.3б)$$

$$a_4 = b_3 e^{-(\alpha_T + j\varphi)} = 0, \quad (5.2.3в)$$

т. е.

$$b_1 = b_3 = 0. \quad (5.2.4)$$

Исключая a_3 из уравнений (5.2.2б), (5.2.2г) и (5.2.3а), найдем b_2 и b_4

$$b_2 = \left(\sqrt{1-k^2} - \frac{k^2 e^{-(\alpha_T + j\varphi)}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-(\alpha_T + j\varphi)}} \right) a_1 = \\ = \frac{\sqrt{1-k^2} - e^{-(\alpha_T + j\varphi)}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-(\alpha_T + j\varphi)}} a_1, \quad (5.2.5)$$

$$b_4 = \frac{jk}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-(\alpha_T + j\varphi)}} a_1. \quad (5.2.6)$$

¹⁾ Величина k является положительной для связи по узкой стенке волновода и отрицательной для связи по широкой стенке.

Без учета знаков эти соотношения аналогичны соотношениям (5.1.5) и (5.1.6) при замене φ на 2φ .

Для данного полного затухания α_T максимальное значение b_4 получим при

$$\varphi = 2n\pi, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (5.2.7)$$

При этом, согласно уравнению (5.2.5), величина b_2 принимает минимальное значение: это *условие резонанса*, при котором b_2 и b_4 соответственно равны

$$b_2 = \left(\sqrt{1-k^2} - \frac{k^2 e^{-\alpha_T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} \right) a_1 = \frac{\sqrt{1-k^2} - e^{-\alpha_T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} a_1 \quad (5.2.5')$$

$$b_4 = \frac{jk}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} a_1. \quad (5.2.6')$$

Следовательно, если на длине волноводного кольца между плечами 3 и 4 укладывается целое число длин волн, то амплитуда нормированной бегущей волны b_4 достигает максимального значения, в то время как амплитуда нормированной волны b_2 , поступающей в плечо 2, является минимальной. В этом состоит сходство с понятиями и выражениями для объемных резонаторов. Основные различия состоят в том, что, во-первых, волна бежит по кольцу, а, во-вторых, волна, которая не рассеивается в кольце, поступает в плечо 2, а не отражается обратно к плечу 1; при этом генератор всегда работает на согласованную нагрузку.

Если $\varphi = n\pi$ и n — нечетное число (нечетное число полуволн), то b_4 минимальна, а b_2 максимальна; это соответствует *условию антирезонанса*.

Если k — переменная величина, то для заданного полного затухания α_T максимальное значение b_4 получается из условия

$$\frac{d|b_4|}{dk} = \frac{\sqrt{1-k^2} - e^{-\alpha_T}}{(1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T})^2 \sqrt{1-k^2}} |a_1| = 0, \quad (5.2.8)$$

т. е.

$$\sqrt{1-k^2} = e^{-\alpha_T} \quad \text{или} \quad k = \pm \sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}. \quad (5.2.9)$$

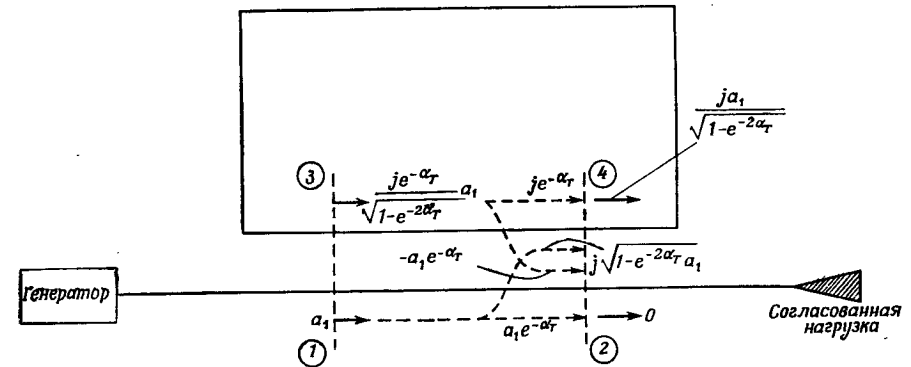
При резонансе для критического значения k

$$b_2 = 0, \quad (5.2.5'')$$

$$b_4 = \pm j \frac{1}{\sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}} a_1. \quad (5.2.6'')$$

При условии критической связи вся падающая мощность поглощается в кольце. Если α_T мало, то $|b_4|$ может быть на один

или даже два, три порядка больше $|a_1|$, так что значение мощности в кольце может быть на два, четыре или даже шесть порядков больше мощности генератора. Случай критической связи показан на фиг. 5.2.2. Отметим, что волна, выходящая из плеча 2, в действительности состоит из двух равных, но противоположных



Фиг. 5.2.2. Случай критической связи для резонатора бегущей волны.

по фазе составляющих (одна от генератора, другая от кольца). Отметим также, что бегущая волна, циркулирующая по кольцу, «подпитывается» как раз такой частью волны a_1 , чтобы компенсировать потери α_T .

Для любого значения $|k|$, отличающегося от $\sqrt{1 - e^{-2\alpha_T}}$, b_2 не равно нулю. Волна b_2 находится в фазе с a_1 в случае недосвязанного резонатора и в противофазе с a_1 в случае пересвязанного резонатора.

В общем случае направленный ответвитель является самостоятельным узлом (§ 8.1, п. «Г») и его параметры могут быть измерены отдельно. Связь в нем можно сделать равной критической (что легко определяется по отсутствию b_2). После измерения α_T или k уровень мощности волны, циркулирующей по кольцу, может быть определен на основании уравнения (5.2.6'').

Другой тип резонатора бегущей волны представлен на фиг. 5.2.3. Как и ранее, определим φ как полный сдвиг фазы, а α_T как полное затухание от плеча 2 к плечу 3. Если нет внутренних отражений и плечо 4 оканчивается поглощающей нагрузкой, то можно записать

$$a_3 = b_2 e^{-(\alpha_T + j\varphi)}, \quad (5.2.10a)$$

$$a_2 = a_4 = 0, \quad (5.2.10б)$$

так что вновь с учетом уравнений (5.2.2а) и (5.2.2в) получим

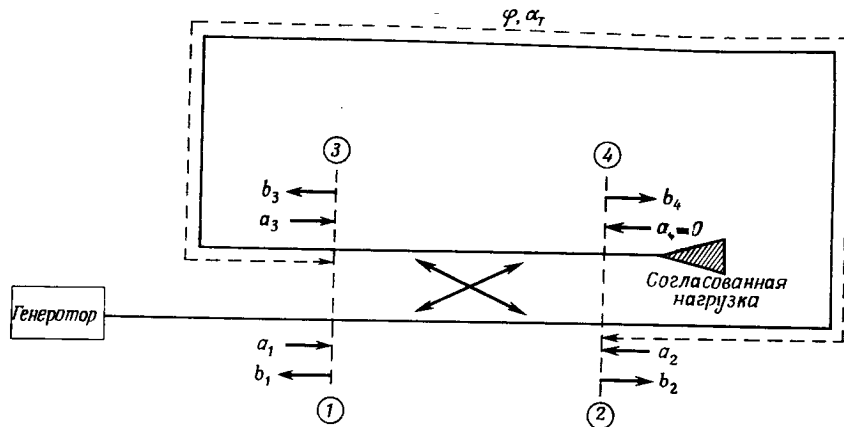
$$b_1 = b_3 = 0. \quad (5.2.11)$$

Исключая a_3 из уравнений (5.2.10а), (5.2.2б) и (5.2.2г), определим b_2 и b_4

$$b_4 = \left(jk + \frac{(1-k^2)e^{-(\alpha_T+j\varphi)}}{1-jke^{-(\alpha_T+j\varphi)}} \right) a_1 = \left(\frac{jk + e^{-(\alpha_T+j\varphi)}}{1-jke^{-(\alpha_T+j\varphi)}} \right) a_1, \quad (5.2.12)$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1-jke^{-(\alpha_T+j\varphi)}} a_1. \quad (5.2.13)$$

Разница между этими двумя типами резонаторов состоит в том, что в выражениях для b_2 и b_4 jk и $\sqrt{1-k^2}$ меняются местами.



Ф и г. 5.2.3. Второй тип резонатора бегущей волны.

Условие резонанса (максимальное значение b_2) получим, когда

$$je^{-j\varphi} = e^{j(\frac{\pi}{2}-\varphi)} = 1 \quad (k > 0), \quad (5.2.14)$$

что выполняется, если электрическая длина φ равна целому числу длин волн плюс четверть длины волны. Для этого значения

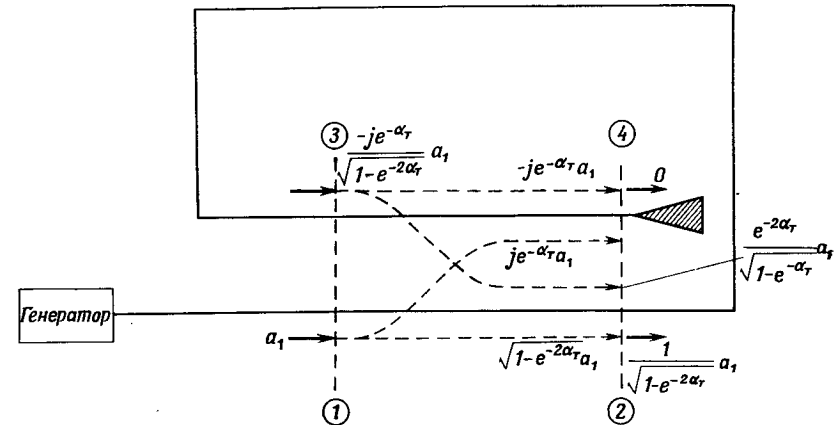
$$b_4 = \frac{j(k - e^{-\alpha_T})}{1 - ke^{-\alpha_T}} a_1, \quad (5.2.12')$$

$$b_2 = \frac{\sqrt{1-k^2}}{1 - ke^{-\alpha_T}} a_1. \quad (5.2.13')$$

Если

$$|k| = e^{-\alpha_T}, \quad (5.2.15)$$

то b_4 равно нулю, а амплитуда волны в кольце b_2 принимает максимальное значение. Следовательно, при критической связи для очень малых значений затухания величина коэффициента связи



Ф и г. 5.2.4. Случай критической связи для второго типа резонатора бегущей волны.

велика (почти равна 1) для рассматриваемого типа резонатора. Переходное ослабление направленного ответвителя, выраженное в децибелах, стремится при этом к нулю.

Напротив, для резонатора, показанного на фиг. 5.2.1, коэффициент связи при тех же условиях есть очень малая величина; переходное ослабление направленного ответвителя должно быть очень большим.

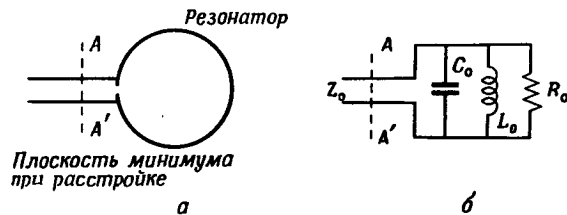
Случай критической связи, когда b_4 равно нулю, а b_2 принимает максимальное значение, изображен на фиг. 5.2.4.

§ 5.3. РЕЗОНАТОР С ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ СВЯЗИ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ И ИЗМЕРЕНИЯ

В общем случае параметры связи резонатора и полное затухание в нем α_T не могут быть определены экспериментально. С другой стороны, если воспользоваться эквивалентной RLC -схемой, внешние параметры резонатора можно измерить на дискретных частотах и, используя экстраполяцию, определить их на других частотах, близких к резонансу (фиг. 5.3.1, б). Представление резонатора

в виде эквивалентной схемы имеет два основных недостатка. Первый заключается в том, что переходные процессы в резонаторе и его эквивалентной схеме могут быть несколько различными. Во-вторых, недостаточно раскрывается волновая природа процессов, происходящих в резонаторе. Отметим, однако, что схема, изображенная на фиг. 5.3.1, б, во всех отношениях эквивалентна резонаторам с сосредоточенными постоянными (фиг. 5.1.1, з).

Эквивалентная схема резонатора в виде параллельного контура применима вблизи резонанса для определенного вида колебаний и определенного типа волны. В волноводе выбирается плоскость



Ф и г. 5.3.1. Эквивалентная схема полого резонатора.

эквивалентного представления параметров резонатора, в которой входное сопротивление равно нулю или имеет минимальное значение на частотах, далеких от резонансной (при этом коэффициент отражения есть действительная и отрицательная величина). Эта плоскость совпадает с плоскостью 1, показанной на фиг. 5.1.2¹⁾.

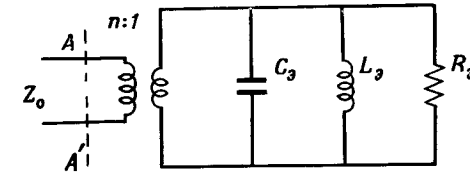
В случае малых потерь на основании теоремы Фостера можно представить любой двухполюсник в виде одной из эквивалентных схем, показанных на фиг. 1.5.6, при условии, что другие полюса (виды колебаний) далеко отстоят от рассматриваемого вида колебаний. В первой эквивалентной схеме на частотах выше резонансной цепь эффективно закорачивается конденсатором, а на частотах ниже резонансной — индуктивностью. Поэтому рассматриваемая эквивалентная схема является представлением резонатора в вышеуказанной плоскости. Если плоскость отсчета поместить в «плоскость максимума при расстройке», то следует применять вторую эквива-

¹⁾ При условии антирезонанса с учетом уравнения (5.1.5) коэффициент отражения в этой плоскости равен

$$\Gamma_{\max} = -\frac{\sqrt{1-k^2} + e^{-\alpha_T}}{1 + \sqrt{1-k^2}e^{-\alpha_T}} \approx -1,$$

если α_T мало. Если α_T не является пренебрежимо малой величиной, то $|\Gamma_{\max}| < 1$. Наличие близлежащих видов колебаний резонатора (или полюсов), не учитываемых эквивалентной схемой, показанной на фиг. 5.3.1, б увеличивает это несоответствие.

лентную схему резонатора в виде последовательного контура. Выбор плоскости отсчета, отличной от рассмотренных, является противостественным и может только запутать читателя. Если отверстие связи мало (наиболее типичный случай), то плоскость эквивалентного представления параметров резонатора почти сов-



Ф и г. 5.3.2. Эквивалентная схема с идеальным трансформатором.

падает с плоскостью отверстия, при этом в качестве эквивалентной схемы резонатора удобнее выбрать параллельную RLC-цепь.

При резонансе сопротивление в сечении AA' (плоскость минимума при расстройке) равно R_0 . С учетом уравнений (1.3.12) и (5.1.5¹⁾) величина R_0 запишется в виде

$$\frac{R_0}{Z_0} = \left[\frac{(1 - \sqrt{1-k^2})}{(1 + \sqrt{1-k^2})} \right] \left[\frac{1 + e^{-\alpha_T}}{1 - e^{-\alpha_T}} \right]. \quad (5.3.1)$$

Как следует из этого соотношения, R_0 является функцией коэффициента связи k и потерь α_T . С формальной точки зрения желательно разделить эти две функции. Поэтому связь рассматривается в виде идеального трансформатора с соотношением витков $n : 1$ [уравнение (III.1)], а потери характеризуются сопротивлением R_0 (фиг. 5.3.2). Соотношения между параметрами схем, изображенных на фиг. 5.3.1 и 5.3.2, имеют вид

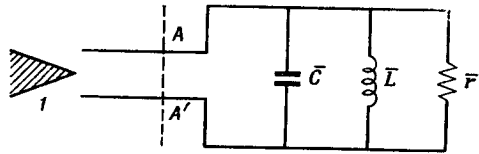
$$\begin{aligned} R_0 &= n^2 R_0, \\ L_0 &= n^2 L_0, \\ C_0 &= \frac{C_0}{n^2}, \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

где

$$n^2 = \frac{1 - \sqrt{1-k^2}}{1 + \sqrt{1-k^2}}, \quad (5.3.3a)$$

$$R_0 = \frac{1 + e^{-\alpha_T}}{1 - e^{-\alpha_T}}. \quad (5.3.3b)$$

Величины R_a , L_a и C_a могут рассматриваться как *внутренние параметры* самого резонатора, тогда как n^2 характеризует степень связи (форму, размер и положение отверстия, петли или зонда).



Фиг. 5.3.3. Эквивалентная схема с нормированными параметрами.

Из уравнения (5.2.3) следует, что чем больше связь, тем больше величина n^2 . При экспериментальном определении параметров резонатора удобно ввести эквивалентную схему, изображенную на фиг. 5.3.3, так как в результате измерения КСВН получаем нормированные величины сопротивления или проводимости. Соотношения между этими переменными параметрами принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{r} &= \frac{R_0}{Z_0} = \frac{n^2}{Z_0} R_a, \\ \bar{L} &= \frac{L_0}{Z_0} = \frac{n^2}{Z_0} L_a, \\ \bar{C} &= C_0 Z_0 = \frac{Z_0}{n^2} C_a. \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Нормированная проводимость идеализированной схемы, показанной на фиг. 5.3.3, равна

$$\bar{y} = \frac{1}{\bar{r}} + j \left(\bar{C}\omega - \frac{1}{\bar{L}\omega} \right) = \bar{g} + j\bar{b}, \quad (5.3.5)$$

а нормированное сопротивление

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{y}} = \frac{1}{\frac{1}{\bar{r}} + j \left(\bar{C}\omega - \frac{1}{\bar{L}\omega} \right)} = \frac{1}{\bar{g} + j\bar{b}}, \quad (5.3.6)$$

где

$$\bar{g} = \frac{1}{\bar{r}}, \quad \bar{b} = \left(\bar{C}\omega - \frac{1}{\bar{L}\omega} \right).$$

Зависимость \bar{y} от частоты показана на фиг. 5.3.4, а. График представляет собой прямую, которая пересекает действительную

¹⁾ Тот факт, что $n \leq 1$, не имеет особого значения. Такое ограничение величины n обусловлено выбором плоскости отсчета трансформатора с соотношением витков $n : 1$, а не $1 : n$.

ось при резонансной частоте ω_0 . При этом

$$\bar{C}\omega_0 - \frac{1}{\bar{L}\omega_0} = 0 \quad (5.3.7)$$

или

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\bar{L}\bar{C}}}. \quad (5.3.7')$$

Нормированная реактивная проводимость \bar{b} выражается через ω_0 в виде

$$\bar{b} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \left(\sqrt{\bar{L}\bar{C}}\omega - \frac{1}{\sqrt{\bar{L}\bar{C}}\omega} \right) = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (5.3.8)$$

В окрестности ω_0

$$\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \approx 2 \frac{d\omega}{\omega_0}, \quad (5.3.9)$$

а

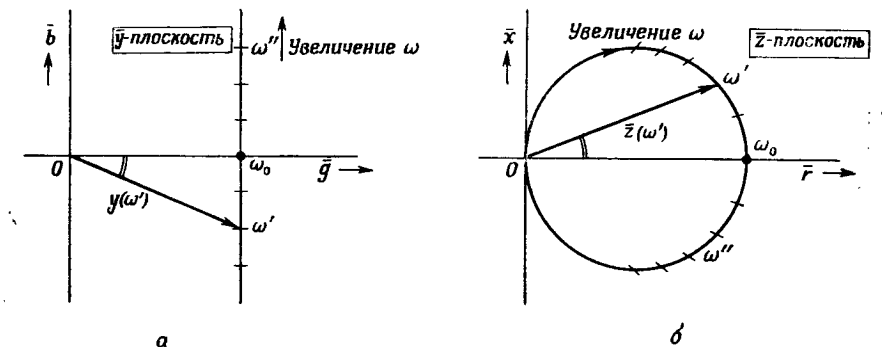
$$\bar{b} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \frac{2 d\omega}{\omega_0}, \quad (5.3.8')$$

в то время как

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{g} + j \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \frac{2 d\omega}{\omega_0}}, \quad (5.3.6')$$

если $\omega = \omega_0 + d\omega$.

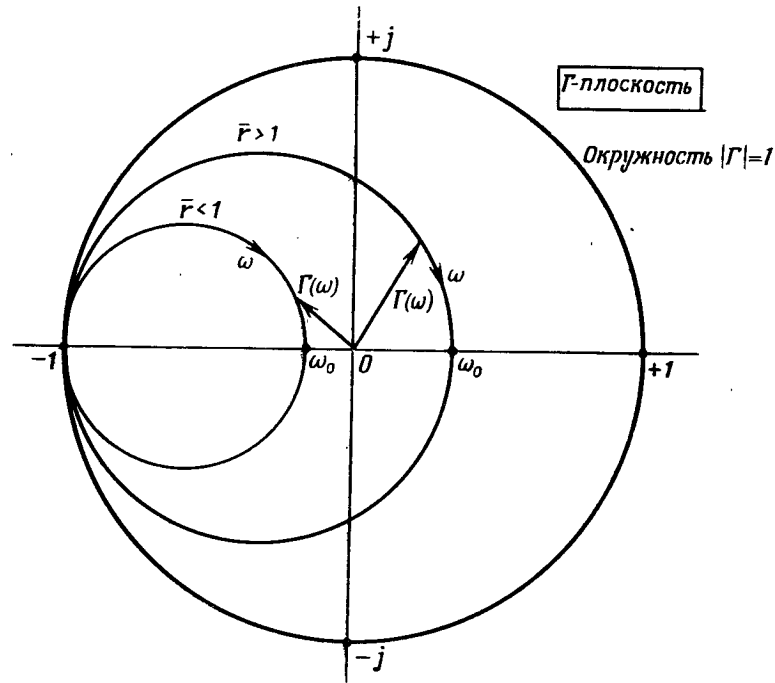
Таким образом, в окрестности ω_0 реактивная проводимость является *линейной* функцией частоты, и, как показано на фиг. 5.3.4, а, одинаковым частотным интервалам соответствуют



Фиг. 5.3.4. Кривые нормированной проводимости и полного нормированного сопротивления резонатора с одним элементом связи.

равноотстоящие точки. С учетом уравнения (5.3.6) строится зависимость нормированного сопротивления \bar{z} от частоты (фиг. 5.3.4, б).

Так же как и кривая нормированного сопротивления, зависимость коэффициента отражения от частоты (фиг. 5.3.5) представляет собой окружность [25]¹⁾. При нулевой или бесконечной частоте нормированное сопротивление $\bar{z} = 0$ и, следовательно, $\Gamma = -1$.



Ф и г. 5.3.5. Окружности $\bar{r} = \text{const}$ на круговой диаграмме.

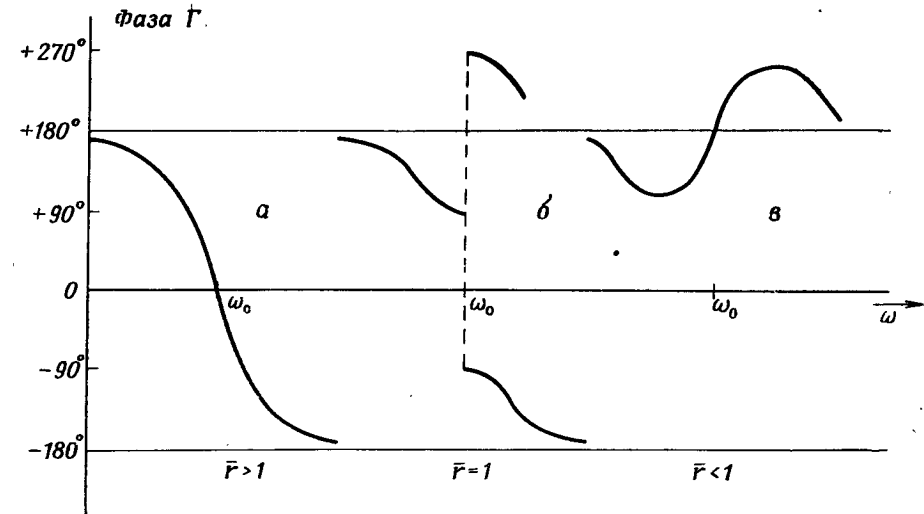
На резонансной частоте $\bar{z} = \bar{r}$; соответствующее значение Γ находится по круговой диаграмме. В соответствии с фиг. 5.3.4 наносится частотный масштаб.

Зависимость Γ может иметь три различные конфигурации относительно центра круговой диаграммы ($\Gamma = 0$).

1. Если $\bar{r} > 1$ на резонансной частоте, то окружность Γ охватывает центр круговой диаграммы. Фаза коэффициента отражения

¹⁾ Построение окружности Γ становится очень простым на круговой диаграмме в полярной системе координат, если вначале \bar{z} заменить на \bar{y} . Таким образом, зависимость Γ является окружностью постоянного сопротивления, равного активной проводимости \bar{g} , тогда как точки, соответствующие равным интервалам по частоте, лежат на окружностях постоянной реактивной проводимости. Действительная окружность Γ получается построением окружности, симметричной относительно центра полярной круговой диаграммы.

в плоскости эквивалентного представления параметров резонатора на нулевой частоте равна $+180^\circ$. Затем с увеличением частоты она уменьшается до -180° , проходя через нуль на резонансной частоте (фиг. 5.3.6, а). При увеличении частоты положение минимума стоячей волны будет перемещаться к нагрузке. Такое изменение



Ф и г. 5.3.6. Фазовые характеристики плого резонатора.

а — режим пересвязи; б — случай критической связи; в — режим недосвязи

положения минимума обычно называется *нормальным*. Оно соответствует большому значению n [уравнение (5.3.4)], т. е. большому значению коэффициента связи k (*режим пересвязи*).

2. Если $\bar{r} < 1$, то окружность Γ не охватывает центр круговой диаграммы. При увеличении частоты фаза коэффициента отражения сначала уменьшается, начиная со значения $+180^\circ$, до значений, меньших $+180^\circ$, а затем начинает увеличиваться, вновь проходя через $+180^\circ$ при резонансе. При дальнейшем увеличении частоты фаза уменьшается от значений, больших $+180^\circ$, до значения, равного $+180^\circ$ (фиг. 5.3.6, в). Положение минимума стоячей волны при этом будет перемещаться сначала к нагрузке, затем к генератору и вновь к нагрузке. Такое изменение положения минимума иногда называется *реверсивным*. Оно соответствует *режиму недосвязи*.

3. Наконец, если $\bar{r} = 1$, то окружность Γ проходит через центр круговой диаграммы. При резонансе фаза коэффициента отражения не является непрерывной функцией частоты и скачком изменяется от $+90^\circ$ до -90° (граничный случай пересвязанного резонатора)

или до $+270^\circ$ (граничный случай недосвязанного резонатора). Такое положение соответствует *критической связи*.

Чтобы определить \bar{r} , достаточно измерить КСВН на резонансной частоте и установить, является ли сдвиг минимума нормальным или реверсивным. Зная \bar{r} , можно построить окружность Γ . С помощью дополнительного измерения на любой частоте в окрестности ω_0 можно определить $\sqrt{\bar{C}/\bar{L}}$ по уравнению (5.3.8'). Так как $\omega_0 = 1/\sqrt{\bar{L}\bar{C}}$, величины \bar{R} , \bar{L} , \bar{C} теперь полностью определены; после этого на окружность может быть нанесен частотный масштаб. Практически для уменьшения погрешностей КСВН следует измерять Γ на частотах, далеких от резонансной, и определять степень отклонения Γ от -1^1).

§ 5.4. ДОБРОТНОСТЬ РЕЗОНАТОРА С ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ СВЯЗИ

Добротность резонансного контура Q определяется следующим образом:

$$Q = 2\pi \frac{\text{Энергия, накопленная в резонаторе}}{\text{Энергия, рассеиваемая за период}} \Big|_{\text{на резонансной частоте}} \quad (5.4.1)$$

С физической точки зрения такое определение Q через энергию и частоту является инвариантным независимо от применяемой эквивалентной схемы.

Ненагруженная добротность Q_0 учитывает энергию, рассеянную в самом резонаторе на резонансной частоте. По определению

$$Q_0 = 2\pi \frac{\text{Энергия, накопленная в резонаторе}}{\text{Энергия, рассеиваемая в резонаторе за период}} \Big|_{\text{на резонансной частоте}} \quad (5.4.2)$$

Таким образом, величина Q_0 не зависит от связи, а зависит только от α_T (которое в свою очередь зависит от вида колебаний в резонаторе и потерь в диэлектрическом заполнении и стенках). Несмотря на то что уравнение (5.4.2) принято в качестве абсолютного определения, добротность Q_0 можно выразить через более привычные величины.

а. Определение ненагруженной добротности Q_0 через параметры эквивалентной схемы. Из электротехники известно, что энергия,

¹⁾ Так как вход резонатора и плоскость эквивалентного представления могут быть разделены отрезком длинной линии, то положение этой плоскости будет меняться с изменением частоты, что приведет к искажению окружности Γ . В большинстве случаев этим эффектом можно пренебречь.

накопленная в резонансном контуре, показанном на фиг. 5.3.3, выражается в виде

$$U_{\text{нак}} = \frac{1}{2} \bar{C} |v_0|^2, \quad (5.4.3)$$

где v_0 — амплитуда напряжения в контуре на резонансной частоте.

Мощность, рассеиваемая в резонаторе на резонансной частоте, равна

$$P_{\text{рез}} \Big|_0 = \frac{|v_0|^2}{2r}, \quad (5.4.4)$$

а энергия, рассеиваемая за период колебаний, составляет

$$U_{\text{за период}} = \frac{\pi |v_0|^2}{r\omega_0} = \frac{\pi |v_0|^2}{r\omega_0}. \quad (5.4.5)$$

Следовательно, с учетом уравнения (5.4.2)

$$Q_0 = \pi \bar{C} |v_0|^2 \left(\frac{\bar{r}\omega_0}{\pi |v_0|^2} \right) = \bar{C} \bar{r} \omega_0. \quad (5.4.6)$$

Воспользовавшись уравнениями (5.3.7) и (5.3.4), получим различные выражения для Q_0 через параметры контура:

$$\begin{aligned} Q_0 &= \bar{C} \bar{r} \omega_0 = \frac{\bar{r}}{L\omega_0} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{L}} \bar{r} = C_0 R_0 \omega_0 = \\ &= \frac{R_0}{L_0 \omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} R_0 = C_3 R_3 \omega_0 = \frac{R_3}{L_3 \omega_0} = \sqrt{\frac{C_3}{L_3}} R_3. \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Заметим, что эти выражения не зависят от применяемой эквивалентной схемы. Этого следовало ожидать, так как Q_0 не зависит от связи.

б. Связь ненагруженной добротности Q_0 с шириной полосы пропускания. Пусть резонатор питается от источника постоянного тока i . Определим ω_1 и ω_2 ($\omega_2 > \omega_1$) как частоты, на которых мощность, рассеиваемая в резонаторе, равна половине мощности, рассеиваемой на резонансной частоте. Величины ω_1 и ω_2 называются «частотами половинной мощности».

Введем следующие обозначения:

- $P_{\text{рез}} \Big|_0$ — мощность, рассеиваемая в резонаторе на резонансной частоте;
- $P_{\text{рез}} \Big|_{1,2}$ — мощность, рассеиваемая на частотах $\omega_{1,2}$;
- v_0 — амплитуда напряжения на резонансной частоте;
- \bar{r} — нормированное сопротивление на резонансной частоте;
- $\bar{r}_{1,2}$ — нормированное сопротивление на частотах $\omega_{1,2}$.

Используя эти обозначения, с помощью уравнения (5.4.4) получаем

$$P_{\text{рез}}|_{1,2} = \frac{1}{2} P_{\text{рез}}|_0 = \frac{|v_{1,2}|^2}{2r} = \frac{1}{2} \frac{|v_0|^2}{2r}, \quad (5.4.8)$$

откуда

$$|v_{1,2}| = \frac{|v_0|}{\sqrt{2}}. \quad (5.4.9)$$

Поскольку для источника постоянного тока $|v| = i|z|$, из уравнения (5.4.9) следует, что

$$|v_{1,2}| = i|\bar{z}_{1,2}| = \frac{i\bar{r}}{\sqrt{2}}, \quad (5.4.10)$$

т. е.

$$|\bar{z}_{1,2}| = \frac{\bar{r}}{\sqrt{2}}. \quad (5.4.10')$$

Следовательно, используя уравнения (5.3.6) и (5.4.10'), получим

$$\bar{z}_{1,2} = \frac{1}{\bar{g} \pm j\bar{g}}, \quad (5.4.11)$$

т. е.

$$\bar{b}_1 = \sqrt{\frac{\bar{C}}{L}} \left(\frac{\omega_1}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_1} \right) = -\bar{g}, \quad (5.4.11')$$

$$\bar{b}_2 = \sqrt{\frac{\bar{C}}{L}} \left(\frac{\omega_2}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_2} \right) = \bar{g} \quad (\omega_2 > \omega_1).$$

Пусть

$$\omega_1 = \omega_0 - \frac{\Delta\omega_1}{2}, \quad \Delta\omega_1 \ll \omega_0$$

и

$$\omega_2 = \omega_0 + \frac{\Delta\omega_2}{2}, \quad \Delta\omega_2 \ll \omega_0.$$

После подстановки ω_1 и ω_2 в уравнение (5.4.11') получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_1 &= -\sqrt{\frac{\bar{C}}{L}} \frac{\Delta\omega_1}{\omega_0} = -\bar{g}, \\ \bar{b}_2 &= \sqrt{\frac{\bar{C}}{L}} \frac{\Delta\omega_2}{\omega_0} = \bar{g}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4.12)$$

Если ω_1 и ω_2 незначительно отличаются от ω_0 , то

$$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \Delta\omega_0 = (\omega_2 - \omega_1)^1. \quad (5.4.13)$$

Величина $\Delta\omega_0$ называется шириной полосы пропускания между частотами половинной мощности.

Из соотношения (5.4.7)

$$\bar{g} = \frac{\sqrt{\frac{\bar{C}}{L}}}{Q_0}. \quad (5.4.7')$$

С учетом уравнений (5.4.12) и (5.4.13) получим

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_0}, \quad (5.4.14)$$

т. е. Q_0 выражается как отношение резонансной частоты ω_0 к ширине полосы пропускания $\Delta\omega_0$.

в. Определение ненагруженной добротности Q_0 через постоянную времени. Если резонансный контур, показанный на фиг. 5.3.2, в котором первоначально накоплена энергия $U_{\text{нак}}$, полностью отключить от внешней цепи ($n \rightarrow 0$), то в нем некоторое время будут иметь место затухающие колебания на частоте, близкой к резонансной частоте стационарного режима. При этом степень затухания зависит от ненагруженной добротности Q_0 .

Затухающие колебания в эквивалентном резонансном контуре могут быть описаны дифференциальным уравнением

$$\frac{V}{R_3} + C_3 \frac{dV}{dt} + \frac{1}{L_3} \int V dt = 0. \quad (5.4.16)$$

Будем искать решение уравнения (5.4.16) в виде $V = V_i e^{j\omega ct}$, где V_i — начальное напряжение в контуре.

Подставим это решение в уравнение (5.4.16), в результате получим

$$\frac{V_i e^{j\omega ct}}{R_3} + j\omega_c C_3 V_i e^{j\omega ct} - \frac{1}{\omega_c L_3} V_i e^{j\omega ct} = 0, \quad (5.4.17)$$

т. е.

$$\left[j \left(C_3 \omega_c - \frac{1}{L_3 \omega_c} \right) + \frac{1}{R_3} \right] V_i e^{j\omega ct} = 0.$$

С учетом уравнений (5.3.8) и (5.4.7) имеем

$$j \left(C_3 \omega_c - \frac{1}{L_3 \omega_c} \right) + \frac{1}{R_3} = j \frac{Q_0}{R_3} \left(\frac{\omega_c}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_c} \right) + \frac{1}{R_3} = 0. \quad (5.4.17')$$

¹⁾ Если отличия значительные, то $\omega_1/\omega_0 - \omega_0/\omega_1 = \omega_0/\omega_2 - \omega_2/\omega_0$, откуда

$$\omega_1 \omega_2 = \omega_0^2. \quad (5.4.15)$$

Из этого уравнения найдем выражение для ω_c

$$\omega_c = \pm \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_0}\right)^2} + j \frac{\omega_0}{2Q_0}. \quad (5.4.18)$$

Амплитуда напряжения будет затухать по экспоненциальному закону как $e^{-t/\tau}$, где постоянная времени

$$\tau = \frac{2Q_0}{\omega_0}, \quad (5.4.19)$$

а мощность будет затухать по закону $e^{-2t/\tau} = e^{-t/\tau'}$ с постоянной времени

$$\tau' = \frac{Q_0}{\omega_0}. \quad (5.4.20)$$

Таким образом, ненагруженная добротность Q_0 может быть выражена через резонансную частоту ω_0 и постоянную времени.

Выражение (5.4.18) представляет собой точное соотношение для резонансного контура с сосредоточенными постоянными, показанного на фиг. 5.3.2, и для резонатора вогнутого типа, изображенного на фиг. 5.1.1, г. Однако выражение (5.4.18) является лишь приближенным для реальных объемных резонаторов сверхвысоких частот. Действительная часть ω_c не совпадает с соответствующей величиной, рассматриваемой в § 5.5. В приложении XV предпринята попытка связать параметры контура с сосредоточенными постоянными с параметрами резонатора, образованного из отрезка передающей линии. Ненагруженная добротность Q_0 [уравнение (XV.3)] и постоянная времени τ [уравнение (XV.13')] при $k = 0$ выражаются через полное затухание α_T .

г. **Внешняя добротность.** Внешняя добротность $Q_{вн}$ обычно определяется следующим образом:

$$Q_{вн} = 2\pi \frac{\text{Энергия, накопленная в резонаторе}}{\text{Энергия, рассеиваемая во внешней цепи за период}} \Bigg|_{\text{на резонансной частоте}} \quad (5.4.21)$$

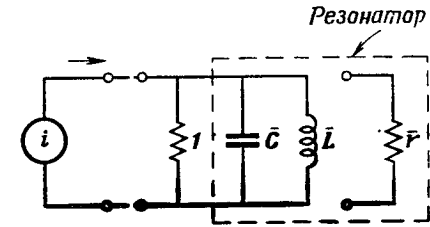
Понятие внешней добротности является искусственным и не имеет непосредственного отношения к практике. Из общего определения (5.4.21) может быть сделан неправильный вывод, что при критической связи $Q_{вн}$ является бесконечно большой величиной, так как энергия во внешней цепи не рассеивается. Определение должно быть видоизменено следующим образом: «энергия, рассеиваемая во внешней цепи за период при выключенном внешнем генераторе». Таким образом, в уравнении (5.1.5) фиктивная волна, рассеивающаяся во внешней цепи, равна

вающаяся во внешней цепи, равна

$$b_{1\text{ вн}} = \frac{k^2 e^{-\alpha_T}}{1 - \sqrt{1 - k^2 e^{-\alpha_T}}} a_1. \quad (5.4.22)$$

Если генератор внезапно выключить, то фиктивная волна становится реальной и существует в течение некоторого времени (§ 5.5).

Эквивалентная схема, удобная для изучения внешней добротности $Q_{вн}$, показана на фиг. 5.4.1, где нормированное активное



Фиг. 5.4.1. Эквивалентная схема для определения внешней добротности.

сопротивление равно 1 независимо от внутренних потерь резонатора.

Аналогично уравнению (5.4.7) получим выражение для внешней добротности в виде

$$Q_{вн} = \bar{C}\omega_0 = \frac{1}{L\omega_0} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{L}}, \quad (5.4.23)$$

$$Q_{вн} = \frac{Z_0}{n^2} \sqrt{\frac{C_3}{L_3}}. \quad (5.4.23')$$

Можно также выразить внешнюю добротность $Q_{вн}$ через ω_0 и ширину полосы пропускания $\Delta\omega_{вн}$

$$Q_{вн} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{вн}}, \quad (5.4.24)$$

где $\Delta\omega_{вн} = \omega_{2\text{ вн}} - \omega_{1\text{ вн}}$, а $\omega_{2\text{ вн}}$, $\omega_{1\text{ вн}}$ являются частотами половинной мощности и подчиняются соотношению

$$b_{1,2} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{L}} \left(\frac{\omega_{1,2\text{ вн}}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2\text{ вн}}} \right) = \pm 1, \quad (5.4.25)$$

которое аналогично соотношению (5.4.11').

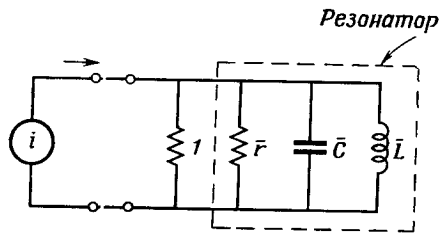
Из уравнения (5.4.3') видно, что для данных внутренних параметров резонатора внешняя добротность $Q_{вн}$ зависит от n^2 , т. е. от величины связи. Таким образом, для заданной конфигурации

резонатора при изменении внутренних потерь меняется только величина Q_0 , а величина $Q_{вн}$ остается неизменной. Напротив, изменение связи оказывает влияние только на величину $Q_{вн}$, при этом величина Q_0 не меняется. В этом смысле внешняя добротность $Q_{вн}$ является мерой связи: чем больше $Q_{вн}$, тем меньше связь.

д. **Нагруженная добротность.** Нагруженная добротность Q_n обычно определяется следующим образом:

$$Q_n = 2\pi \frac{\text{Энергия, накопленная в резонаторе}}{\text{Энергия, рассеиваемая в резонаторе и во внешней цепи за период}} \Big|_{\text{на резонансной частоте}} \quad (5.4.26)$$

Учитывая, что понятие энергии, рассеиваемой во внешней цепи, является искусственным (за исключением случая, когда



Ф и г. 5.4.2. Эквивалентная схема для определения нагруженной добротности.

внешний источник мощности выключается), определение нагруженной добротности также до некоторой степени искусственно. Физический смысл, заложенный в это определение, заключается, во-первых, в том, что величина Q_n определяет постоянную времени всей системы, и, во-вторых, в том, что соответствующая данному значению Q_n полоса пропускания системы просто определяется по частотам половинной мощности резонатора (в качестве источника колебаний здесь подразумевается *источник постоянной мощности*, наиболее часто встречающийся в технике СВЧ).

Эквивалентная схема, удобная для рассмотрения нагруженной добротности Q_n , показана на фиг. 5.4.2. Нагруженную добротность можно выразить через параметры эквивалентной схемы аналогично уравнению (5.4.7), если \bar{r} заменить параллельным соединением \bar{r} и 1, т. е. \bar{r} заменить на $\bar{r}/(\bar{r}+1)$, а \bar{g} — на $\bar{g}+1$:

$$Q_n = \bar{C} \frac{\bar{r}}{\bar{r}+1} \omega_0 = \frac{\bar{r}}{(\bar{r}+1) \bar{L} \omega_0} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \frac{\bar{r}}{\bar{r}+1} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \frac{1}{1+\bar{g}} \quad (5.4.27)$$

Кроме того, величина Q_n может быть определена через ω_0 и ширину полосы пропускания $\Delta\omega_n$

$$Q_n = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_n}, \quad (5.4.28)$$

где $\Delta\omega_n = \omega_{2н} - \omega_{1н}$, а $\omega_{1н}$ и $\omega_{2н}$ — частоты половинной мощности, которые подчиняются соотношению

$$b_{1,2н} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \left(\frac{\omega_{1,2н}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2н}} \right) = \pm (1 + \bar{g}). \quad (5.4.29)$$

Нагруженная добротность Q_n также связана с постоянной времени контура, показанного на фиг. 5.4.2 (возбужденный резонатор с внутренними потерями расходует накопленную энергию во внешнем контуре, когда источник отключается). С учетом уравнения (5.4.27) выражение для ω_c может быть представлено по аналогии с уравнением (5.4.18) в виде

$$\omega_c = \pm \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q_n}\right)^2} + j \frac{\omega_0}{2Q_n}. \quad (5.4.30)$$

Постоянная времени по напряжению равна $2Q_n/\omega_0$, а постоянная времени по мощности равна Q_n/ω_0 .

е. **Соотношения между добротностями.** Из выражений

$$Q_0 = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \bar{r}, \quad (5.4.7)$$

$$Q_{вн} = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}}, \quad (5.4.23)$$

$$Q_n = \sqrt{\frac{\bar{C}}{\bar{L}}} \frac{\bar{r}}{\bar{r}+1} \quad (5.4.27)$$

следует, что

$$\frac{Q_0}{Q_{вн}} = \bar{r} \quad (5.4.31)$$

и

$$\frac{1}{Q_n} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн}}. \quad (5.4.32)$$

ж. **Мощность, поступающая в резонатор от источника постоянной мощности.** В технике сверхвысоких частот источник колебаний генерирует постоянную мощность P_0 или может быть сделан таковым. С учетом уравнений (1.3.13) и (1.3.15) мощность $P_{рез}$, поступающая в резонатор, равна

$$P_{рез} = P_0 (1 - |\Gamma|^2) = P_0 \left(1 - \left| \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} \right|^2 \right). \quad (5.4.33)$$

Поскольку нормированное сопротивление \bar{z} имеет вид

$$\bar{z} = \frac{1}{\bar{g} + j \sqrt{\frac{\bar{C}}{L} \frac{2 d\omega}{\omega_0}}}, \quad (5.3.6')$$

уравнение (5.4.33) можно представить таким образом:

$$\begin{aligned} P_{\text{рез}} &= P_0 \left[1 - \frac{\left| 1 - \bar{g} - j \sqrt{\frac{\bar{C}}{L} \frac{2 d\omega}{\omega_0}} \right|^2}{\left| 1 + \bar{g} + j \sqrt{\frac{\bar{C}}{L} \frac{2 d\omega}{\omega_0}} \right|^2} \right] = \\ &= P_0 \left[\frac{(1 + \bar{g})^2 + \frac{\bar{C}}{L} \left(\frac{2 d\omega}{\omega_0} \right)^2 - (1 - \bar{g})^2 - \frac{\bar{C}}{L} \left(\frac{2 d\omega}{\omega_0} \right)^2}{(1 + \bar{g})^2 + \frac{\bar{C}}{L} \left(\frac{2 d\omega}{\omega_0} \right)^2} \right] = \\ &= P_0 \frac{4\bar{g}}{(1 + \bar{g})^2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1 + \bar{g}} \right)^2 \frac{\bar{C}}{L} \left(\frac{2 d\omega}{\omega_0} \right)^2} \right] = \\ &= P_0 \frac{4Q_{\text{H}}^2}{Q_{\text{ВН}}Q_0} \left[\frac{1}{1 + Q_{\text{H}}^2 \left(\frac{2 d\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]. \quad (5.4.34) \end{aligned}$$

Отметим, что, согласно этому уравнению, мощность, поступающая в резонатор, зависит только от величин добротностей, резонансной частоты ω_0 и рабочей частоты (сосредоточенные постоянные сокращаются).

При резонансе ($d\omega = 0$)

$$P_{\text{рез}} \Big|_{\omega_0} = P_0 \frac{4Q_{\text{H}}^2}{Q_{\text{ВН}}Q_0}. \quad (5.4.34')$$

На частотах половинной мощности

$$P_{\text{рез}} \Big|_{\omega_{1,2}} = \frac{1}{2} P_{\text{рез}} \Big|_{\omega_0} = P_0 \frac{4Q_{\text{H}}^2}{Q_{\text{ВН}}Q_0} \left[\frac{1}{1 + 1} \right]. \quad (5.4.34'')$$

Сравнивая последнее выражение с уравнением (5.4.34), получаем

$$Q_{\text{H}}^2 \left(\frac{2 d\omega_{1,2}}{\omega_0} \right)^2 = 1 \quad (5.4.35)$$

или

$$Q_{\text{H}} = \frac{\omega_0}{2 d\omega_{1,2}}. \quad (5.4.35')$$

Частоты половинной мощности выражаются следующим образом: $\omega_1 = \omega_0 + d\omega_1$ ($d\omega_1 < 0$) и $\omega_2 = \omega_0 + d\omega_2$ ($d\omega_2 = |d\omega_1| > 0$), а их разность равна $2d\omega_2 = 2|d\omega_1|$. Таким образом, из уравнения (5.4.28) следует, что ширина полосы пропускания $\Delta\omega_{\text{H}}$ определяет частоты, на которых мощность, поступающая в резонатор, равна половине мощности, поступающей в резонатор от источника постоянной мощности на резонансной частоте¹⁾. Таким образом, добротность Q_{H} и связанная с ней ширина полосы пропускания являются мерой остроты настройки резонатора.

3. Экспериментальное определение добротностей. Исходя из соотношений, приведенных в этом параграфе, для экспериментального определения добротностей можно использовать различные методы.

Для убыстрения измерений и расчетов следует заготовить диаграммы, аналогичные изображенным ниже. Для данного КСВН при резонансе (минимум КСВН) с помощью таких диаграмм можно определить значения КСВН, соответствующие точкам половинной мощности для Q_0 и $Q_{\text{ВН}}$.

В плоскости нормированной проводимости (фиг. 5.4.3) точкам половинной мощности для добротностей Q_0 , $Q_{\text{ВН}}$ и Q_{H} соответствуют условия

$$\bar{b}_{1,2,0} = \pm \bar{g}, \quad (5.4.11')$$

$$\bar{b}_{1,2\text{ВН}} = \pm 1, \quad (5.4.25)$$

$$\bar{b}_{1,2\text{H}} = \pm (1 + \bar{g}). \quad (5.4.29)$$

Эти точки можно легко перенести на полярную круговую диаграмму, если рассматривать кривые, показанные на фиг. 5.4.3, не как кривые проводимости, а как кривые нормированного сопротивления. Таким образом, промежуточные построения на фиг. 5.4.4 заключаются в том, что кривая проводимости резонатора наносится как окружность постоянного сопротивления, равного \bar{g} (см. примечание на стр. 244). Геометрическим местом точек половинной мощности для $Q_{\text{ВН}}$ является окружность постоянной реактивной проводимости $\pm j1$.

Геометрическим местом точек половинной мощности для Q_{H} являются прямые линии, показанные на фиг. 5.4.4. Это связано с тем, что прямые на плоскости полного сопротивления переходят в окружности или прямые линии на плоскости коэффициента отражения [25]. Чтобы показать, что они являются прямыми линиями, рассмотрим точки

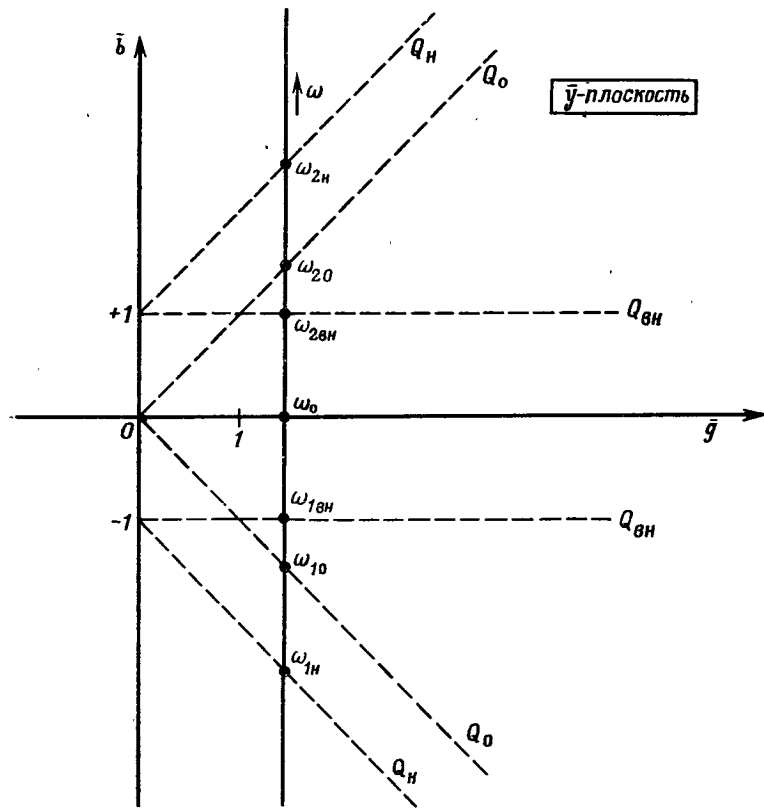
$$\bar{z} = 1 \pm j2,$$

¹⁾ Отметим, что первое определение $\Delta\omega_{\text{H}}$ [уравнение (5.4.29)] включает как мощность, поступающую в резонатор от источника *постоянного тока*, так и мощность, рассеиваемую в нагрузке.

которым соответствуют

$$\Gamma = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{\pm j2}{2 \pm j2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [\cos(\pm 45^\circ) + j \sin(\pm 45^\circ)].$$

Эти значения Γ действительно лежат на прямых линиях, соединяющих $\Gamma = 1$ с $\Gamma = \pm j$. Следовательно, геометрическим местом точек половинной мощности должны быть прямые линии.



Ф и г. 5.4.3. Проводимость резонатора и определение точек половинной мощности.

Наконец, геометрическое место точек половинной мощности для Q_0 представляет собой окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центрами, расположенными в точках $\Gamma = \pm j$. Действительно, в частном случае сопротивлений

$$\bar{z} = \frac{1}{2} (\sqrt{2} \pm j \sqrt{2})$$

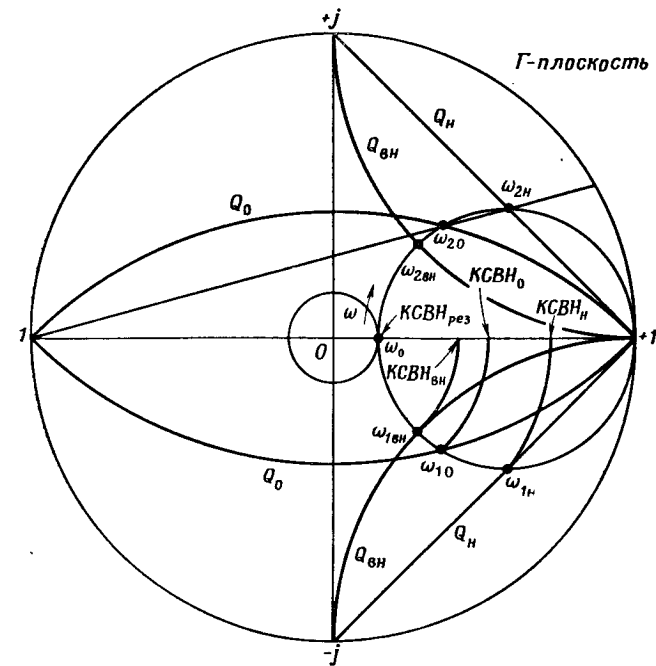
соответствуют точки

$$\Gamma = \frac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \frac{\frac{1}{2} (\sqrt{2} \pm j \sqrt{2}) - 1}{\frac{1}{2} (\sqrt{2} \pm j \sqrt{2}) + 1} = \pm \frac{1}{1 + \sqrt{2}}.$$

Расстояние от $\Gamma = \pm j$ до этих точек равно

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} + 1 = \sqrt{2}.$$

Поскольку геометрическое место точек включает также точки ± 1 , расположенные на расстоянии $\sqrt{2}$ от $\pm j$, то рассматриваемые



Ф и г. 5.4.4. Графическое определение добротностей на круговой диаграмме.

точки лежат на окружности радиуса $\sqrt{2}$ с центрами в точках $\Gamma = \pm j$. Следовательно, эти окружности являются геометрическим местом точек половинной мощности для определения Q_0 .

Можно также показать, что точка $\Gamma = -1$, точки половинной мощности для Q_0 и точки половинной мощности для Q_H лежат на одной прямой¹⁾.

Поскольку сопротивления формально были заменены проводимостями, то для того, чтобы получить истинные фазы коэффициентов отражения, все результирующие кривые и точки пересечения на плоскости Γ следует повернуть на 180° . Если, однако, интерес представляют только абсолютные значения Γ , то достаточно ограничиться рассмотренным построением.

Итак, для данного значения КСВН на резонансной частоте эти построения (или соответствующие им аналитические выражения) позволяют установить значения КСВН, которые соответствуют точкам половинной мощности. Отметим важность определения характера изменения положения минимума при расстройке; это необходимо для того, чтобы установить, охватывает ли окружность Γ центр круговой диаграммы или нет (§ 5.3).

Практически процедура измерений состоит в следующем. Сначала измеряют минимальное значение КСВН и соответствующую ему резонансную частоту. Далее определяют, является ли сдвиг минимума нормальным или реверсивным, а затем изменяют частоту до получения требуемых значений КСВН точек половинной мощности. Измеряя соответствующие частоты, определяют добротности из соотношения $\omega_0/\Delta\omega_{1,2}$.

и. Нормированное сопротивление. Нормированное сопротивление резонатора в плоскости эквивалентного представления можно определить через величины добротностей и резонансную частоту ω_0 .

С учетом уравнений (5.3.6), (5.3.8), (5.4.23) и (5.4.31) имеем

$$\bar{z} = \frac{1}{g + j\bar{b}} = \frac{1}{\frac{Q_{BH}}{Q_0} + jQ_{BH} \frac{2d\omega}{\omega_0}} \quad (5.4.36)$$

и

$$\bar{b} = Q_{BH} \frac{2d\omega}{\omega_0}. \quad (5.4.36')$$

§ 5.5. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РЕЗОНАТОРЕ С ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ СВЯЗИ

Переходные процессы подробно рассматриваются в приложении XV. Установлено, что при выключении генератора величина b_1 уменьшается в e раз (по сравнению с первоначальным значением) за время $t = 2Q_H/\omega_0$. Такой же результат получается при рассмотрении эквивалентной схемы с сосредоточенными постоянными [уравнение (5.4.30)].

¹⁾ Доказательство сводится к тому, что всегда можно найти три не равных нулю числа a , b , c , удовлетворяющих условию: $-a + b\Gamma_{2,0} + c\Gamma_{2,H} = 0$.

Начальное значение b_1 равно

$$b_1 = \frac{k^2 e^{-\alpha T}}{1 - \sqrt{1 - k^2} e^{-\alpha T}} a_1. \quad (XV.8)$$

Тогда зависимость мощности P_{BH} , выходящей из резонатора, от времени имеет вид

$$P_{BH} = P_0 \left[\frac{k^2 e^{-\alpha T}}{1 - \sqrt{1 - k^2} e^{-\alpha T}} \right]^2 e^{-\omega_0 t / Q_H}, \quad (5.5.1)$$

где P_0 — мощность, генерируемая источником колебаний до выключения.

Если $e^{\alpha T} \approx 1 + \alpha T$, то уравнение (5.5.1) с учетом (XV.5') и (XV.7) можно выразить через Q_{BH} и Q_H в следующем виде:

$$P_{BH} = P_0 \left[2 \frac{Q_H}{Q_{BH}} \right]^2 e^{-\omega_0 t / Q_H}. \quad (5.5.1')$$

При $t = 0$ величина P_{BH} может быть меньше P_0 ($Q_0 < Q_{BH}$), равна P_0 ($Q_0 = Q_{BH}$ или $2Q_H = Q_{BH}$) или больше P_0 ($Q_0 > Q_{BH}$). В предельном случае, когда $Q_0 \gg Q_{BH}$ (при $t = 0$), $P_{BH} = 4P_0$.

Переходный процесс резонатора с одним элементом связи используется в эхо-резонаторе — приборе, который служит для имитации отраженных сигналов при испытании приемников радиолокационных станций. Вообще величина Q_0 является независимым параметром (практически Q_0 стараются делать как можно больше), а Q_{BH} зависимым. Таким образом, для малых значений Q_{BH} (случай пересвязанного резонатора) первоначальная отраженная волна велика, а постоянная времени, зависящая от Q_H , мала. При больших значениях Q_{BH} первоначальная отраженная волна мала, а постоянная времени велика. Кривые зависимости отраженной мощности от времени для малых и больших значений Q_{BH} пересекутся в некоторый момент времени. Величина Q_{BH} (а следовательно, и связь) будет определяться специфическими или средними требованиями.

Если источник колебаний генерирует мощность P_0 на частоте, не равной ω_0 , то мощность P_{BH} , выходящая из резонатора, будет меньше оптимальной. Рассмотрим этот случай подробнее. Зависимость «средней» мощности, поступающей во внешнюю цепь, показанную на фиг. 5.4.2, от времени представляется в виде

$$P_{BH} = \frac{|v|^2}{2} = \frac{|v_i|^2}{2} e^{-\omega_0 t / Q_H}, \quad (5.5.2)$$

где v_i — нормированное начальное напряжение в цепи резонансного контура.

Воспользовавшись уравнением (5.4.2), запишем

$$U_{\text{нак}} = \frac{Q_0 P_{\text{рез}}}{\omega_0}. \quad (5.5.3)$$

В свою очередь $P_{\text{рез}}$ выражается через P_0 и рабочую частоту

$$P_{\text{рез}} = P_0 \frac{4Q_H^2}{Q_{\text{вн}}Q_0} \left[\frac{1}{1 + Q_H^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]. \quad (5.4.34)$$

После подстановки уравнения (5.4.34) в (5.5.3) получим

$$U_{\text{нак}} = P_0 \frac{4Q_H^2}{Q_{\text{вн}}\omega_0} \left[\frac{1}{1 + Q_H^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0} \right)^2} \right]. \quad (5.5.3')$$

С учетом уравнения (5.4.23) $U_{\text{нак}}$ выражается через v_i следующим образом:

$$U_{\text{нак}} = \frac{\bar{C} |v_i|^2}{2} = \frac{Q_{\text{вн}}}{2\omega_0} |v_i|^2. \quad (5.5.4)$$

Подставив уравнения (5.5.4) и (5.5.3') в уравнение (5.5.2), в результате получим выражение

$$P_{\text{вн}} = P_0 \left(2 \frac{Q_H}{Q_{\text{вн}}} \right)^2 \left[\frac{1}{1 + Q_H^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0} \right)^2} \right] e^{-\omega_0 t / Q_H}, \quad (5.5.5)$$

в которое не входят сосредоточенные параметры эквивалентной схемы. Как показано в приложении XV, если зависимость амплитуды падающей волны a_1 от времени имеет вид ступеньки, переходный процесс описывается следующим образом:

$$b_1 = \left\{ -\sqrt{1-k^2} + k^2 e^{-\alpha T} \left[\frac{1 - (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T})^{1/T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T}} \right] \right\} a_1, \quad (XV.18)$$

где

$$T = \frac{2l}{v_{\text{гр}}}. \quad (XV.9)$$

Уравнение (XV.18) можно выразить только через добротности и резонансную частоту ω_0 , но при этом получается излишне сложное соотношение. Достаточно отметить, что при $t=0$

$$b_1|_{t=0^+} = -\sqrt{1-k^2} a_1, \quad (5.5.6)$$

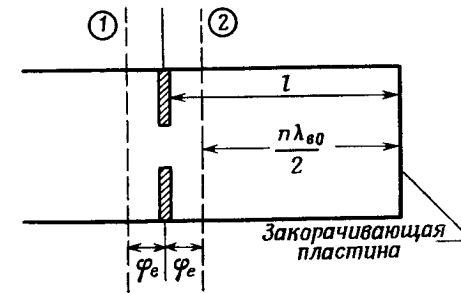
так что в большинстве практических случаев ($|k|$ мало) в момент, когда генератор включается, резонатор представляет собой цепь короткого замыкания в плоскости эквивалентного представления параметров. Если $t \rightarrow \infty$, то

$$b_1 = -\left(\sqrt{1-k^2} - \frac{k^2 e^{-\alpha T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T}} \right) a_1, \quad (5.1.5')$$

т. е. имеет место стационарный режим. Чем больше величина $2Q_H/\omega_0$, тем больше времени требуется для того, чтобы волна b_1 достигла значения стационарного режима.

§ 5.6. ВОЛНОВОДНЫЙ РЕЗОНАТОР С ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ СВЯЗИ

Резонатор с одним элементом связи можно получить следующим образом: закорачивают волновод и на определенном расстоянии l от закоротки помещают диафрагму, перегородку или штырь (фиг. 5.6.1). Такой тип резонатора является частным случаем устройств, рассмотренных в предыдущих параграфах, поэтому все выводы справедливы и в данном случае. Однако обычно в качестве устройств связи используются симметричные элементы, которые



Фиг. 5.6.1. Волноводный резонатор с одним элементом связи.

подробно описаны в литературе. Поэтому волноводный резонатор легко синтезируется и не требует большой экспериментальной работы.

Обычно (§ 3.3) симметричное соединение характеризуется шунтирующим реактивным сопротивлением \bar{x}_e или шунтирующей реактивной проводимостью \bar{b}_e ($\bar{x}_e = -1/\bar{b}_e$), которые представляются в виде графиков или диаграмм [5, 10—12]. В случае толстой неоднородности последняя может быть представлена в виде шунтирующего элемента, расположенного на некотором расстоянии от плоскости симметрии, или в виде T-образного четырехполюсника, расположенного в плоскости симметрии (фиг. 3.3.3). Во всех случаях первоочередная задача заключается в том, чтобы выразить матрицу

$$[S] = \begin{vmatrix} -\sqrt{1-k^2} & jk \\ jk & -\sqrt{1-k^2} \end{vmatrix} \quad (5.1.1')$$

через \bar{x}_e или \bar{b}_e . В частности, ниже будет показано, что для данной величины \bar{x}_e (или \bar{b}_e) можно просто определить расстояния

от шунтирующего элемента до плоскости отсчета, при которых

$$s_{11} = s_{22} = -|s_{11}|, \quad (5.6.1)$$

т. е. являются действительными и отрицательными.

В приложении III матрица рассеяния шунтирующего сопротивления получена в виде

$$[S] = \frac{1}{1+2\bar{z}_e} \begin{vmatrix} -1 & 2\bar{z}_e \\ 2\bar{z}_e & -1 \end{vmatrix} \quad (III.10)$$

а в § 3.3 показано, что тонкая неоднородность без потерь может быть представлена в виде эквивалентного шунтирующего реактивного сопротивления $\bar{z}_e = j\bar{x}_e$. Следовательно, уравнение (III.10) является матрицей рассеяния тонкой диафрагмы связи в плоскости диафрагмы, если $\bar{z}_e = j\bar{x}_e$. Желательно выбрать плоскости отсчета таким образом, чтобы матрицу (III.10) привести к виду (5.1.1').

Пусть электрическая длина между плоскостями отсчета и плоскостью симметрии равна φ_e рад, тогда матрица рассеяния примет вид

$$[S]' = \frac{e^{j2\varphi_e}}{1+2j\bar{x}_e} \begin{vmatrix} -1 & 2j\bar{x}_e \\ 2j\bar{x}_e & -1 \end{vmatrix}, \quad (5.6.2)$$

где

$$s_{11} = s_{22} = -\frac{e^{-j2\varphi_e}}{1+2j\bar{x}_e}. \quad (5.6.2')$$

Для того чтобы $s_{11} = s_{22}$ была действительной и отрицательной, величина $e^{j2\varphi_e}/(1+2j\bar{x}_e)$ должна быть действительной и положительной, т. е.

$$\varphi_e = \frac{1}{2} \arctg 2\bar{x}_e = \frac{1}{2} \arctg \left(-\frac{2}{\bar{b}_e} \right). \quad (5.6.3)$$

Таким образом, если \bar{x}_e является положительной величиной (шунтирующая индуктивность), то φ_e также положительная величина (по направлению к соединению), т. е. плоскости отсчета будут находиться на расстоянии, меньшем $\lambda_{в0}/2$, но большем $3\lambda_{в0}/8$ от соединения. Если \bar{x}_e является отрицательным (шунтирующая емкость), то φ_e также отрицательная величина (по направлению от соединения) и плоскости отсчета находятся на расстоянии, меньшем $\lambda_{в0}/8$ от соединения¹⁾.

¹⁾ Следовательно, если шунтирующий элемент является индуктивным, можно сделать $3\lambda_{в0}/8 < l < \lambda_{в0}/2$. Если же шунтирующий элемент является емкостным, то $\lambda_{в0}/2 < l < 5\lambda_{в0}/8$ или $l < \lambda_{в0}/8$. Второе решение следует применять с осторожностью из-за того, что зона, где имеются высшие типы волн, оказывается в непосредственной близости от закоротки.

Для этих плоскостей отсчета (5.6.2) принимает вид

$$[S]'' = \frac{1}{\sqrt{1+4\bar{x}_e^2}} \begin{vmatrix} -1 & 2j\bar{x}_e \\ 2j\bar{x}_e & -1 \end{vmatrix} \quad (5.6.4)$$

Сравнение с матрицей (5.1.1') показывает, что

$$k = \frac{2\bar{x}_e}{\sqrt{1+4\bar{x}_e^2}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{4+\bar{b}_e^2}}, \quad (5.6.5)$$

где k — положительная величина, если неоднородность является индуктивной, и отрицательная, если неоднородность является емкостной. Резонансная длина l равна

$$\frac{\lambda_{в0}}{2\pi} \left[n\pi + \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|} \right] \quad \text{при } \bar{b}_e > 0 \quad (5.6.6)$$

и

$$\frac{\lambda_{в0}}{2\pi} \left[n\pi - \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|} \right] \quad \text{при } \bar{b}_e < 0.$$

Как и раньше, ненагруженная добротность Q_0 является функцией средних потерь в структуре

$$Q_0 \approx \left(\frac{2l}{\alpha_T} \right) \frac{\pi\lambda_{в0}}{\lambda_0^2}. \quad (XV.3)$$

С учетом уравнений (XV.5) и (5.6.5) внешнюю добротность $Q_{вн}$ можно выразить через \bar{b}_e

$$Q_{вн} \approx l(4+\bar{b}_e^2) \frac{\pi\lambda_{в0}}{\lambda_0^2}, \quad (5.6.7)$$

где l определяется по уравнению (5.6.6) и приблизительно равна целому числу полувольт.

Предположения, лежащие в основе такого аналитического подхода, заключаются в следующем: проводимость \bar{b}_e и положения плоскостей отсчета не зависят от частоты¹⁾; энергия не накапливается в самой неоднородности, и другие резонансы расположены далеко по сравнению с шириной полосы пропускания самого резонатора. Все отмеченные предположения справедливы при малых значениях α_T (Q_0 велико) и больших значениях \bar{b}_e ($Q_{вн}$ велико). Итак, волноводный резонатор анализируется на следующей основе.

¹⁾ Фактически \bar{b}_e всегда уменьшается с увеличением частоты [5, 10—12]. Зависимость величины \bar{b}_e от частоты становится более заметной при увеличении толщины неоднородности.

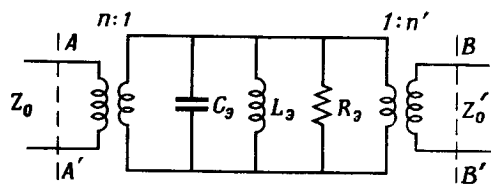
1. Постоянная затухания волновода должна быть известна, либо измерена или оценена. Чтобы определить полное затухание α_T , необходимо оценить сосредоточенные потери в диафрагме и закорачивающей пластине. После этого по уравнению (XV.3) можно определить ненагруженную добротность Q_0 .

2. По известной величине \bar{b}_e можно рассчитать как длину резонатора по уравнению (5.6.6), так и внешнюю добротность $Q_{вн}$ по уравнению (5.6.7).

Определение величины \bar{b}_e по заданному значению $Q_{вн}$ — задача более сложная, так как $Q_{вн}$ зависит от l , а l в свою очередь зависит от \bar{b}_e . Такая задача решается методом последовательных приближений, за исключением случая, когда величина $|\bar{b}_e|$ настолько велика, что $l \approx n\lambda_{в0}/2$. Если неоднородность является «толстой», то l увеличивается либо на величину, определяемую в справочниках, либо оцененную на основе положений § 3.3. Отметим, что плоскость эквивалентного представления параметров резонатора является плоскостью отсчета 1 и расположена симметрично относительно плоскости отсчета 2.

§ 5.7. ПРОХОДНОЙ РЕЗОНАТОР С ДВУМЯ ЭЛЕМЕНТАМИ СВЯЗИ ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА И ДОБРОТНОСТЬ

Для резонатора с двумя элементами связи различие между входом и выходом состоит в том, что первый соединен с генератором, а второй — с согласованной нагрузкой. Если рассматривать резонатор с двумя элементами связи со стороны входа, то на частотах,

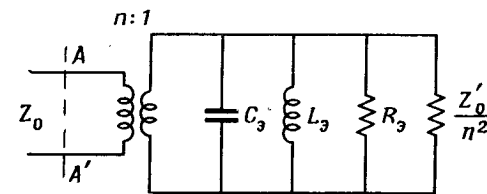


Ф и г. 5.7.1. Эквивалентная схема резонатора, включенного по схеме четырехполюсника, с двумя элементами связи.

близких к резонансной, он напоминает резонатор с одним элементом связи, описанный в предыдущих параграфах. Большая часть падающей мощности отражается от входной неоднородности. С другой стороны, малая часть интенсивной волны, многократно отражающейся внутри резонатора, просачивается обратно, причем вторая волна находится в противофазе с первой. Однако теперь возникают потери мощности не только внутри самого резонатора

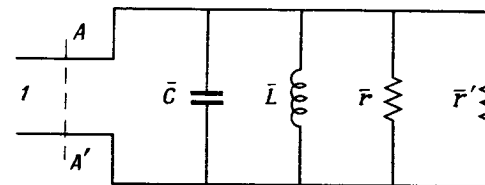
(омические потери), но и в выходной цепи (часть мощности уходит в выходную цепь).

В качестве первой эквивалентной схемы резонатора с двумя элементами связи логично выбрать схему, показанную на фиг. 5.7.1, полученную по аналогии со схемой, изображенной на фиг. 5.3.2.



Ф и г. 5.7.2. Эквивалентная схема с исключенным выходным трансформатором.

Резонатор по-прежнему характеризуется параметрами C_0 , L_0 , R_0 , не зависящими от связи. Входная связь представлена в виде трансформатора с коэффициентом трансформации $n:1$, а выходная — трансформатором с коэффициентом трансформации $1:n'$. Плоскости AA' и BB' по-прежнему представляют собой плоскости



Ф и г. 5.7.3. Эквивалентная схема с нормированными параметрами.

эквивалентного представления параметров резонатора, т. е. плоскости, где сопротивление равно нулю на частотах, далеких от резонансной.

От первой эквивалентной схемы (фиг. 5.7.1) легко перейти к схеме, показанной на фиг. 5.7.2 (исключением выходного трансформатора), и к схеме, показанной на фиг. 5.7.3 (исключением входного трансформатора и нормированием по отношению к характеристическому сопротивлению линии Z_0). Нормированное трансформированное сопротивление выходной связи на входе обозначим через r' .

Соотношения между различными параметрами имеют вид

$$\bar{r} = \frac{n^2}{Z_0} R_3, \quad (5.7.1a)$$

$$\bar{L} = \frac{n^2}{Z_0} L_3, \quad (5.7.1b)$$

$$\bar{C} = \frac{Z_0}{n^2} C_3, \quad (5.7.1в)$$

$$\bar{r}' = \frac{n^2}{n'^2} \frac{Z_0'}{Z_0}. \quad (5.7.1г)$$

Резонансная частота ω_0 вновь определяется как частота, при которой входное сопротивление является действительным в плоскости эквивалентного представления в случае, когда на выходе резонатора включена согласованная нагрузка

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\bar{L}_3 \bar{C}_3}} = \frac{1}{\sqrt{\bar{L} \bar{C}}}. \quad (5.7.2)$$

Выражения для проводимости и сопротивления в любой из плоскостей эквивалентного представления параметров резонатора отличаются от приведенных в § 3.3 только тем, что \bar{r} теперь заменяется на \bar{r}'' (параллельное соединение \bar{r} и \bar{r}'), т. е.

$$\bar{r}'' = \frac{\bar{r} \bar{r}'}{\bar{r} + \bar{r}'}. \quad (5.7.3)$$

Отметим, что если вход и выход идентичны, то $\bar{r}' = 1$ (5.7.1г), поэтому $\bar{r}'' < 1$ (случай недосвязанного резонатора, § 5.3).

Ненагруженная добротность Q_0 определяется в соответствии с уравнением (5.4.2) и может быть выражена через \bar{r} , \bar{L} , \bar{C} или R_3 , L_3 , C_3

$$Q_0 = \bar{C} \bar{r} \omega_0 = C_3 R_3 \omega_0. \quad (5.7.4)$$

Определение внешней добротности по уравнению (5.4.21) применимо к входной и выходной внешним цепям соответственно. На основе эквивалентной схемы, показанной на фиг. 5.7.3, и с учетом уравнения (5.7.1) входная внешняя добротность $Q_{вн1}$ выражается как

$$Q_{вн1} = \bar{C} \omega_0 = \frac{Z_0}{n^2} C_3 \omega_0, \quad (5.7.5)$$

а выходная внешняя добротность $Q_{вн2}$ равна

$$Q_{вн2} = \bar{C} \bar{r}' \omega_0 = \frac{Z_0'}{n'^2} C_3 \omega_0. \quad (5.7.6)$$

Наконец, нагруженная добротность Q_H выражается через \bar{C} , ω_0 и сопротивление параллельного соединения $1, \bar{r}$ и \bar{r}' (фиг. 5.7.3), т. е.

$$Q_H = \bar{C} \left(\frac{\bar{r} \bar{r}'}{\bar{r} + \bar{r}' + \bar{r} \bar{r}'} \right) \omega_0 = \frac{C_3 \omega_0}{\frac{1}{R_3} + \frac{n^2}{Z_0} + \frac{n'^2}{Z_0'}}. \quad (5.7.7)$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{Q_H} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн1}} + \frac{1}{Q_{вн2}}. \quad (5.7.8)$$

Приведем некоторые представляющие интерес соотношения:

$$\bar{r} = \frac{Q_0}{Q_{вн1}}, \quad (5.7.9a)$$

$$\bar{r}' = \frac{Q_{вн2}}{Q_{вн1}}, \quad (5.7.9б)$$

$$\bar{r}'' = \frac{Q_0 Q_{вн2}}{Q_{вн1} (Q_0 + Q_{вн2})}. \quad (5.7.9в)$$

Если резонатор используется как проходное устройство, то из всех добротностей нагруженная добротность, несомненно, является наиболее важным параметром. Нагруженную добротность можно легко измерить.

Так же как для резонатора с одним элементом связи, где точки половинной мощности для Q_H соответствуют частотам, на которых мощность, рассеиваемая в резонаторе, равна половине мощности, рассеиваемой при резонансе, в случае *проходного резонатора точки половинной мощности для Q_H соответствуют частотам, на которых проходящая мощность равна половине мощности, проходящей при резонансе* (мощность генератора предполагается постоянной).

Докажем это положение. Из уравнения (5.4.34) общая мощность $P_{сист}$, рассеиваемая как в резонаторе, так и в выходной нагрузке, равна

$$P_{сист} = P_0 (1 - |\Gamma|^2) = P_0 \frac{4\bar{g}''}{(1 + \bar{g}'')^2} \left[\frac{1}{1 + \left(\frac{1}{1 + \bar{g}''} \right)^2 \frac{\bar{C}}{\bar{L}} \left(\frac{2d\omega}{\omega_0} \right)^2} \right] = \quad (5.7.10)$$

$$= P_0 \frac{4\bar{r}''}{(1 + \bar{r}'')^2 + (\bar{r}'' \bar{C} \omega_0)^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0} \right)^2}, \quad (5.7.10')$$

где $\bar{g}'' = \bar{g} + \bar{g}'$ характеризует потери в резонаторе и в выходной нагрузке.

Мощность T , проходящая через нагрузку, т. е. мощность, рассеиваемая в \bar{r}' (фиг. 5.7.3), равна $|v|^2/2\bar{r}'$. Величина $P_{\text{сист}}$ равна $|v|^2/2\bar{r}''$. Следовательно,

$$T = P_{\text{сист}} \frac{\bar{r}''}{\bar{r}'} = P_{\text{сист}} \frac{\bar{r}}{\bar{r} + \bar{r}'} \quad (5.7.11)$$

Выражение для T через добротности может быть получено, если подставить уравнение (5.7.10') в (5.7.11) и исключить сопротивления с помощью уравнения (5.7.9)

$$T = P_0 \frac{4Q_H^2}{Q_{\text{вн1}}Q_{\text{вн2}}} \frac{1}{\left[1 + Q_H^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0}\right)^2\right]} = \quad (5.7.12)$$

$$= P_0 \frac{4Q_H^2}{Q_{\text{вн1}}Q_{\text{вн2}}} \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{2d\omega}{\Delta\omega_H}\right)^2\right]}, \quad (5.7.12')$$

так как $Q_H/\omega_0 = 1/\Delta\omega_H$.

Если частота соответствует точке половинной мощности Q_H ($|d\omega| = \Delta\omega_H/2$), то

$$T|_{\omega_{1,2}} = \frac{1}{2} T|_{\omega_0}, \quad (5.7.13)$$

т. е. проходящая мощность уменьшается наполовину. Следовательно, точки половинной мощности при передаче соответствуют ширине полосы пропускания для Q_H . Здесь, как это делается при рассмотрении фильтров (гл. 6), введем нормированную частоту x (§ 4.1) в виде

$$x = \frac{2d\omega}{\Delta\omega_H}. \quad (5.7.14)$$

Следовательно,

если $\omega = \omega_0$, то $x = 0$ (резонансная частота),

$$\omega = \omega_0 + \frac{\Delta\omega_H}{2}, \quad x = 1 \text{ (крайняя частота или граница полосы пропускания),}$$

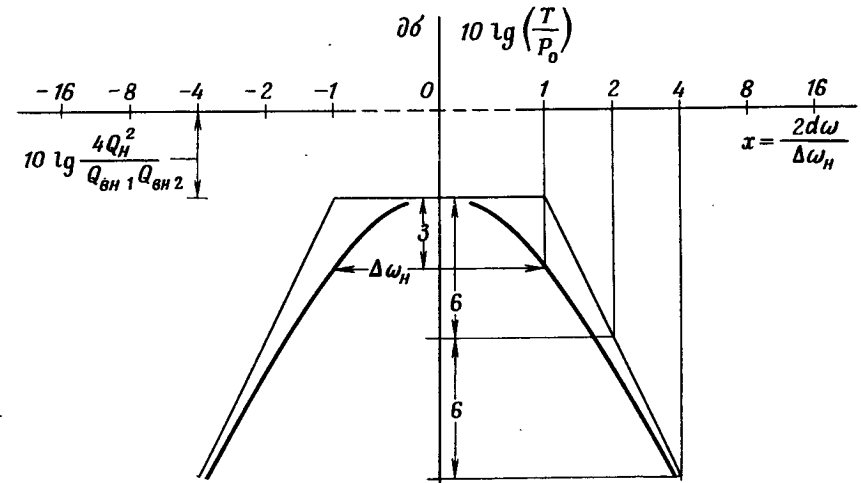
$$\omega = \omega_0 - \frac{\Delta\omega_H}{2}, \quad x = -1 \text{ (крайняя частота или граница полосы пропускания).}$$

График зависимости $10 \lg(T/P_0)$ от x (логарифмическая шкала) показан на фиг. 5.7.4.

Линейную аппроксимацию такой зависимости можно быстро получить следующим образом: проводят прямую, параллельную оси абсцисс, на расстоянии $10 \lg(4Q_H^2/Q_{\text{вн1}}Q_{\text{вн2}})$ до граничных частот ($x = \pm 1$) и затем проводят прямые линии с наклоном 6 дБ/октава.

Более точная аппроксимация получается, если снижать величины координат линейной аппроксимации на 1 дБ при $x = 0,5$, на 3 дБ при $x = 1$ и на 1 дБ при $x = 2$.

Важным частным случаем является случай, когда выходы резонатора симметричны¹⁾ ($Q_{\text{вн1}} = Q_{\text{вн2}}$) и Q_0 много больше любой $Q_{\text{вн}}$.



Ф и г. 5.7.4. Передаточная характеристика резонатора с двумя элементами связи.

Для этого частного случая уравнение (5.7.12) принимает вид

$$T = P_0 \frac{1}{1 + x^2}, \quad (5.7.15)$$

так как $Q_H = Q_{\text{вн1}}/2 = Q_{\text{вн2}}/2$. Эквивалентная схема переходит в схему, показанную на фиг. 5.7.5, где \bar{r} отсутствует в параллельной цепи ($\bar{r} \rightarrow \infty$, $\bar{r}' = 1^2$).

Из уравнений (5.3.5) и (5.4.36') входная проводимость в плоскости AA' выражается в виде

$$\bar{y} = 1 + j\bar{b} = 1 + jQ_{\text{вн1}} \frac{2d\omega}{\omega_0} = 1 + j2x, \quad (5.7.16)$$

так как $Q_{\text{вн1}} = 2Q_H$ и $2x = 4Q_H(d\omega/\omega_0) = 2Q_{\text{вн}}(d\omega/\omega_0) = \bar{b}_0$.

¹⁾ Для электрической симметрии вполне достаточно, чтобы $Q_{\text{вн1}} = Q_{\text{вн2}}$. При этом характеристические сопротивления Z_0 и Z'_0 могут отличаться по величине, а величины n и n' подбираются соответствующим образом.

²⁾ Отметим, что если \bar{r} — конечная величина (Q_0 конечное) и $Q_{\text{вн1}} = Q_{\text{вн2}}$, то система не может быть согласована при резонансе.

Коэффициент отражения на входе $\Gamma = s_{11}$ равен

$$\Gamma = \frac{1 - \bar{y}}{1 + \bar{y}} = \frac{-jx}{1 + jx} \quad (5.7.17)$$

(отметим разрыв в фазе Γ при $x=0$), а коэффициент передачи s_{12} равен

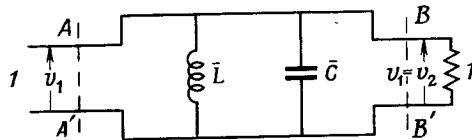
$$s_{12} = \sqrt{1 - |\Gamma|^2}.$$

Величина s_{12} находится в квадратуре с Γ , т. е.

$$s_{12} = \frac{\pm 1}{1 + jx}, \quad (5.7.18)$$

где знак «+» соответствует нечетному числу полувольт, а знак «-» четному числу полувольт.

Полностью матрица рассеяния симметричного проходного резонатора без потерь, ограниченного плоскостями эквивалентного



Ф и г. 5.7.5. Симметричный проходной резонатор без потерь.

представления параметров резонатора, записывается в виде

$$[S] = \frac{1}{1 + jx} \begin{vmatrix} -jx & \pm 1 \\ \pm 1 & -jx \end{vmatrix} \quad (5.7.19)$$

С учетом выражения (XI.16) соответствующая матрица $[\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}]$ равна¹⁾

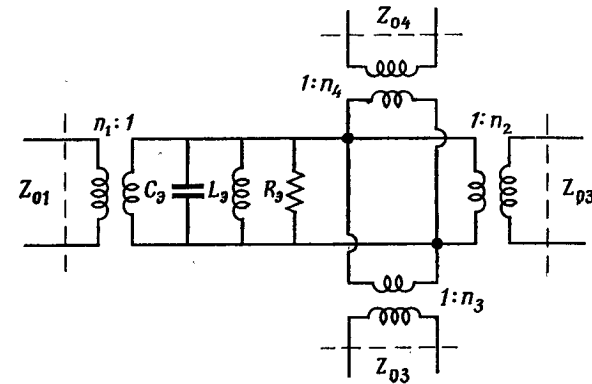
$$[\bar{A}] = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 \\ j2x & \pm 1 \end{vmatrix} \quad (5.7.20)$$

При рассмотрении фазовых соотношений оказывается, что фаза s_{12} ($\text{argctg}(-x)$) равна сдвигу фазы передаваемой волны. С учетом уравнения (5.7.20) сдвиг фазы «напряжения» равен нулю независимо от частоты (фиг. 5.7.5).

Что касается переходного процесса в проходном резонаторе, то приближенный метод, изложенный в приложении XV для

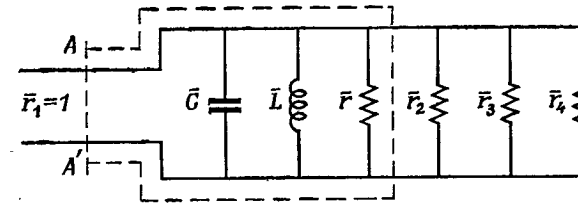
¹⁾ Такие же результаты можно получить, если при анализе схемы, показанной на фиг. 5.7.5, воспользоваться выражениями (III.10) и (XI.21). При этом знак «±» заменяется на знак «+», так как для эквивалентной схемы не имеет значения четность или нечетность числа полувольт.

резонаторов с одним элементом связи, может быть применен и в данном случае, если выходная связь рассматривается как дополнительный механизм потерь.



Ф и г. 5.7.6. Эквивалентная схема резонатора с четырьмя элементами связи, использующая идеальные трансформаторы.

В заключение отметим, что выводы, полученные в этом параграфе, можно распространить на резонаторы с n элементами связи.



Ф и г. 5.7.7. Эквивалентная схема с нормированными параметрами.

Эквивалентная схема резонатора с четырьмя элементами связи с идеальными трансформаторами показана на фиг. 5.7.6. Ее можно свести к схеме с нормированными параметрами, показанной на фиг. 5.7.7, где

$$\left. \begin{aligned} \bar{r}_2 &= \frac{n_1^2}{n_2^2} \frac{Z_{02}}{Z_{01}}, \\ \bar{r}_3 &= \frac{n_1^2}{n_3^2} \frac{Z_{03}}{Z_{01}}, \\ \bar{r}_4 &= \frac{n_1^2}{n_4^2} \frac{Z_{04}}{Z_{01}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.21)$$

Выражения для мощности, передаваемой со входа i к входу j , имеют вид

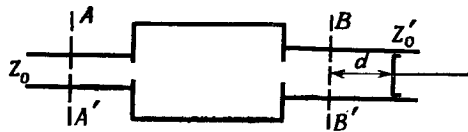
$$T_{i, j} = P_0 \frac{4Q_H^2}{Q_{BH1}Q_{BH2}} \frac{1}{\left[1 + Q_H^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0}\right)^2\right]}. \quad (5.7.22)$$

Уравнение (5.7.22) получено с помощью соотношений, подобных (5.7.10') и (5.7.11). Разница состоит лишь в том, что \bar{r} теперь включает все параллельные нормированные сопротивления, а Q_{BH1} определяется как

$$Q_{BH1} = \bar{C}r_i\omega_0. \quad (5.7.23)$$

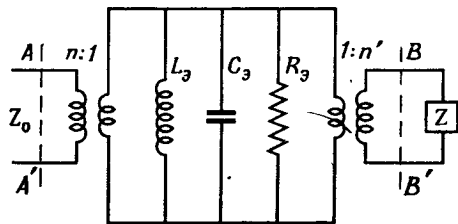
§ 5.8. РЕЗОНАТОР С ДВУМЯ ЭЛЕМЕНТАМИ СВЯЗИ ЭФФЕКТ ЗАТЯГИВАНИЯ ПРИ РЕАКТИВНОЙ НАГРУЗКЕ

Если к выходу проходного резонатора вместо согласованной нагрузки подключить реактивную нагрузку, то в эквивалентную



Ф и г. 5.8.1. Проходной резонатор с реактивной нагрузкой.

схему резонатора войдет реактивное сопротивление $Z_H = jX_H$. Между плоскостями AA' и BB' (фиг. 5.8.2) параметры R_3, C_3 и L_3



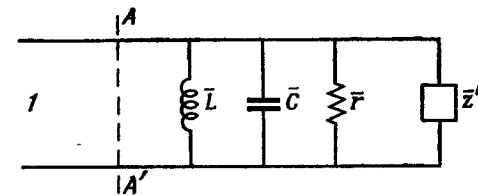
Ф и г. 5.8.2. Эквивалентная схема.

не изменяются. Не изменяются также и параметры связи, если реактивная нагрузка расположена в плоскости, где высшими типами волн можно пренебречь. В качестве такой реактивной нагрузки может служить отрезок волновода длиной d , распо-

женный между плоскостью BB' и закорачивающей пластиной¹⁾. Из уравнения (1.3.20)

$$Z = jZ'_0 \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda'_B}, \quad (5.8.1)$$

где штрих относится к выходной линии.



Ф и г. 5.8.3. Эквивалентная схема с нормированными параметрами.

Приведенная к входу эквивалентная схема принимает форму, показанную на фиг. 5.8.3, где, как и в предыдущих параграфах,

$$\begin{aligned} \bar{L} &= \frac{n^2}{Z_0} L_3, \\ \bar{C} &= \frac{Z_0}{n^2} C_3, \\ \bar{r} &= \frac{n^2}{Z_0} R_3, \\ \bar{z}' &= \frac{n^2}{Z_0} \frac{Z}{n'^2} = \frac{n^2}{Z_0} \frac{Z'_0}{n'^2} \frac{Z}{Z'_0} = \frac{Q_{BH2}}{Q_{BH1}} \frac{Z}{Z'_0}. \end{aligned} \quad (5.8.2)$$

После подстановки уравнения (5.8.1) в последнее соотношение получим

$$\bar{z}' = j \frac{Q_{BH2}}{Q_{BH1}} \operatorname{tg} \frac{2\pi d}{\lambda'_B}. \quad (5.8.3)$$

Отметим, что чем меньше Q_{BH2} (т. е. чем больше выходная связь), тем меньше \bar{z}' и, следовательно, тем больше возмущение, наблюдаемое со стороны входа.

Условие резонанса получим, когда общая реактивная проводимость равна нулю, т. е.

$$j\omega\bar{C} - j \frac{1}{\omega\bar{L}} - j \frac{Q_{BH1}}{Q_{BH2}} \operatorname{ctg} \frac{2\pi d}{\lambda'_B} = 0 \quad (5.8.4)$$

¹⁾ Для простого случая комплексной нагрузки (d мало), имеющей проводимость $Y = G + jB$, величина «затягивания» резонансной частоты получается аналогично уравнению (5.8.5). В результате

$$\frac{2d\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q_{BH2}} \frac{B}{Y'_0}. \quad (5.8.5')$$

или

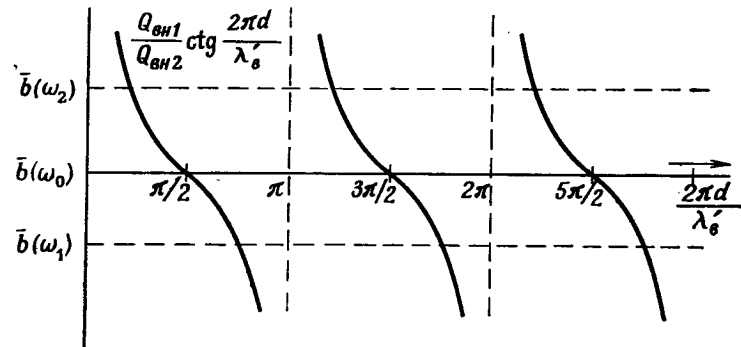
$$\bar{b} = \frac{Q_{\text{вн1}}}{Q_{\text{вн2}}} \operatorname{ctg} \frac{2\pi d}{\lambda'_B}, \quad (5.8.4')$$

где $\bar{b} = \omega\bar{C} - (1/\omega\bar{L}) \approx Q_{\text{вн1}} \frac{2d\omega}{\omega_0}$ (для $\omega \approx \omega_0$).

Следовательно, для малой величины $(Q_{\text{вн1}}/Q_{\text{вн2}}) \operatorname{ctg} (2\pi d/\lambda'_B)$ резонанс имеет место при $\omega_r = \omega_0 + d\omega$, так что

$$\frac{2d\omega}{\omega_0} = \frac{1}{Q_{\text{вн2}}} \operatorname{ctg} \frac{2\pi d}{\lambda'_B}. \quad (5.8.5)$$

Уравнение (5.8.4') можно решить графически, как показано на фиг. 5.8.4, где $(Q_{\text{вн1}}/Q_{\text{вн2}}) \operatorname{ctg} (2\pi d/\lambda'_B)$ строится как функция



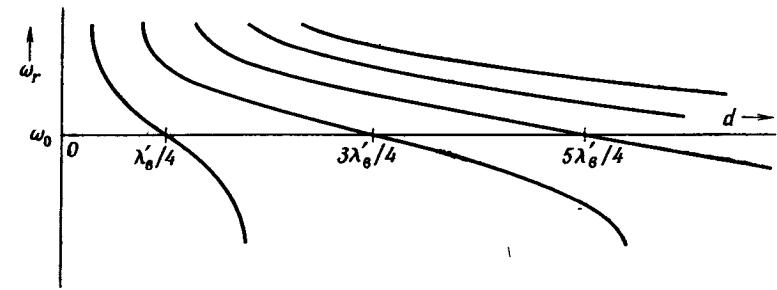
Ф и г. 5.8.4. Зависимость \bar{b} от $2\pi d/\lambda'_B$.

$2\pi d/\lambda'_B$ и нанесено семейство линий \bar{b} при параметре ω (горизонтальные линии). Данной величине $2\pi d/\lambda'_B$ соответствует определенная величина \bar{b} , а следовательно, и определенное значение частоты ω_r .

Следует отметить, что на резонансной частоте ω_0 короткозамыкающий поршень не оказывает влияния, если он расположен на расстоянии, равном нечетному числу четвертей длины волны в волноводе. С другой стороны, если $d = 0$ илиратно $\lambda'_B/2$, то резонансная частота теоретически стремится к нулю или к бесконечности.

Резонансная частота системы ω_r является, таким образом, периодической, но однозначной функцией $2\pi d/\lambda'_B$. Однако она не является однозначной функцией величины d , так как при изменении частоты изменяется λ'_B (и $2\pi d/\lambda'_B$). На основании графика, показанного на фиг. 5.8.4, можно построить зависимость ω_r от d . Ординату каждой ветви можно получить приближенно простым

изменением шкалы, так как $\bar{b} \approx Q_{\text{вн1}} (2d\omega/\omega_0)$. Однако абсциссы этих кривых на фиг. 5.8.5 значительно изменяются. Если ω_r становится больше ω_0 , то λ'_B уменьшается (в первом приближении обратно пропорционально ω_r) и, таким образом, соответствующие величины d должны уменьшаться. При увеличении частоты эти кривые сходятся и сливаются при $d = 0$ ($\omega_r \rightarrow \infty$). Если $\omega_r = \omega_0$,



Ф и г. 5.8.5. Зависимость резонансных частот от величины d .

то расстояние между кривыми по оси абсцисс равно $\lambda'_B/2$ (при ω_0). Если $\omega_r < \omega_0$, то кривые расходятся. Однако для любой частоты ω_r кривые являются равноотстоящими и разнесены на $\lambda'_B/2$ (при ω_r).

Из вышесказанного вытекают следующие важные выводы:

1. Для данного значения d резонансная частота не является однозначной величиной. Существует бесконечное множество резонансных частот.

2. Чем больше значение d , тем меньше наклон кривой на частоте ω_0 (это согласуется с тем, что чем больше d , тем меньше изменение сопротивления для данного изменения d).

3. Наклон кривой на частоте ω_0 , а следовательно, и «инерция» к настройке пропорциональны $Q_{\text{вн2}}$ (чем меньше выходная связь, тем меньше наклон) и обратно пропорциональны $Q_{\text{вн1}}$ (чем больше входная связь, тем меньше наклон кривой).

4. Чем больше d , тем ближе друг к другу резонансные частоты соседних видов колебаний.

Предыдущие рассуждения справедливы при выполнении следующих предположений:

1. Рассматривался только один вид колебаний резонатора. На границах пропускания волновода не учитывались высшие типы волн в волноводе.

2. Предполагалось, что положение плоскостей эквивалентного представления параметров резонатора остается постоянным при изменении частоты.

3. Предполагалось также отсутствие потерь в закороченном отрезке волновода. Наличие потерь в волноводе или уменьшение величины коэффициента отражения [уравнение (1.3.19)] приведет к тому, что на частотах, близких к ω_0 , кривые станут более пологими, однако предыдущие рассуждения остаются в силе.

Реактивное нагружение можно использовать для того, чтобы изменять резонансную частоту резонатора или генератора (чтобы разнести резонансные частоты, d делают как можно меньше). При большом расстоянии d до рассогласователя (случай, который может встретиться в высокочастотном тракте радиолокационной станции, у которой передатчик находится на большом расстоянии от рассогласованной антенны) рассмотренный эффект может нежелательным образом повлиять на работу генератора, так как частоты, для которых общая реактивная проводимость равна нулю, оказываются очень близкими одна к другой. Это так называемый эффект длинной линии. Если рассогласование зависит от времени (импульсная система, вращающаяся антенна), то проблема может оказаться еще более сложной. В этом случае на выходе генератора следует ставить ферритовый вентиль.

§ 5.9. ВОЛНОВОДНЫЙ ПРОХОДНОЙ РЕЗОНАТОР

При рассмотрении волноводных проходных резонаторов особое внимание уделяется простоте синтеза. Обычно предполагается, что $Q_0 \gg Q_{вн1} = Q_{вн2}$, т. е. вход и выход симметричны, и внутренние потери пренебрежимо малы. Как и в случае волноводного резонатора с одним элементом связи, параметры рассматриваемых неоднородностей выражаются через шунтирующее реактивное сопротивление \bar{x}_e или шунтирующую реактивную проводимость \bar{b}_e . Задача, таким образом, заключается в следующем: по заданным Q_n и резонансной частоте ω_0 найти расстояние между диафрагмами l и величину реактивной проводимости каждого отверстия \bar{b}_e (фиг. 5.9.1).

Если требуемое значение Q_n велико, то необходимо учесть внутренние потери и применить метод эквивалентных схем с сосредоточенными постоянными, описанный в предыдущих параграфах (для больших значений Q_n описываемый ниже метод можно использовать как первое приближение). Если требуемое значение Q_n мало, то величиной Q_0 можно пренебречь, тогда

$$Q_n = \frac{1}{2} Q_{вн1} = \frac{1}{2} Q_{вн2} \quad (5.9.1)$$

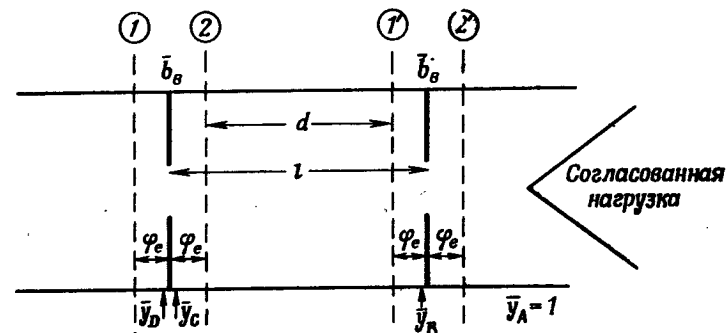
Однако при уменьшении Q_n метод эквивалентных схем вносит все большую погрешность, так как допущения теоремы Фостера несправедливы, если соседние полюса расположены очень близко.

Поэтому метод эквивалентных схем с сосредоточенными постоянными в этом случае не применяется.

Было найдено, что для заданной реактивной проводимости диафрагмы \bar{b}_e плоскости отсчета проходят через точки, где

$$\varphi_e = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(-\frac{2}{\bar{b}_e} \right). \quad (5.6.3)$$

Из § 5.1 расстояние d (фиг. 5.9.1) должно соответствовать целому числу полуволн, поскольку в плоскости отсчета l коэффициент отражения является действительным и отрицательным:



Фиг. 5.9.1. Волноводный проходной резонатор.

Рассмотрим другой вывод соотношения (5.6.3), основанный на теории линий передачи. Этот вывод удобен для проведения построений на круговой диаграмме. Полная проводимость \bar{y}_B в непосредственной близости от второй диафрагмы (слева от нее) равна

$$\bar{y}_B = 1 + j\bar{b}_e. \quad (5.9.2)$$

С учетом уравнения (1.3.25), если волновод резонатора не имеет потерь, проводимость \bar{y}_C вблизи первой диафрагмы (справа от нее) запишется в виде

$$\bar{y}_C = \frac{\bar{y}_B \cos \gamma l + j \sin \gamma l}{\cos \gamma l + j \bar{y}_B \sin \gamma l} = \frac{(1 + j\bar{b}_e) \cos \gamma l + j \sin \gamma l}{\cos \gamma l + j(1 + j\bar{b}_e) \sin \gamma l}. \quad (5.9.3)$$

Проводимость \bar{y}_D вблизи первой диафрагмы (слева от нее) равна

$$\bar{y}_D = \bar{y}_C + j\bar{b}_e = \frac{(\cos \gamma l - \bar{b}_e \sin \gamma l) + j(2\bar{b}_e \cos \gamma l + \sin \gamma l - \bar{b}_e^2 \sin \gamma l)}{(\cos \gamma l - \bar{b}_e \sin \gamma l) + j \sin \gamma l}. \quad (5.9.4)$$

Числитель и знаменатель будут равны, т. е. проводимость \bar{y}_D будет равна 1, если

$$2 \cos \gamma_0 l - \bar{b}_e \sin \gamma_0 l = 0$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma_0 l = \frac{2}{\bar{b}_e}. \quad (5.9.5)$$

Для ясности рассмотрим отдельно следующие случаи:

1. Случай положительных \bar{b}_e (емкостная диафрагма); при этом длина резонатора равна

$$l = \frac{\lambda_{\text{в0}}}{2\pi} \left[n\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{|\bar{b}_e|} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9.6)$$

2. Случай отрицательных \bar{b}_e (индуктивная диафрагма); при этом длина резонатора равна

$$l = \frac{\lambda_{\text{в0}}}{2\pi} \left[n\pi - \operatorname{arctg} \frac{2}{|\bar{b}_e|} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.9.6')$$

В обоих случаях $\operatorname{arctg} (2/|\bar{b}_e|)$ рассматривается в первом квадранте.

Таким образом, при таком значении l проводимость \bar{y}_D будет равна 1 на частоте, которая соответствует $\lambda_{\text{в0}}$. Поскольку предполагается, что резонатор не имеет потерь, на частоте ω_0 имеет место полная передача энергии.

На фиг. 5.9.2 показаны построения на круговой диаграмме в соответствии с выражениями (5.9.2) — (5.9.5). Центр круговой диаграммы соответствует точке A . Плоскости B соответствует проводимость

$$\bar{y}_B = 1 + j\bar{b}_e, \quad (5.9.2)$$

где величина \bar{b}_e в нашем случае отрицательна. Проводимость \bar{y}_B должна быть трансформирована в \bar{y}_C так, чтобы точки B и C были симметричными. Наконец, проводимость \bar{y}_D соответствует центру круговой диаграммы. Полная электрическая длина резонатора равна половине тупого угла BAC . Электрическое расстояние до плоскостей отсчета (расстояние, отсчитываемое к противоположному входу, положительно для отрицательных \bar{b}_e) равно четверти острого угла BAC или $\operatorname{arctg} 2/\bar{b}_e$.

Длину резонатора l можно рассчитать по известной величине \bar{b}_e как аналитически, так и графически. Для больших значений $|\bar{b}_e|$ ($|\bar{b}_e| > 5$) величину $Q_{\text{вн}}$ можно получить из выражения (5.6.7)

$$Q_{\text{вн}} \approx \frac{n\pi}{2} \bar{b}_e^2 \left(\frac{\lambda_{\text{в0}}}{\lambda_0} \right)^2, \quad (5.9.7)$$

так что

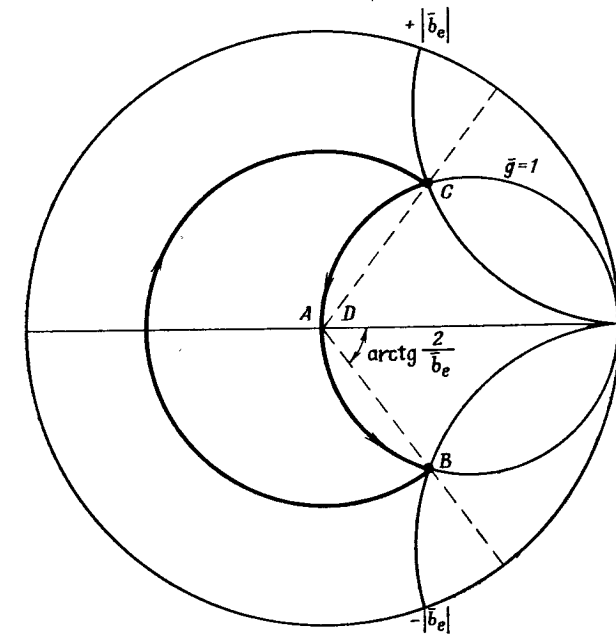
$$Q_{\text{н}} \approx \frac{n\pi}{4} \bar{b}_e^2 \left(\frac{\lambda_{\text{в0}}}{\lambda_0} \right)^2, \quad (5.9.7')$$

где

$$l \approx d = n \frac{\lambda_{\text{в0}}}{2}.$$

Для очень малых величин $|\bar{b}_e|$ ($|\bar{b}_e| < 1$) понятия добротности теряют смысл; в этом случае можно применить методы, изложенные в § 4.1.

Для промежуточных значений \bar{b}_e несколько более точные (хотя по-прежнему приближенные) выражения для $Q_{\text{н}}$ могут быть получены из рассмотрения точек половинной мощности. При этом



Фиг. 5.9.2. Построения на круговой диаграмме (случай индуктивной диафрагмы).

необходимо выразить $Q_{\text{н}}$ через электрическую длину резонатора при резонансе и в точках половинной мощности.

Запишем исходное выражение для $Q_{\text{н}}$ в виде

$$Q_{\text{н}} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_{\text{н}}}, \quad (5.9.8)$$

где $\Delta\omega_{\text{н}}$ соответствует точкам половинной мощности, при которых $|\Gamma|^2 = 0,5$, если резонатор не имеет потерь (§ 5.7).

Электрическая длина резонатора при резонансе равна

$$\varphi_0 = \gamma_0 l = \frac{2\pi}{\lambda_{в0}} l, \quad (5.9.9)$$

где γ_0 — постоянная распространения при резонансе.

Разница между электрическими длинами в точках половинной мощности определяется как

$$\Delta\varphi_{\text{н}} = (\gamma_2 - \gamma_1) l = \Delta\gamma_{\text{н}} l. \quad (5.9.10)$$

Запишем соотношение между ω_0 и λ_0

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\lambda_0}. \quad (5.9.11)$$

Из выражения

$$\omega^2 = \frac{\gamma^2 + k_c^2}{\mu\varepsilon} \quad (5.9.12)$$

найдем

$$d\omega = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\lambda_0}{\lambda_{в0}} d\gamma \quad (5.9.13)$$

или

$$\Delta\omega_{\text{н}} \approx \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\lambda_0}{\lambda_{в0}} \Delta\gamma_{\text{н}}. \quad (5.9.13')$$

После подстановки соотношений (5.9.11) и (5.9.13') в (5.9.8) получаем

$$\begin{aligned} Q_{\text{н}} &= \frac{2\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\lambda_{в0}}{\lambda_0^2} \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\Delta\gamma_{\text{н}}} = \frac{2\pi}{\lambda_{в0}} \left(\frac{\lambda_{в0}}{\lambda_0} \right)^2 \frac{1}{\Delta\gamma_{\text{н}}} = \\ &= \frac{\gamma_0}{\Delta\gamma_{\text{н}}} \left(\frac{\lambda_{в0}}{\lambda_0} \right)^2 = \frac{\varphi_0}{\Delta\varphi_{\text{н}}} \left(\frac{\lambda_{в0}}{\lambda_0} \right)^2. \end{aligned} \quad (5.9.14)$$

С учетом уравнений (5.9.6) и (5.9.6') запишем

$$\varphi_0 = n\pi + \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|}. \quad (5.9.15)$$

Таким образом, для того чтобы получить выражение $Q_{\text{н}}$ через \bar{b}_e , необходимо выразить $\Delta\varphi_{\text{н}}$ через b_e .

Коэффициент отражения на входе резонатора (фиг. 5.9.1) равен

$$\begin{aligned} \Gamma &= \frac{1 - \bar{y}_D}{1 + \bar{y}_D} = \frac{j(\bar{b}_e^2 \sin \gamma l - 2\bar{b}_e \cos \gamma l)}{2(\cos \gamma l - \bar{b}_e \sin \gamma l) + j(2\bar{b}_e \cos \gamma l + 2 \sin \gamma l - \bar{b}_e^2 \sin \gamma l)} = \\ &= \frac{j\bar{b}_e(\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)}{2(1 - \bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l) + j(2\bar{b}_e + 2 \operatorname{tg} \gamma l - \bar{b}_e^2 \operatorname{tg} \gamma l)}, \end{aligned} \quad (5.9.16)$$

где \bar{y}_D определяется по уравнению (7.9.4).

Квадрат модуля коэффициента отражения запишется в виде

$$\begin{aligned} |\Gamma|^2 &= \frac{\bar{b}_e^2 (\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2}{4(1 - \bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l)^2 + (2\bar{b}_e + 2 \operatorname{tg} \gamma l - \bar{b}_e^2 \operatorname{tg} \gamma l)^2} = \\ &= \frac{\bar{b}_e^2 (\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2}{\bar{b}_e^2 (\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2 + 4(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma l)} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{4(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma l)}{\bar{b}_e^2 (\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2}}. \end{aligned} \quad (5.9.17)$$

Эта величина равна 0,5, если

$$\frac{4(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma l)}{\bar{b}_e^2 (\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2} = 1 \quad (5.9.18)$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma l = \frac{4\bar{b}_e^3 \pm 4\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2 - 4}}{2(\bar{b}_e^2 - 4)}. \quad (5.9.19)$$

Заметим, что при $|\bar{b}_e| < 0,9$ величина $\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2 - 4}$ является мнимой, т. е. $|\Gamma|^2$ не может быть равен 0,5. Определим $\Delta\gamma_{\text{н}} l = \Delta\varphi_{\text{н}}$

$$\begin{aligned} \Delta\gamma_{\text{н}} l &= \left(\arctg \left[\frac{4\bar{b}_e^3 + 4\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2 - 4}}{2(\bar{b}_e^2 - 4)} \right] - \right. \\ &\quad \left. - \arctg \left[\frac{4\bar{b}_e^3 - 4\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2 - 4}}{2(\bar{b}_e^2 - 4)} \right] \right). \end{aligned} \quad (5.9.20)$$

Полученное выражение очень громоздко, но его можно значительно упростить, если воспользоваться приближенным соотношением

$$\Delta\gamma_{\text{н}} l \approx d(\gamma l) = \frac{d(\operatorname{tg} \gamma l)}{\sec^2 \gamma_0 l}, \quad (5.9.21)$$

где

$$\sec^2 \gamma_0 l \approx \frac{4 + \bar{b}_e^2}{\bar{b}_e^2}$$

[так как с учетом уравнения (5.9.5) $\operatorname{tg} \gamma_0 l = 2/\bar{b}_e$] и

$$d(\operatorname{tg} \gamma l) \approx \frac{8\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2 - 4}}{2(\bar{b}_e^2 - 4)} \approx \frac{4\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2}}{\bar{b}_e^4}.$$

Таким образом, упрощенное выражение для $\Delta\gamma_{\text{н}} l$ принимает вид

$$\Delta\gamma_{\text{н}} l \approx \frac{4}{\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2}}. \quad (5.9.22)$$

Подставив уравнения (5.9.15) и (5.9.22) в (5.9.14), получаем выражение для нагруженной добротности волноводного резонатора, включенного на проход¹⁾:

$$Q_H \approx \frac{\sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2}}{4} \left(\frac{\lambda_{B0}}{\lambda_0} \right)^2 \left[n\pi + \arctg \frac{2}{\bar{b}_e} \right]. \quad (5.9.23)$$

Для малых значений $|\bar{b}_e|$ величина $\arctg 2/|\bar{b}_e|$ стремится к $\pm \pi/2$ и

$$Q_H \approx \frac{|\bar{b}_e|}{2} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_0} \right)^2 \left[n\pi \pm \frac{\pi}{2} \right]. \quad (5.9.23')$$

Для больших $|\bar{b}_e|$ уравнение (5.9.23) сводится к виду (5.9.7').

Таким образом, для требуемого Q_H величину \bar{b}_e можно неявно определить из уравнения (5.9.23) или непосредственно из уравнения (5.9.7'), если значение Q_H велико (50 или более). Во всех случаях расстояние l между двумя диафрагмами (или другими

¹⁾ Несмотря на то что уравнение (5.9.23) является приближенным, оно дает довольно точные результаты для малых величин $|\bar{b}_e|$, если сравнить его с более точным выражением (5.9.14).

Так, для случая $\bar{b}_e = -1$ $Q_H = 0,935 (\lambda_{B0}/\lambda_0)^2$ из уравнения (5.9.14),
 $Q_H = 1,13 (\lambda_{B0}/\lambda_0)^2$ из уравнения (5.9.23),
 $Q_H = 0,785 (\lambda_{B0}/\lambda_0)^2$ из уравнения (5.9.23').

Если ограничиться небольшой частью полосы пропускания, то следует ожидать, что выражения (5.9.23) и (5.9.23') дадут удовлетворительные результаты для значений $|\bar{b}_e|$, точки половинной мощности которых являются мнимыми ($|\bar{b}_e| < 0,9$).

Иногда для случая малых добротностей переход от соотношения (5.9.13) к (5.9.13') является менее обоснованным, так как он предполагает, что с изменением частоты дисперсия волновода не меняется.

С учетом уравнения (4.1.16) отношение электрической длины при резонансе Φ_0 к разнице электрических длин в точках половинной мощности $\Delta\Phi_H$ выражается в виде

$$\frac{\Phi_0}{\Delta\Phi_H} = \frac{1/\lambda_{B0}}{1/\lambda_{B2} - 1/\lambda_{B1}} = \frac{\lambda_{B1} + \lambda_{B2}}{2(\lambda_{B1} - \lambda_{B2})},$$

поэтому из уравнения (5.9.14) получаем

$$Q_H \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{B0}} \right)^2 \rightarrow \frac{\lambda_{B1} + \lambda_{B2}}{2(\lambda_{B1} - \lambda_{B2})}. \quad (5.9.14')$$

При расчетах можно воспользоваться выражением (5.9.13'), однако точность повышается, если $Q_H (\lambda_0/\lambda_{B0})^2$ заменить на $(\lambda_{B1} - \lambda_{B2})/2(\lambda_{B1} - \lambda_{B2})$. Отметим, что уравнение (5.9.14') превращается в тождество только тогда, когда левая и правая части велики.

Наконец, необходимо помнить, что сама величина \bar{b}_e будет изменяться в три раза в полосе частот шириной в одну октаву. По этим причинам теория резонаторов с малой добротностью оставляет желать лучшего.

неоднородностями) находится из соотношений (5.9.6) и (5.9.6'), а положения плоскостей отсчета параметров резонатора определяются с помощью уравнения (5.6.3).

Если значение $|\bar{b}_e|$ велико, то на частотах, далеко расположенных от ω_0 , модуль коэффициента отражения на входе $|\Gamma|$ достигает 1. Однако для конечных величин $|\bar{b}_e|$ значение $|\Gamma|_{\max}$ меньше единицы и поддается точному расчету.

Из уравнения (5.9.17) квадрат модуля Γ достигнет максимального значения, если величина $(1 + \operatorname{tg}^2 \gamma l)/(\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2$ минимальна. Последнее условие в свою очередь выполняется, если

$$\frac{d}{d(\gamma l)} \left[\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma l}{(\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2} \right] = 0$$

или

$$(\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2)^2 \operatorname{tg} \gamma l - \bar{b}_e (1 + \operatorname{tg}^2 \gamma l) (\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2) = 0. \quad (5.9.24)$$

Одно решение $(\bar{b}_e \operatorname{tg} \gamma l - 2) = 0$ соответствует резонансному условию. Другое решение соответствует $|\Gamma|_{\max}$ (условие антирезонанса), для которого

$$2 \operatorname{tg} \gamma l = -\bar{b}_e$$

или

$$\operatorname{tg} \gamma l = -\frac{\bar{b}_e}{2}. \quad (5.9.25)$$

Таким образом, если $\bar{b}_e > 0$, то

$$l = \frac{\lambda_B}{2\pi} \left(n\pi + \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|} \pm \frac{\pi}{2} \right), \quad (5.9.26)$$

а если $\bar{b}_e < 0$, то

$$l = \frac{\lambda_B}{2\pi} \left(n\pi - \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|} \pm \frac{\pi}{2} \right). \quad (5.9.26')$$

Следовательно, при Γ_{\max} электрическая длина, соответствующая данному значению l , отличается от электрической длины при резонансе на $\pm 90^\circ$.

При антирезонансе, т. е. резонансе последовательного контура, из уравнений (5.9.16) и (5.9.25) величина Γ_{\max} имеет вид

$$\begin{aligned} \Gamma_{\max} &= \frac{-j\bar{b}_e (\bar{b}_e^2/2 + 2)}{2 \left(1 + \frac{\bar{b}_e^2}{2} \right) + j \left(2\bar{b}_e - \bar{b}_e + \frac{\bar{b}_e^3}{2} \right)} = \frac{-j\bar{b}_e (\bar{b}_e^2 + 4)}{(j\bar{b}_e + 2) (\bar{b}_e^2 + 2)} = \\ &= \frac{\bar{b}_e \sqrt{\bar{b}_e^2 + 4}}{\bar{b}_e^2 + 2} e^{j \left(-\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\bar{b}_e}{2} \right)}. \end{aligned} \quad (5.9.27)$$

Если $\bar{b}_e > 0$, то $\arctg \bar{b}_e/2$ находится в первом квадранте, поэтому

$$\arctg \frac{\bar{b}_e}{2} = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2}{\bar{b}_e}$$

и

$$\Gamma_{\max} = \frac{|\bar{b}_e| \sqrt{\bar{b}_e^2 + 4}}{\bar{b}_e^2 + 2} e^{j(\pi + \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|})}. \quad (5.9.28)$$

Если $\bar{b}_e < 0$, то $\arctg \bar{b}_e/2$ находится в четвертом квадранте, поэтому

$$\arctg \frac{\bar{b}_e}{2} = \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|} - \frac{\pi}{2}$$

и

$$\Gamma_{\max} = \frac{|\bar{b}_e| \sqrt{\bar{b}_e^2 + 4}}{\bar{b}_e^2 + 2} e^{j(\pi - \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|})}. \quad (5.9.28')$$

Отметим, что уравнения (5.9.28) и (5.9.28') относятся к плоскости первой диафрагмы. Коэффициент отражения Γ_{\max} будет действительным и отрицательным в плоскости отсчета («плоскости короткого замыкания при расстройке»), которая расположена от плоскости диафрагмы на электрическом расстоянии, равном $\frac{1}{2} \arctg 2/|\bar{b}_e| \text{ рад}$, к генератору, если $\bar{b}_e > 0$, или к нагрузке, если $\bar{b}_e < 0$ [уравнение (5.6.3)]¹⁾.

§ 5.10. ПОЛОСКОВЫЕ ПРОХОДНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНАЯ СВЯЗЬ

В предшествующем параграфе волноводные резонаторы синтезировались с помощью шунтирующих элементов. Аналогичные результаты могут быть получены в полосковой линии с помощью последовательных элементов при условии, что эти элементы соответствуют выражению (5.1.1').

В приложении III показано, что матрица рассеяния последовательного элемента с реактивной проводимостью \bar{b}_e имеет вид,

¹⁾ Хотя та же самая величина Q_n может быть получена при увеличении n и уменьшении \bar{b}_e [уравнение (5.9.7') или (5.9.23)], максимальное значение коэффициента отражения является функцией только \bar{b}_e , как видно из уравнения (5.9.27). По этой причине число n обычно берется равным 1.

аналогичный выражению (III.10)¹⁾

$$[S] = \frac{1}{1 + 2j\bar{b}_e} \begin{vmatrix} 1 & 2j\bar{b}_e \\ 2j\bar{b}_e & 1 \end{vmatrix} \quad (III.15)$$

Электрическое расстояние φ_e от последовательных элементов до плоскостей отсчета можно выбрать так, что матрица рассеяния принимает вид

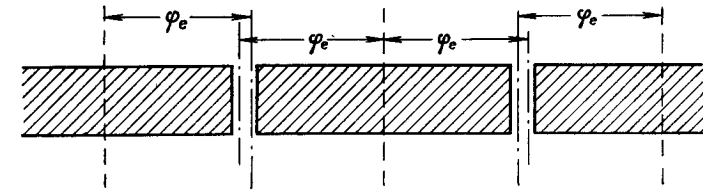
$$[S]' = \frac{e^{j2\varphi_e}}{1 + 2j\bar{b}_e} \begin{vmatrix} 1 & 2j\bar{b}_e \\ 2j\bar{b}_e & 1 \end{vmatrix} \quad (5.10.1)$$

где $s_{11} = s_{22} = e^{j2\varphi_e}/(1 + 2j\bar{b}_e)$ (§ 5.6).

Для того чтобы коэффициенты $s_{11} = s_{22}$ были действительными и отрицательными, величина $e^{j2\varphi_e}/(1 + 2j\bar{b}_e)$ должна быть действительной и отрицательной, т. е.

$$\varphi_e = \left[\frac{1}{2} \arctg 2\bar{b}_e \pm \frac{\pi}{2} \right]. \quad (5.10.2)$$

Если последовательная связь является емкостной (промежутки между резонаторами полосковой линии показаны на фиг. 5.10.1),



Ф и г. 5.10.1. Резонатор на основе полосковой линии с емкостными промежутками.

то величина \bar{b}_e положительна и минимальное значение φ_e равно²⁾

$$\varphi_e = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \arctg 2\bar{b}_e. \quad (5.10.2')$$

Для данных плоскостей отсчета уравнение (5.10.1) принимает вид

$$[S]'' = \frac{1}{\sqrt{1 + 4\bar{b}_e^2}} \begin{vmatrix} -1 & -2j\bar{b}_e \\ -2j\bar{b}_e & -1 \end{vmatrix} \quad (5.10.3)$$

¹⁾ Эта матрица определена в плоскости симметрии промежутка. Однако за счет краевых эффектов («провисание» поля) она вновь справедлива на расстоянии, меньшем $\lambda/2$ (ср. со сноской на стр. 131).

²⁾ Для больших промежутков (\bar{x} велико, \bar{b}_e мало), $\varphi_e \approx -\pi/2$.

Сравнение с матрицей (5.1.1') показывает, что

$$k = \frac{-2\bar{b}_e}{\sqrt{4 + \bar{b}_e^2}} = \frac{\pm 2}{\sqrt{4\bar{x}_e^2 + 1}}. \quad (5.10.4)$$

Длина l каждого резонатора равна

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} [n\pi + \pi - \operatorname{arctg} 2\bar{b}_e], \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (5.10.5)$$

$$l = \frac{\lambda}{2\pi} \left[n\pi - \operatorname{arctg} \frac{2}{|\bar{x}_e|} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Что касается нагруженной добротности, то на основании выражений, приведенных в § 5.9, можно записать

$$Q_n \approx \frac{\sqrt{\bar{x}_e^4 + 4\bar{x}_e^2}}{4} \left[n\pi - \operatorname{arctg} \frac{2}{|\bar{x}_e|} \right], \quad (5.10.6)$$

так как \bar{x}_e и $-1/\bar{b}_e$ во всех соотношениях просто меняются местами.

СВЧ-фильтры

§ 6.0. ВВЕДЕНИЕ

В первых параграфах этой главы (6.1, 6.2 и 6.3) рассмотрено каскадное включение только двух резонаторов. Показано, что системы с четвертьволновой связью выгодно отличаются от системы с полуволновой связью величиной полного сопротивления (при наличии потерь) и характеристикой передачи (при отсутствии потерь). Разобраны случаи критической связи и связи ниже и выше критической. Показано, что «непосредственная» связь эквивалентна четвертьволновой (как критической, так и выше или ниже критической), а также выведены расчетные формулы, дополнения к которым вынесены в приложения XVI и XVII.

Для практического использования непосредственная связь предпочтительнее четвертьволновой, так как позволяет почти полностью исключить частотную чувствительность отрезка связи. Однако четвертьволновой связи уделено много внимания, поскольку системе с такой связью можно непосредственно заменить довольно простыми эквивалентными цепными схемами, элементы которых пропорциональны нагруженной добротности Q_n каждого резонатора.

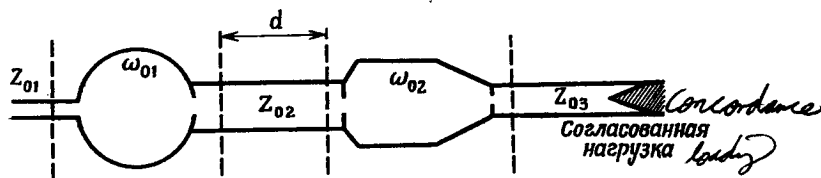
С другой стороны, можно рассчитать нормированный фильтр нижних частот — «прототип» (приложение XVIII и § 7.6), характеристика которого, приведенная к полосовому (полосно-пропускающему) фильтру, соответствует цепной схеме замещения фильтра с четвертьволновой связью. От этого же прототипа путем определенного преобразования частоты и импедансов можно перейти к фильтрам нижних или верхних частот, а также к заграждающим фильтрам. Для всех случаев выведены соотношения, непосредственно связывающие параметры прототипа с соответствующими значениями сосредоточенных постоянных (для фильтров нижних и верхних частот) или с требуемыми величинами нагруженных добротностей Q_n отдельных резонаторов (для полосовых пропускающих и заграждающих фильтров). В полосовых фильтрах с помощью ранее выведенных простых формул четвертьволновые связи между резонаторами можно заменить непосредственными.

Итак, расчет СВЧ-фильтра фактически сводится к расчету соответствующего прототипа. Переход к диапазону СВЧ производится обычным способом. Выбор прототипа и числа элементов опре-

деляется требованиями к фильтру как в полосе пропускания, так и за ее пределами. В данной главе подробно рассмотрены две наиболее известные разновидности частотной характеристики, соответствующие фильтру Баттерворса и фильтру Чебышева (прототип с симметричными параметрами рассматривается в § 7.6). Изложенный метод применим к любым другим разновидностям частотной характеристики передачи и к отдельным разновидностям фазовой характеристики.

§ 6.1. КАСКАДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ДВУХ РЕЗОНАТОРОВ ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ С СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Если два резонатора соединены каскадно, как показано на фиг. 6.1.1, то для расчета входного сопротивления и характеристики передачи такой системы можно воспользоваться эквивалентными схемами, полученными в гл. 5. Так, эквивалентная схема,



Ф и г. 6.1.1. Два каскадно включенных резонатора.

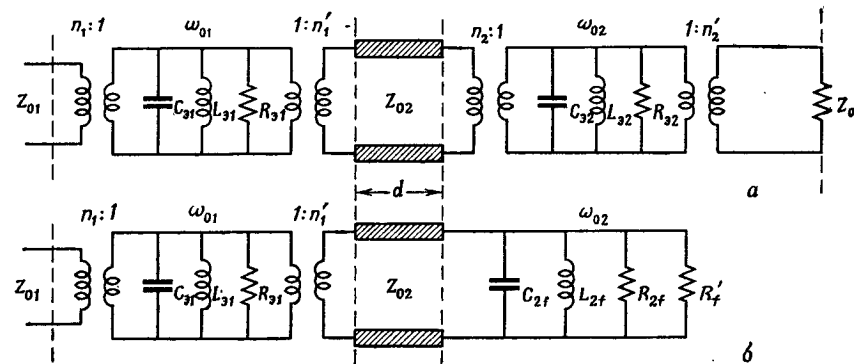
представленная на фиг. 6.1.2 а, может быть непосредственно преобразована в схему, изображенную на фиг. 6.1.2, б, где

$$\begin{aligned} R_{2f} &= n_2^2 R_{\alpha 2}, \\ L_{2f} &= n_2^2 L_{\alpha 2}, \\ C_{2f} &= \frac{1}{n_2^2} C_{\alpha 2}, \\ R_f' &= \frac{n_2^2}{n_1^2} Z_{\alpha 3}. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Изменяя величину d и соотношение между резонансными частотами ω_{01} и ω_{02} , можно получить бесчисленное множество различных вариантов. Хотя при отсутствии каких-либо упрощающих допущений арифметические вычисления могут быть несколько затруднены, метод расчета для каждого конкретного случая прост.

concrete, specific

Полная проводимость правой части схемы, изображенной на фиг. 6.1.2, б, преобразовывается с помощью выражения (1.3.25) — уравнения передающей линии. После этого исключают сначала транс-

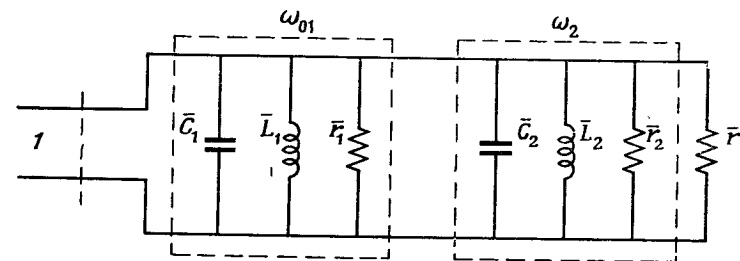


Ф и г. 6.1.2. Эквивалентные схемы двух каскадно включенных резонаторов.

форматор $1:n_1'$, а затем трансформатор $n_1:1$ и производят нормировку всех сопротивлений, относя их к величине Z_{01} .

Ниже рассматриваются подробно только некоторые наиболее характерные случаи.

а. Полуволновое включение. Обратимся к случаю, когда плоскости эквивалентного представления параметров двух резонато-



Ф и г. 6.1.3. Эквивалентная схема при полуволновом включении (плоскости отсчета совпадают).

ров совпадают ($d=0$) или разнесены на целое число полуволн. Соответствующая эквивалентная схема, изображенная на фиг. 6.1.3, получается сразу путем исключения трансформаторов $1:n_1'$ и $n_1:1$.

Параметры этой схемы определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{r}_1 &= \frac{n_1^2}{Z_{01}} R_{01}, & \bar{r}_2 &= \frac{n_1^2}{Z_{01}} \frac{n_2^2}{n_1'^2} R_{02}, \\ \bar{L}_1 &= \frac{n_1^2}{Z_{01}} L_{01}, & \bar{L}_2 &= \frac{n_1^2}{Z_{01}} \frac{n_2^2}{n_1'^2} L_{02}, & \bar{r}' &= \frac{n_1^2}{Z_{01}} \frac{n_2^2}{n_1'^2} \frac{Z_{03}}{n_2'^2}, \\ \bar{C}_1 &= \frac{Z_{01}}{n_1^2} C_{01}, & \bar{C}_2 &= \frac{Z_{01}}{n_1^2} \frac{n_1'^2}{n_2^2} C_{02}. \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Фактически это схема замещения одного проходного резонатора, резонансная частота которого равна

$$\omega_0 \text{ общ} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\bar{L}_1 \bar{L}_2}{\bar{L}_1 + \bar{L}_2} (\bar{C}_1 + \bar{C}_2)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\alpha}{\omega_{01}^2} + \frac{(1-\alpha)}{\omega_{02}^2}}}, \quad (6.1.3)$$

где $\alpha = \bar{L}_2 / (\bar{L}_1 + \bar{L}_2)$. Резонансная частота зависит от характеристик каждого резонатора (от внутренних параметров и параметров связи). Но если оба резонатора имеют одинаковые резонансные частоты, то

$$\omega_0 \text{ общ} = \omega_{01} = \omega_{02} \quad (6.1.3')$$

независимо от величины α , т. е. независимо от того, одинаковы резонаторы или различны.

Полная ненагруженная добротность Q_0 полн такой системы описывается выражением

$$Q_0 \text{ полн} = \frac{\bar{r}_1 \bar{r}_2}{\bar{r}_1 + \bar{r}_2} (\bar{C}_1 + \bar{C}_2) \omega_0 \text{ общ}. \quad (6.1.4)$$

Если $\omega_{01} = \omega_{02} = \omega_0 \text{ общ}$, то

$$Q_0 \text{ полн} = Q_{01} \alpha + Q_{02} (1 - \alpha), \quad (6.1.4')$$

где

$$\alpha = r_2 / (r_1 + r_2) < 1.$$

Таким образом, если, например, $Q_{01} < Q_{02}$, то

$$Q_{01} < Q_0 \text{ полн} < Q_{02}, \quad (6.1.5)$$

а если $Q_{01} = Q_{02}$, то

$$Q_0 \text{ полн} = Q_{01} = Q_{02}. \quad (6.1.5')$$

Непосредственно из эквивалентной схемы, изображенной на фиг. 6.1.3, следует, что полная внешняя добротность $Q_{\text{вн. полн } 1}$, приведенная к входу, равна

$$Q_{\text{вн. полн } 1} = (\bar{C}_1 + \bar{C}_2) \omega_0 \text{ общ}. \quad (6.1.6)$$

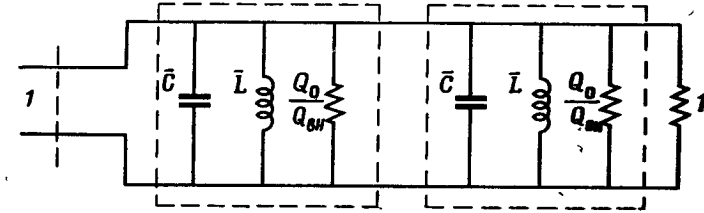
Если к тому же $\omega_{01} = \omega_{02}$, то

$$Q_{\text{вн. полн } 1} = Q_{\text{вн } 1 \text{ рез } 1} + Q_{\text{вн } 1 \text{ рез } 2}, \quad (6.1.6')$$

а если оба резонатора еще и одинаковы, то

$$Q_{\text{вн. полн } 1} = 2Q_{\text{вн } 1}. \quad (6.1.6'')$$

Следовательно, каскадное полуволновое включение двух резонаторов позволяет увеличить запасенную энергию и всегда приводит к увеличению $Q_{\text{вн}}$ по сравнению с одним резонатором. Полная ненагруженная добротность Q_0 полн находится в интервале



Ф и г. 6.1.4. Одинаковые и симметричные резонаторы.

между Q_{01} и Q_{02} [уравнение (6.1.5)]. Если оба резонатора имеют сравнимые Q_0 , то полная нагруженная добротность $Q_{\text{н. полн}}$ будет больше, чем для каждого отдельного резонатора.

Если оба резонатора симметричны и одинаковы¹⁾, то эквивалентная схема примет вид, показанный на фиг. 6.1.4.

Из формул (6.1.4') и (6.1.6'') следует, что

$$Q_0 \text{ полн} = Q_0, \quad (6.1.7a)$$

$$Q_{\text{вн. полн}} = 2Q_{\text{вн}}. \quad (6.1.7b)$$

Поэтому

$$\frac{1}{Q_{\text{н. полн}}} = \frac{1}{Q_0 \text{ полн}} + \frac{2}{Q_{\text{вн. полн}}} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{\text{вн}}} = \frac{1}{Q_{\text{н}}} - \frac{1}{Q_{\text{вн}}}$$

и

$$Q_{\text{н. полн}} = \frac{Q_{\text{вн}} Q_{\text{н}}}{Q_{\text{вн}} - Q_{\text{н}}}, \quad (6.1.7в)$$

где величины Q_0 , $Q_{\text{вн}}$, $Q_{\text{н}}$ относятся только к одному резонатору. В соответствии с уравнением (5.7.12) передаваемая мощность равна

$$\begin{aligned} T &= P_0 \frac{4Q_{\text{н. полн}}^2}{Q_{\text{вн. полн}}^2} \frac{1}{1 + Q_{\text{н. полн}}^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0} \right)^2} = \\ &= P_0 \frac{Q_{\text{н}}^2}{(Q_{\text{вн}} - Q_{\text{н}})^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{Q_{\text{вн}} Q_{\text{н}}}{Q_{\text{вн}} - Q_{\text{н}}} \right)^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0} \right)^2}. \end{aligned} \quad (6.1.8)$$

¹⁾ Если $n_1 = n_2'$ и $n_1' = n_2$, то условия симметрии не требуется.

На резонансной частоте она принимает значение

$$T_0 = P_0 \frac{Q_n^2}{(Q_{\text{вн}} - Q_n)^2}. \quad (6.1.8')$$

Если допустить, что каждый отдельно взятый резонатор не обладает потерями и, следовательно, $Q_{\text{вн}} = 2Q_n$, то

$$Q_{\text{н. полн}} = 2Q_n \quad (6.1.9)$$

и

$$T = P_0 \frac{1}{1 + 4Q_n^2 \left(\frac{2d\omega}{\omega_0}\right)^2} = P_0 \frac{1}{1 + 4x^2}, \quad (6.1.10)$$

где x по-прежнему относится к одному резонатору [$x = (Q_n/\omega_0) 2d\omega$].

Из уравнений (6.1.8) и (6.1.10) очевидно, что существенных различий в характеристиках передачи для двух каскадно соединенных резонаторов и одного отдельного резонатора нет, за исключением того, что в первом случае характеристика острее, так как Q_n почти вдвое больше. Вдали от резонанса спад частотной характеристики составляет 6 дБ/октава, как и на фиг. 5.7.4. Одиночный резонатор с эквивалентной нагруженной добротностью Q_n позволяет достигнуть таких же результатов. Хотя на первый взгляд может показаться, что вся система в целом имеет всего лишь один полюс в 0 или в ∞ , а также показано, что этот полюс перемещается по направлению к ω_0 при изменении расстояния между плоскостями отсчета.

Хотя приведенные выше соображения не открывают больших перспектив в области создания фильтров, они могут быть использованы для осуществления стабилизации частоты СВЧ-генераторов: путем добавления пассивного резонатора можно существенно увеличить добротность Q генератора и тем самым повысить стабильность частоты.

Допустим, что резонатор 2 на эквивалентной схеме фиг. 6.1.3 относится к генератору, а его параметры \bar{C} , \bar{L} , \bar{r} учитывают действие электронного пучка. Согласно уравнению (6.1.6), $Q_{\text{вн. полн}}$ в данном случае равна сумме значений $Q_{\text{вн}}$, взятых для отдельных резонаторов. Из выражения (5.8.5) видно, что изменение резонансной частоты $\Delta\omega$, вызванное изменением реактивной проводимости нагрузки $\Delta\bar{b}$, обратно пропорционально $Q_{\text{вн}}$. При заданном $\Delta\bar{b}$ отношение ухода частоты нестабилизированного генератора $\Delta\omega_{\text{ген}}$ к уходу частоты генератора с пассивным резонатором $\Delta\omega_{\text{ген+рез}}$ называют коэффициентом стабилизации S

$$S = \frac{\Delta\omega_{\text{ген}}}{\Delta\omega_{\text{ген+рез}}}. \quad (6.1.11)$$

Поскольку

$$\frac{\Delta\omega_{\text{ген}}}{\Delta\bar{b}} \sim \frac{1}{Q_{\text{вн. ген}}}$$

и

$$\frac{\Delta\omega_{\text{ген+рез}}}{\Delta\bar{b}} \sim \frac{1}{Q_{\text{вн. ген+рез}}} = \frac{1}{Q_{\text{вн. ген}} + Q_{\text{вн. рез}}},$$

можно записать

$$S = \frac{Q_{\text{вн. ген}} + Q_{\text{вн. рез}}}{Q_{\text{вн. ген}}} = 1 + \frac{Q_{\text{вн. рез}}}{Q_{\text{вн. ген}}}. \quad (6.1.11')$$

Чтобы определить коэффициент стабилизации при воздействии внутренних дестабилизирующих факторов, обратимся к выражению (6.1.3). В частности, если в генераторе имеются вибрирующие части или возникают электронные флуктуации, вызывающие изменение (медленное или шумовое) частоты $\omega_{\text{ген}} \approx \omega_{02}$, то ω_0 общ будет меняться тем меньше, чем больше $\alpha = \bar{L}_2 / (\bar{L}_1 + \bar{L}_2)$, т. е. чем меньше $\bar{L}_1 = \bar{L}_{\text{рез}}$ по сравнению с $\bar{L}_2 = \bar{L}_{\text{ген}}$. Если допустить, что пассивный резонатор и генератор характеризуются одинаковыми значениями R_0 , то хорошее подавление внутренних источников нестабильности достигается при условии

$$Q_0 \text{ рез} \gg Q_0 \text{ ген}. \quad (6.1.12)$$

При усилении этого неравенства резонансная частота ω_0 общ все слабее и слабее зависит от параметров генератора¹⁾.

Кроме того, стабилизирующий проходной резонатор можно использовать для перестройки системы, т. е. для изменения ω_0 общ путем регулирования только частоты ω_{01} .

Помимо ограничений, накладываемых на условия генерации, за использование стабилизирующего резонатора приходится расплачиваться повышением собственных потерь при передаче энергии, так как добротность Q_0 стабилизирующего резонатора имеет конечную величину.

6. Четвертьволновое включение резонаторов. Если $d = \lambda_{\text{в2}}/4$ ²⁾, результирующая частотная характеристика двухрезонаторной системы сильно отличается от характеристики одиночного резонатора.

¹⁾ Этот вывод согласуется с формулами, описывающими влияние малых возмущений на работу резонатора [см., например, уравнение (XIII.35)] и показывающими, что при заданной величине возмущения большей запасенной энергии соответствует меньшее результирующее изменение частоты.

²⁾ Для облегчения вычислений предполагается, что d остается равным $\lambda_{\text{в2}}/4$ в волноводе Z_{02} на всех интересующих нас частотах. Чем шире диапазон рассматриваемых частот, тем менее справедливо это допущение.

Часть эквивалентной схемы на фиг. 6.1.2, б, расположенная справа от трансформатора 1: n'_1 , подвергается обращению (параллельные элементы заменяются последовательными). В общем случае при произвольных параметрах формулы для входного сопротивления и проходящей мощности T становятся очень сложными.

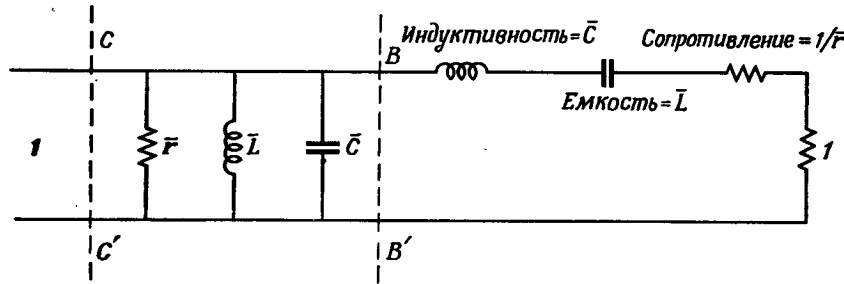
Поэтому, отказавшись от решения задачи в общем виде, рассмотрим систему из симметричных и одинаковых резонаторов, для которой

$$n_1 = n'_1 = n_2 = n'_2, \quad Z_{01} = Z_{02} = Z_{03}.$$

Нормированная полная проводимость параллельно включенных элементов C_{2f} , L_{2f} , R_{2f} , R'_f равна

$$\bar{y}_{2f} = Z_{02} \left[j \left(C_{2f} \omega - \frac{1}{L_{2f} \omega} \right) + \frac{1}{R_{2f}} + \frac{1}{R'_f} \right] = j \left(\bar{C} \omega - \frac{1}{L \omega} \right) + \left(\frac{1}{r} + 1 \right). \quad (6.1.13)$$

Согласно выражению (1.3.25), нормированная полная проводимость в выходной плоскости включения первого резонатора равна



Ф и г. 6.1.5. Эквивалентная схема одинаковых резонаторов с четвертьволновой связью.

$1/\bar{y}_f$. Но это полная проводимость последовательного контура, состоящего из емкости \bar{L} , индуктивности \bar{C} и сопротивления $1 + 1/\bar{r}$. На фиг. 6.1.5 показана эквивалентная схема такой системы, состоящая из приведенных к входу нормированных элементов.

Нормированное полное сопротивление в сечении BB' определяется выражением

$$\bar{z}_{BB'} = \left(1 + \frac{1}{r} \right) + j\bar{b} = (1 + \bar{g}) + j\bar{b}, \quad (6.1.14)$$

где

$$\bar{g} = \frac{1}{r} = \frac{Q_{\text{вн}}}{Q_0},$$

$$\bar{b} = \bar{C} \omega - \frac{1}{L \omega} = Q_{\text{вн}} \frac{2d\omega}{\omega_0} = 2x.$$

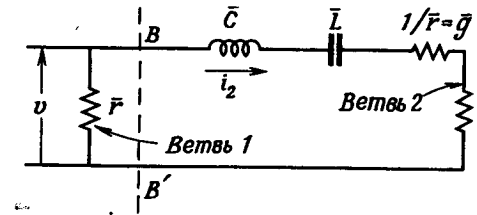
Нормированная полная проводимость в сечении BB' равна

$$\bar{y}_{BB'} = \frac{1}{\bar{z}_{BB'}} = \frac{1}{(1 + \bar{g}) + j\bar{b}} = \frac{(1 + \bar{g}) - j\bar{b}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2}. \quad (6.1.15)$$

Нормированная полная входная проводимость равна

$$\bar{y}_{CC'} = (\bar{g} + j\bar{b}) + \bar{y}_{BB'} = \bar{g} + j\bar{b} + \frac{(1 + \bar{g}) - j\bar{b}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2}. \quad (6.1.16)$$

Коэффициент отражения Γ на входе резонатора определяется



Ф и г. 6.1.6. Распределение мощности $P_{\text{сист}}$ между отдельными ветвями.

по формуле

$$\Gamma = \frac{1 - \bar{y}_{CC'}}{1 + \bar{y}_{CC'}} = \frac{\left[1 - \bar{g} - \frac{1 + \bar{g}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right] - j \left[\bar{b} - \frac{\bar{b}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right]}{\left[1 + \bar{g} + \frac{1 + \bar{g}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right] + j \left[\bar{b} - \frac{\bar{b}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right]}. \quad (6.1.17)$$

Вся рассеиваемая в системе мощность равна

$$P_{\text{сист}} = P_0 (1 - |\Gamma|^2) =$$

$$= P_0 \frac{4 \left[\bar{g} + \frac{1 + \bar{g}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right]}{(1 + \bar{g})^2 \left[1 + \frac{1}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right]^2 + \bar{b}^2 \left[1 - \frac{1}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right]^2}. \quad (6.1.18)$$

Эта полная рассеиваемая мощность распределяется между ветвями 1 и 2 (фиг. 6.1.6).

Мощность, рассеиваемая в ветви 1, определяется элементарно

$$P_1 = \frac{|v|^2}{2r}, \quad (6.1.19)$$

а мощность, рассеиваемая в ветви 2, равна

$$P_2 = \frac{|i_2|^2}{2} (1 + \bar{g}) = \frac{|v|^2}{2} \frac{(1 + \bar{g})}{[(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2]}. \quad (6.1.20)$$

Таким образом, в ветви 2 поглощается следующая доля полной рассеиваемой мощности $P_{\text{сист}}$:

$$\frac{P_2}{P_1 + P_2} = \left[\frac{1 + \bar{g}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right] \left/ \left[\bar{g} + \frac{1 + \bar{g}}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right] \right. \quad (6.1.21)$$

Аналогичное соотношение для мощности, рассеиваемой в выходной нагрузке, имеет вид

$$\frac{1}{1 + \bar{g}} \frac{P_2}{P_1 + P_2} = \frac{1}{(1 + \bar{g}) + \bar{g} [(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2]} \quad (6.1.22)$$

Следовательно, проходящая мощность T равна

$$T = \frac{1}{1 + \bar{g}} \frac{P_2}{P_1 + P_2} P_{\text{сист}} = \frac{4P_0}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \cdot \frac{1}{(1 + \bar{g})^2 \left[1 + \frac{1}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right]^2 + \bar{b}^2 \left[1 - \frac{1}{(1 + \bar{g})^2 + \bar{b}^2} \right]^2} \quad (6.1.23)$$

На резонансной частоте это выражение упрощается

$$T_0 = P_0 \frac{4}{[(1 + \bar{g})^2 + 1]^2} = P_0 \frac{Q_{\text{н}}^2}{\left[\frac{Q_{\text{вн}}^2}{2Q_{\text{н}}} + Q_{\text{н}} - Q_{\text{вн}} \right]^2} \quad (6.1.23')$$

Из сравнения этого результата с выражением для мощности, передаваемой при резонансе через резонаторы с полуволновым включением

$$T_0 = P_0 \frac{Q_{\text{н}}^2}{(Q_{\text{вн}} - Q_{\text{н}})^2}, \quad (6.1.8')$$

видно, что четвертьволновое включение несколько улучшает прохождение мощности через систему на резонансной частоте.

Не менее важным результатом является существенное уменьшение коэффициента отражения на резонансной частоте

$$\Gamma_0 |_{d=\lambda_{\text{в}}/4} = \frac{(1 - \bar{g}) - \frac{1}{1 + \bar{g}}}{(1 + \bar{g}) + \frac{1}{1 + \bar{g}}} = -\frac{\bar{g}}{\bar{g} + 2 + 2/\bar{g}} \quad (6.1.17')$$

по сравнению со случаем полуволнового включения, когда этот коэффициент равен

$$\Gamma_0 |_{d=0} = \frac{1 - (2\bar{g} + 1)}{1 + (2\bar{g} + 1)} = -\frac{\bar{g}}{\bar{g} + 1} \quad (6.2.24)$$

Хотя выражение для проходящей мощности в общем случае с учетом потерь является очень сложным, его можно значительно упростить, если принять, что $Q_0 \gg Q_{\text{вн}}$, т. е. что \bar{g} очень мало.

При этом выражение (6.1.23) принимает простой вид

$$T = P_0 \frac{4}{4 + \bar{b}^4} = P_0 \frac{4}{1 + 4Q_{\text{н}}^4 \left[\frac{2d\omega}{\omega_0} \right]^4} = P_0 \frac{1}{1 + 4x^4}, \quad (6.1.25)$$

где величина x по-прежнему относится к отдельному резонатору.

Таким образом, четвертьволновая связь резко изменила зависимость величины T от частоты: в отличие от одного резонатора или двух резонаторов с полуволновым включением величина T теперь пропорциональна x^4 , а не x^2 [уравнение (6.1.10)]. При $|x| \gg 1$ спад частотной характеристики увеличился до 12 дБ/октава и $T |_{d=\lambda_{\text{в}}/4}$ всегда меньше, чем $T |_{d=0}$. Но при $|x| < 1$ величина $T |_{d=\lambda_{\text{в}}/4}$ всегда больше, чем $T |_{d=0}$. Следовательно, четвертьволновое включение резонаторов, с одной стороны, делает их частотную характеристику более пологой в полосе пропускания и более крутой в полосе непрозрачности, а с другой стороны, снижает потери и КСВН на резонансной частоте. Поэтому в фильтрах почти всегда применяют четвертьволновую связь (и эквивалентную ей непосредственную связь, которую не следует ошибочно отождествлять с полуволновой связью). По уравнениям (6.1.25) можно рассчитать полную нагруженную добротность $Q_{\text{н. полн}}$, определяемую по половинному уровню мощности. На границах полосы

$$4x^4 = 1, \quad (6.1.26)$$

т. е.

$$Q_{\text{н. полн}}^4 = 4Q_{\text{н}}^4$$

или

$$Q_{\text{н. полн}} = \sqrt{2} Q_{\text{н}}, \quad (6.1.26')$$

где $Q_{\text{н}}$ относится к отдельному резонатору.

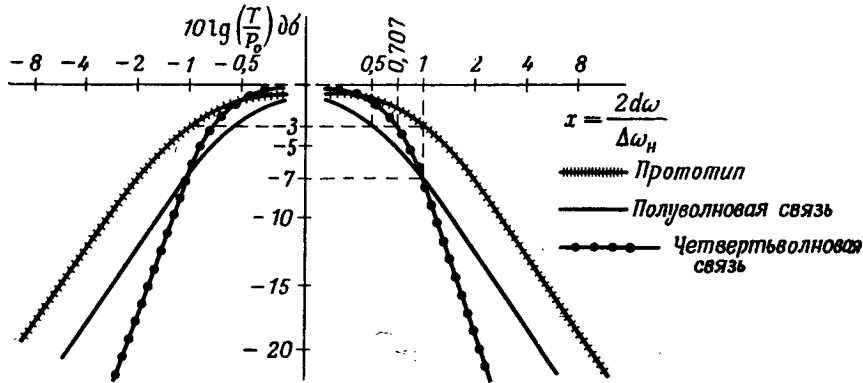
На фиг. 6.1.7 произведено сравнение частотных характеристик отдельного резонатора, двух резонаторов в полуволновом включении и двух резонаторов в четвертьволновом включении.

В приложении XVI рассматривается случай, когда d немного отличается от четверти длины волны. Показано, что (при отсутствии потерь) имеются две частоты, для которых $T = P_0$, и что одна из этих частот всегда равна ω_0 . По мере того как d приближается к $\lambda_{\text{в}}/4$, частотная характеристика постепенно перестает быть двугорбой и при $d = \lambda_{\text{в}}/4$ переходит в одnogорбую кривую с очень плоской вершиной. Поэтому четвертьволновую связь иногда называют *критической связью*. Кроме того, частотную характеристику при четвертьволновой связи называют *максимально плоской*, так как затухание равно величине

$$A = P_0 / T = 1 + 4x^4, \quad (6.1.27)$$

у которой первые три производные равны нулю при $x = 0$ (максимально возможное количество нулевых производных при двух полюсах).

В следующем параграфе будет показано, что непосредственная связь эквивалентна четвертьволновой и что критическая связь может



Ф и г. 6.1.7. Сравнение характеристик передачи.

рассматриваться не только как предельный случай при d , стремящемся к $\lambda_{вн}/4$, но также и как предельный случай достижения симметрии¹⁾ у несимметричных резонаторов при $d = \lambda_{вн}/4$.

§ 6.2. КАСКАДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ДВУХ ОБЪЕМНЫХ РЕЗОНАТОРОВ. ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВАЯ И НЕПОСРЕДСТВЕННАЯ СВЯЗИ

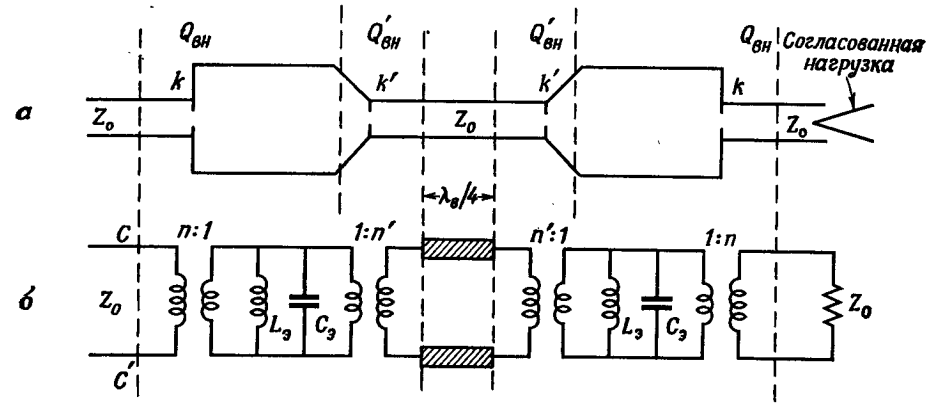
В предыдущем параграфе были рассмотрены свойства системы, состоящей из двух симметричных резонаторов без потерь с четвертьволновой связью. В заключении подчеркивалось, что для такой системы связь является критической, а частотная характеристика — максимально плоской. Если оставить связь четвертьволновой, систему симметричной, а каждый из входящих в нее резонаторов сделать несимметричными, то связь уже не будет критической. Два полюса передаточной функции могут разойтись (связь выше критической) или передача мощности в системе при резонансе может оказаться неполной (связь ниже критической).

С другой стороны, будет показано, что четвертьволновая связь, какая бы она ни была (критическая, выше или ниже критической),

¹⁾ Или по крайней мере «электрической симметрии», когда $Q_{вн1} = Q_{вн2}$ независимо от того, равны характеристические сопротивления или нет.

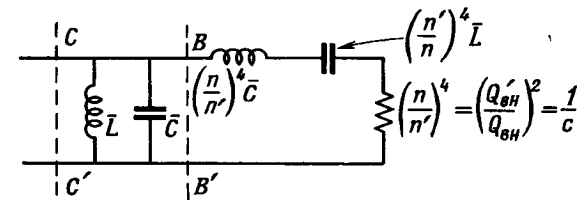
эквивалентна так называемой «непосредственной» связи, при которой оба резонатора непосредственно соединены друг с другом.

а. Симметричная система, состоящая из несимметричных резонаторов с четвертьволновой связью. Система такого типа изображена на фиг. 6.2.1, а, а ее эквивалентная схема — на фиг. 6.2.1, б.



Ф и г. 6.2.1. Резонаторы с четвертьволновой и некритической связью.

После приведения к входу и нормировки схема приобретает вид, показанный на фиг. 6.2.2, где коэффициенты n и n' уже не равны.



Ф и г. 6.2.2. Эквивалентная схема резонаторов с четвертьволновой некритической связью, приведенная к входу системы.

Приведенное к входу нормированное полное сопротивление второго резонатора с нагрузкой равно

$$\bar{z}_{ВВ'} = \frac{1}{c} \left[1 + j \left(\bar{C}\omega - \frac{1}{L\omega} \right) \right] = \frac{1}{c} (1 + j\bar{b}), \quad (6.2.1)$$

где, согласно уравнению (5.7.5),

$$c = \left(\frac{n'}{n} \right)^4 = \left(\frac{Q_{вн}}{Q'_{вн}} \right)^2$$

и

$$\bar{b} = \left(\bar{C}\omega - \frac{1}{L\omega} \right) = \frac{d\omega}{\Delta\omega_{\text{вн}}} = 2x.$$

Нормированная полная входная проводимость определяется по уравнению

$$\bar{y}_{\text{сс}'} = \frac{1}{z_{\text{ВВ}'}} + j\bar{b} = c \left(\frac{1}{1+j\bar{b}} \right) + j\bar{b} = \frac{c+j\bar{b}-\bar{b}^2}{1+j\bar{b}}. \quad (6.2.2)$$

Вход будет согласован, т. е. нормированная полная входная проводимость будет равна 1 при выполнении условия

$$1 = \frac{c+j\bar{b}-\bar{b}^2}{1+j\bar{b}}$$

или

$$\bar{b}^2 + (1-c) = 0, \quad (6.2.3)$$

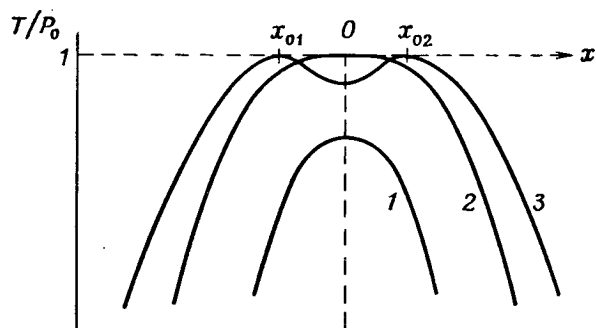
т. е. когда

$$\bar{b}^2 = (c-1). \quad (6.2.3')$$

При $c > 1$, ($Q_{\text{вн}} > Q'_{\text{вн}}$)

$$\bar{b} = \pm \sqrt{c-1} = 2x, \quad (6.2.4a)$$

т. е. имеются две различные и симметрично расположенные отно-



Ф и г. 6.2.3. Частотные характеристики при критической связи и при связи ниже и выше критической.
1 — связь ниже критической; 2 — критическая связь; 3 — связь выше критической.

сительно резонанса частоты

$$x_{01} = -(1/2)\sqrt{c-1}, \quad x_{02} = +(1/2)\sqrt{c-1},$$

для которых $y_{\text{сс}'} = 1$ (полная передача мощности). Этому соответствует случай связи выше критической.

При $c = 1$, ($Q_{\text{вн}} = Q'_{\text{вн}}$)

$$\bar{b} = 0 \quad \text{и} \quad x_{01} = x_{02} = 0. \quad (6.2.4б)$$

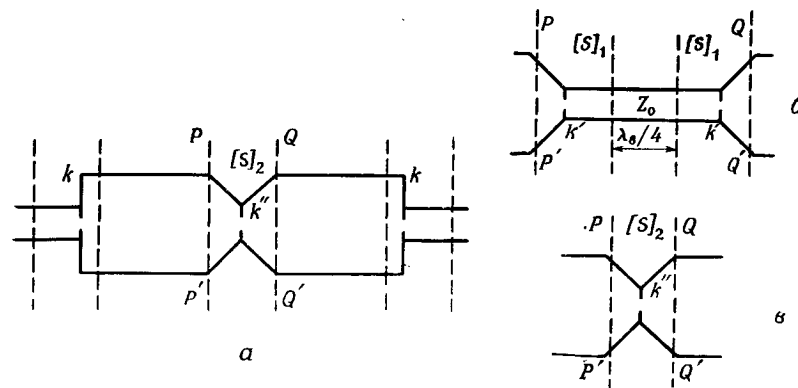
Это случай критической связи, рассмотренный в предыдущем параграфе.

При $c < 1$, ($Q_{\text{вн}} < Q'_{\text{вн}}$) x_0 становится мнимой величиной

$$\text{Re } [x_0] \rightarrow 0,$$

т. е. не существует нормированной резонансной частоты, для которой $\bar{y}_{\text{сс}'} = 1$. Это случай связи ниже критической. В лучшем случае величина коэффициента отражения минимальна при $x = 0$.

б. Эквивалентность четвертьволновой и непосредственной связей. Можно исключить четвертьволновую линию между плоскостями включения резонаторов, соединив их непосредственно друг



Ф и г. 6.2.4. Резонаторы с непосредственной связью и эквивалентные им резонаторы с четвертьволновой связью.

с другом, как показано на фиг. 6.2.4, а, т. е. фактически включив между ними некоторый четырехполюсник, характеризуемый матрицей рассеяния $[S]_2$,

$$[S]_2 = \begin{vmatrix} -\sqrt{1-k'^2} & jk'' \\ jk'' & -\sqrt{1-k''^2} \end{vmatrix} \quad (6.2.5)$$

Ниже будет показано, что при определенных соотношениях между k' и k'' выражение (6.2.5) представляет матрицу рассеяния и для всего четырехполюсника, изображенного на фиг. 6.2.4, б.

Воспользовавшись формулой (XI.16) из приложения XI, можно убедиться в том, что матрице рассеяния $[S]_1$ отдельно взятой пере-

ходной структуры связи (фиг. 6.2.4, б)

$$[S]_1 = \begin{vmatrix} -\sqrt{1-k'^2} & jk' \\ jk' & -\sqrt{1-k'^2} \end{vmatrix} \quad (6.2.6)$$

соответствует матрица типа $[\bar{A}]$, равная

$$[\bar{A}]_1 = \begin{vmatrix} 0 & \bar{B} \\ \bar{C} & 0 \end{vmatrix} \quad (6.2.7)$$

где

$$\bar{B} = \frac{1 - \sqrt{1 - k'^2}}{jk'}$$

$$\bar{C} = \frac{1 + \sqrt{1 - k'^2}}{jk'}$$

$$\bar{B}\bar{C} = -1.$$

Согласно равенству (XI.25), матрицу типа $[\bar{A}]$ для четвертьволновой линии связи можно записать в виде

$$[\bar{A}]_{\lambda_B/4} = \begin{vmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{vmatrix} \quad (6.2.8)$$

Следовательно, матрица $[\bar{A}]$ четырехполюсника, показанного на фиг. 6.2.4, б (между плоскостями PP' и QQ'), равна

$$[\bar{A}]_{\text{общ}} = \begin{vmatrix} 0 & B & 0 & j \\ \bar{C} & 0 & j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \bar{B} \\ j & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & j\bar{B}^2 \\ j\bar{C}^2 & 0 \end{vmatrix} \quad (6.2.9)$$

где

$$\bar{B}^2 = -\frac{1 + (1 - k'^2) - 2\sqrt{1 - k'^2}}{k'^2}$$

$$\bar{C}^2 = -\frac{1 + (1 - k'^2) + 2\sqrt{1 - k'^2}}{k'^2}$$

По формулам (XI.17) и (XI.18) найдем соответствующую матрицу $[S]_2$

$$[S]_2 = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{11} \end{vmatrix} \quad (6.2.10)$$

где

$$s_{11} = \frac{\bar{B}^2 - \bar{C}^2}{\bar{B}^2 + \bar{C}^2} = \frac{-2\sqrt{1 - k'^2}}{2 - k'^2}$$

$$s_{12} = \frac{2}{j(\bar{B}^2 + \bar{C}^2)} = j \frac{k'^2}{2 - k'^2}$$

Следовательно, непосредственная связь эквивалентна четвертьволновой при условии

$$k'' = \frac{\pm k'^2}{2 - k'^2}, \quad (6.2.11)$$

которое приводит к тождественному равенству между правыми частями уравнений (6.2.10) и (6.2.5).

Поскольку $|k''| < 1$,

$$|k''| < |k'| \quad (6.2.12)$$

и, в частности, если $|k'|$ мало, то

$$|k''| \approx \frac{1}{2} k'^2. \quad (6.2.12')$$

Независимо от того, являются ли входящие в систему резонаторы симметричными ($k' = k$), несимметричными со связью выше критической ($k' > k$) или несимметричными со связью ниже критической ($k' < k$), с помощью непосредственной связи, выполненной в соответствии с условием (6.2.11), можно получить такие же характеристики, как в системе с четвертьволновой связью.

Однако необходимо обратить внимание на следующие особенности:

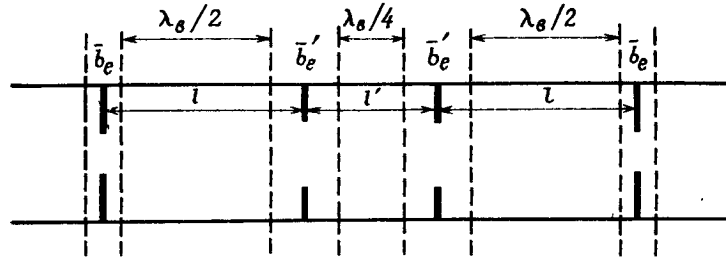
1. Свойства систем с четвертьволновой и эквивалентной ей непосредственной связью не остаются одинаковыми во всем диапазоне частот, так как четвертьволновая линия связи обладает частотной чувствительностью, отсутствующей в системе с непосредственной связью. Но при анализе четвертьволновой связи предполагалось, что длина линии всегда равна четверти длины волны (см. примечание²) на стр. 293). Таким образом, этот анализ полностью применим к непосредственной связи.

2. Результирующая полная электрическая длина каждого из непосредственно связанных резонаторов будет несколько отличаться от длины отдельно взятого резонатора, так как расстояния между плоскостями включения и диафрагмами в системах с матрицами рассеяния $[S]_2$ [уравнение (6.2.5)] и $[S]_1$ [уравнения (6.2.6)] различны. Это обстоятельство будет еще раз подчеркнуто в следующем параграфе.

§ 6.3. КАСКАДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ДВУХ ВОЛНОВОДНЫХ РЕЗОНАТОРОВ. РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ

Расчет симметричного волноводного резонатора, используемого в качестве исходной модели, был рассмотрен в § 5.9, где выведены зависимости нагруженной добротности Q_n , длины l и положения плоскости отсчета от величины нормированной реактивной проводимости диафрагмы \bar{b}_e .

Два одиночных резонатора можно соединить каскадно таким образом, чтобы их плоскости эквивалентного представления совпали, но, как показано в § 6.1, п. «а», это приведет лишь к увеличению значения Q_n в 2 раза.



Фиг. 6.3.1. Два волноводных резонатора с четвертьволновой связью.

Если те же резонаторы имеют четвертьволновую связь, то длина линии связи между ними равна

$$l' = \frac{\lambda_B}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} + \arctg \frac{2}{|\bar{b}'_e|} \right), \quad \bar{b}'_e > 0, \quad (6.3.1)$$

$$l' = \frac{\lambda_B}{2\pi} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{2}{|\bar{b}'_e|} \right), \quad \bar{b}'_e < 0, \quad (6.3.1')$$

в то время как длина l каждого резонатора определяется выражениями

$$l = \frac{\lambda_B}{2\pi} \left(n\pi + \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|} + \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{|\bar{b}'_e|} \right), \quad \bar{b}_e > 0, \quad \bar{b}'_e > 0 \quad (6.3.2)$$

и

$$l = \frac{\lambda_B}{2\pi} \left(n\pi - \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{|\bar{b}_e|} - \frac{1}{2} \arctg \frac{2}{|\bar{b}'_e|} \right), \quad \bar{b}_e < 0, \quad \bar{b}'_e < 0. \quad (6.3.2')$$

При критической связи $\bar{b}'_e = \bar{b}_e$, и, согласно выражениям (5.9.23) и (6.1.26'), имеем

$$Q_{n, \text{полн}} = \sqrt{2} Q_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \sqrt{\bar{b}_e^4 + 4\bar{b}_e^2} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda_0} \right)^2 \left[n\pi + \arctg \frac{2}{\bar{b}_e} \right]. \quad (6.3.3)$$

При связи выше критической $|\bar{b}'_e| < |\bar{b}_e|$. Ширина полосы пропускания и величина провала между горбами частотной характеристики в этом случае могут быть вычислены по уравнению (6.2.2)

или с помощью описанных ниже построений на диаграмме полных сопротивлений, изображенной на фиг. 6.3.2, в.

Фильтры с непосредственной связью, эквивалентные фильтрам с четвертьволновой связью, можно рассчитывать, рассматривая соответствующие значения \bar{b}_e и используя для этого соотношения (5.6.5) и (6.2.11).

Задача состоит в том, чтобы найти реактивную проводимость \bar{b}_e'' , эквивалентную двум диафрагмам с проводимостями \bar{b}'_e , соединенным четвертьволновой линией связи.

С помощью соотношений (5.6.5) и (6.2.11) выражаем k'' через \bar{b}_e

$$k'' = \frac{2}{2 + \bar{b}_e'^2}. \quad (6.3.4)$$

В то же время соотношение (5.6.5) определяет зависимость \bar{b}_e' от k^1

$$\bar{b}_e' = \frac{-2\sqrt{1-k'^2}}{k'}. \quad (6.3.5)$$

Аналогично

$$\bar{b}_e'' = \frac{-2\sqrt{1-k''^2}}{k''}. \quad (6.3.5')$$

Далее, из уравнений (6.3.5') и (6.3.4) следует

$$\bar{b}_e'' = \bar{b}_e' \sqrt{\bar{b}_e'^2 + 4}. \quad (6.3.6)$$

В частности, в системе с критической четвертьволновой связью $\bar{b}'_e = \bar{b}_e$ и поэтому

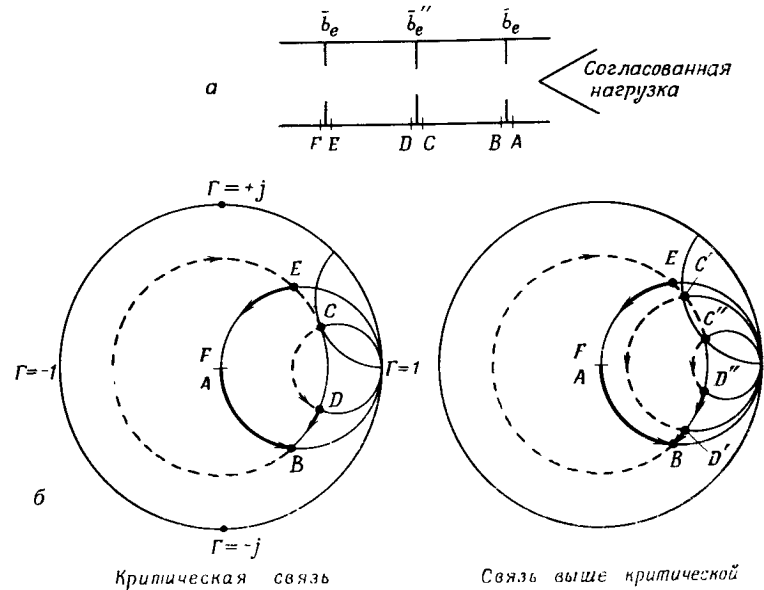
$$\bar{b}_e''_{\text{крит}} = \bar{b}_e \sqrt{\bar{b}_e^2 + 4}. \quad (6.3.6')$$

При заданном \bar{b}_e значение \bar{b}_e'' , соответствующее критической связи, можно найти также с помощью круговой диаграммы полных проводимостей в полярной системе координат. Рассмотрим в качестве примера систему с индуктивными диафрагмами.

На фиг. 6.3.2, а и б исходной точкой является центр круговой диаграммы — точка А. В точку В попадаем после добавления первой реактивной проводимости \bar{b}_e . В точку С можно попасть, двигаясь вдоль окружности радиуса АВ по направлению к генератору.

Если точки F и А должны совпадать (условие согласования), то очевидно, что точка E должна быть расположена симметрично точке В. Таким образом, положение точек А, В, E, F однозначно определено величиной \bar{b}_e , а относительно точек С и D мы можем только утверждать, что они должны быть симметрично расположены и что разница в реактивных проводимостях для этих точек должна равняться \bar{b}_e'' .

Из рассмотрения, проведенного в предыдущем параграфе, следует, что $\bar{b}_e''_{\text{крит}}$ представляет собой максимальную величину \bar{b}_e'' , при которой еще имеются симметричные точки C и D . Следовательно, C есть точка касания окружности радиуса AB и окружности постоянных реактивных проводимостей. Тогда критическая



Ф и г. 6.3.2. Графическое представление непосредственной связи. $C'D'$ — низкочастотный резонанс; $C''D''$ — высокочастотный резонанс.

реактивная проводимость $\bar{b}_e''_{\text{крит}}$ равна удвоенному значению реактивной проводимости в точке C .

При большей величине \bar{b}_e'' не было бы пары симметричных точек C и D (связь ниже критической). При меньшей величине \bar{b}_e'' (фиг. 6.3.2, в) было бы две пары симметричных точек C', D' и C'', D'' , соответствующих двум различным частотам (связь выше критической).

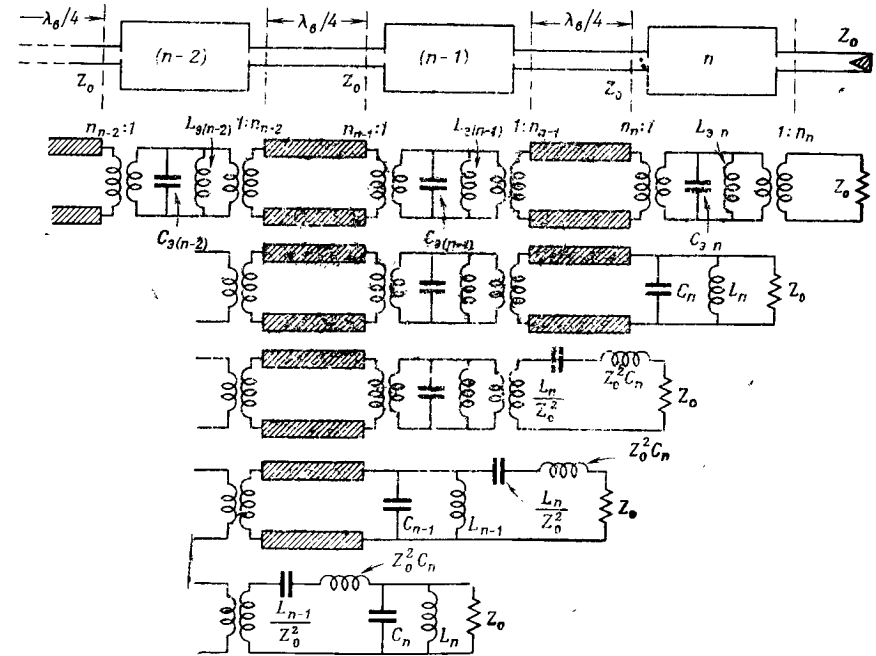
§ 6.4. МНОГОРЕЗОНАТОРНЫЕ ПОЛОСОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Рассмотрим n резонаторов с четвертьволновыми связями. Пусть эти резонаторы не обладают потерями, симметричны, но не обязательно одинаковы. Условие симметрии резонаторов¹⁾ требует,

¹⁾ Приведенное ниже рассмотрение относится и к случаю несимметричных резонаторов, если только для них соблюдается условие $Q_{\text{вн1}} = Q_{\text{вн2}}$.

чтобы все четвертьволновые линии связи имели одинаковое характеристическое сопротивление, равное Z_0 .

Все трансформаторы и четвертьволновые отрезки можно исключить путем последовательного свертывания схемы справа налево. Например, сопротивление нагрузки Z_0 при исключении последнего



Ф и г. 6.4.1. Последовательное построение эквивалентных схем системы резонаторов с четвертьволновыми связями.

трансформатора переходит в Z_0/n^2 , а после исключения предпоследнего трансформатора преобразуется в Z_0 и внутренние параметры последнего резонатора принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} L_n &= n_n^2 L_{\text{Эн}}, \\ C_n &= \frac{C_{\text{Эн}}}{n_n^2}. \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

Исключение последнего четвертьволнового отрезка приводит к схеме последовательного контура с элементами

$$\begin{aligned} \text{индуктивность} & \quad \frac{Z_0^2}{n_n^2} C_{\text{Эн}}, \\ \text{емкость} & \quad \frac{n_n^2}{Z_0^2} L_{\text{Эн}}, \\ \text{сопротивление} & \quad Z_0. \end{aligned} \quad (6.4.2)$$

Исключение трансформаторов $1 : n_{n-1}$ и $n_{n-1} : 1$ никак не повлияет на параметры последовательного контура, но приведет к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} L_{n-1} &= n_{n-1}^2 L_{\partial(n-1)}, \\ C_{n-1} &= \frac{C_{\partial(n-1)}}{n_{n-1}^2}. \end{aligned} \quad (6.4.1')$$

Затем исключается второй (справа) четвертьволновый отрезок. Последовательный контур превращается в параллельный контур со следующими параметрами:

$$\begin{aligned} \text{индуктивность} \quad n_n^2 L_{\partial n} &= L_n, \\ \text{емкость} \quad \frac{C_{\partial n}}{n_n^2} &= C_n, \\ \text{сопротивление} \quad Z_0, \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

а эквивалентная схема $(n-1)$ -го резонатора приобретает вид последовательного контура, у которого

$$\begin{aligned} \text{индуктивность} \quad \frac{Z_0^2}{n_{n-1}^2} C_{\partial(n-1)}, \\ \text{емкость} \quad \frac{n_{n-1}^2}{Z_0^2} Z_{\partial(n-1)}. \end{aligned} \quad (6.4.2')$$

Эта процедура повторяется до тех пор, пока не будут исключены все трансформаторы и все четвертьволновые отрезки. Заметим, что первый резонатор всегда замещается шунтирующим параллельным контуром¹⁾. Поэтому k -й резонатор замещается последовательным контуром, если k четное, и параллельным контуром, если k нечетное.

После нормировки по Z_0 получим окончательную эквивалентную схему, изображенную на фиг. 6.4.2, где

$$\bar{C}_k = \frac{Z_0}{n_k^2} C_{\partial k}, \quad \text{если } k \text{ нечетное} \quad (6.4.4)$$

$$\bar{L}_k = \frac{n_k^2}{Z_0} L_{\partial k},$$

и

$$\text{индуктивность} \quad \bar{C}_k = \frac{Z_0}{n_k^2} C_{\partial k}, \quad \text{если } k \text{ четное.} \quad (6.4.4')$$

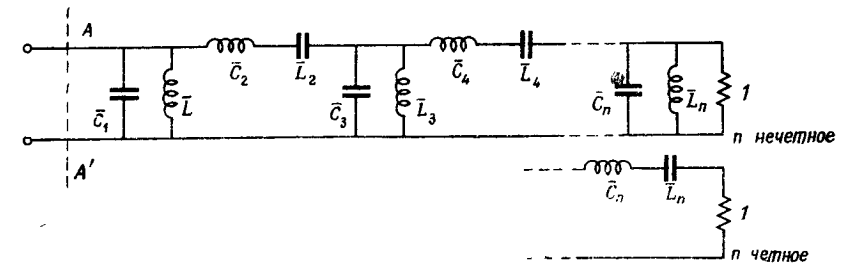
$$\text{емкость} \quad \bar{L}_k = \frac{n_k^2}{Z_0} L_{\partial k},$$

¹⁾ Это справедливо благодаря соответствующему выбору плоскости отсчета, которая является плоскостью эффективного короткого замыкания при расстройке. Однако такой выбор был сделан не по принципиальным мотивам, а просто из соображений удобства.

Напомним, что, согласно уравнению (5.7.5),

$$\bar{C}_k = \frac{Q_{\text{вн}k}}{\omega_0} = \frac{2Q_{\text{н}k}}{\omega_0}. \quad (6.4.5)$$

Полученная схема (фиг. 6.4.2) и соотношение (6.4.5) позволяют перейти к прототипам, рассматриваемым в последующих параграфах. Расчет прототипов (при заданных условиях) позволит найти значения \bar{C}_k и \bar{L}_k , а соотношение (6.4.5) будет определять соответствующую величину требуемой нагруженной добротности $Q_{\text{н}k}$.



Фиг. 6.4.2. Окончательная эквивалентная схема многорезонаторного фильтра.

Следовательно, для синтеза фильтров можно использовать материалы § 5.9 и 5.10, а также (для фильтров с непосредственной связью) приложение XVII.

Непосредственную связь можно преобразовать в четвертьволновую. Вторую (слева) неоднородность можно расчленить на две неоднородности, разделенные четвертьволновым отрезком. Эта операция обратна описанной в приложении XVII. Для того чтобы резонатор оказался симметричным, левая из вновь полученных неоднородностей выбирается совпадающей с неоднородностью на входе резонатора¹⁾.

Такую операцию можно было бы повторить, чтобы сделать симметричным второй резонатор, затем третий и т. д. до тех пор, пока не будут исчерпаны все неоднородности, кроме последней. При этом последний резонатор может оказаться симметричным или несимметричным. Если он несимметричен, то на резонансной частоте фильтр вносит потери, если только его выходное сопротивление, отличающееся от Z_0 , не принимает тех значений, для которых $Q_{\text{вн}1} = Q_{\text{вн}2}$ [уравнение (5.7.12)].

¹⁾ Если вторая неоднородность меньше первой, то это сделать нельзя, так как каждая из двух неоднородностей всегда меньше неоднородности, им эквивалентной (уравнение (XVII.7)).

Таким образом, при определенных условиях многорезонаторные фильтры с непосредственными связями эквивалентны фильтрам с четвертьволновыми связями и могут быть тоже представлены схемой замещения, показанной на фиг. 6.4.2. Заметим, что системе из n резонаторов эквивалентен фильтр с непосредственными связями, в котором число неоднородностей равно $n + 1$.

§ 6.5. НОРМИРОВАННЫЕ ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ ЧАСТОТ (ПРОТОТИПЫ)

Параграф посвящен изучению нормированных эквивалентных низкочастотных прототипов для двух самых распространенных типов СВЧ-фильтров: фильтров Баттерворса и Чебышева. Прототип фильтра, состоящего из периодически нагруженной линии с постоянным коэффициентом связи между звеньями и полувзеном на конце, рассмотрен в § 7.6.

Зная формулы, описывающие характеристики передачи [выражения (6.5.1), (6.5.3) и (7.6.13)], и приведенные в § 6.6 и 6.7 соотношения, позволяющие перейти от нормированных величин к истинным, разработчик в состоянии выбрать подходящий тип фильтра и найти требуемое число звеньев. Обычно для расчета он должен задаться допустимой величиной неравномерности частотной характеристики в полосе пропускания, требуемой величиной подавления сигнала на различных частотах вне полосы пропускания, а возможно, и определенными требованиями к фазовой характеристике.

Характеристика передачи фильтра Баттерворса соответствует биномиальному распределению (§ 4.1) или случаю критической связи для двух резонаторов без потерь (§ 6.2) и описывается зависимостью

$$\frac{T_B}{P_0} = \frac{1}{1+x^{2n}}, \quad (6.5.1)$$

где x — частота, нормированная таким образом, чтобы на частоте среза (на границе полосы пропускания или в данном частном случае в точке, где $T_B/P_0 = 3$ дб), $|x| = 1$. Функция $10 \lg(T_B/P_0)$ изображена на фиг. 6.5.1.

Затухание характеризуется функцией

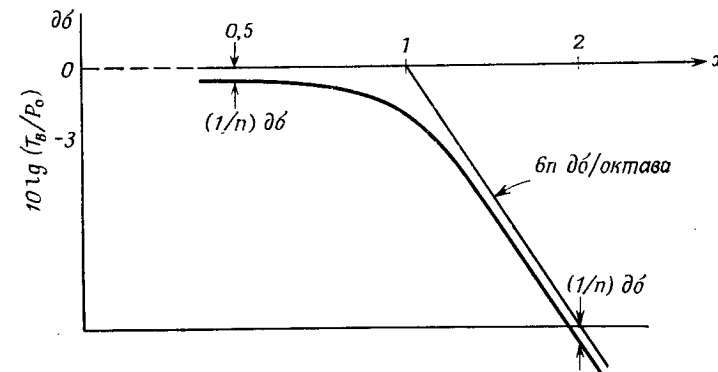
$$A_B = 1 + x^{2n}, \quad (6.5.2)$$

у которой производные, начиная от первой и кончая $(2n-1)$ -й, равны нулю при $x=0$. Таким образом, функции $T_B(x)$ и $A_B(x)$ являются максимально плоскими при $x=0$.

Если функцию затухания выразить в децибелах, то она примет вид

$$A_B = 10 \lg A_B = 10 \lg(1 + x^{2n}) \text{ дб}^1. \quad (6.5.2')$$

Характеристика передачи чебышевского фильтра соответствует чебышевскому распределению, рассмотренному в § 4.2, или слу-



Ф и г. 6.5.1. Характеристика Баттерворса для фильтра нижних частот (прототипа).

чаю двух резонаторов без потерь со связью выше критической (§ 6.2) и определяется выражением

$$T_C/P_0 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 C_n^2(x)}, \quad (6.5.3)$$

где $C_n(x)$ — функция, рассматриваемая в приложении X; ϵ — некоторое наперед заданное число, не превышающее 1.

Функция $C_n(x)$ по определению такова, что

$$T_C/P_0 \geq 1/1 + \epsilon^2 \quad \text{при } |x| \leq 1. \quad (6.5.4)$$

Функция

$$A_C = 1 + \epsilon^2 C_n^2(x), \quad (6.5.5)$$

характеризующая затухание, обращается в единицу $n/2$ или $(n+1)/2$ раз, включая точку $x=0$, в зависимости от четности или нечетности числа n .

¹⁾ Графики этих функций для $n=1 \div 7$ и различных значений A_{C_m} (в случае чебышевских фильтров) приводятся в [9]; см. также [41].

Если затухание измеряется в децибелах, то функция затухания имеет вид

$$A_C = 10 \lg [1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)] \text{ дб.} \quad (6.5.5')$$

Если выраженную в децибелах величину максимального затухания в полосе пропускания ($|x| \leq 1$) обозначить через A_{Cm}

$$A_{Cm} = 10 \lg (1 + \varepsilon^2) \text{ дб,} \quad (6.5.6)$$

то для любой нормированной частоты x получим затухание в виде явной функции от A_{Cm} ¹⁾

$$A_m = 10 \lg [1 + (10^{A_{Cm}/10} - 1) \cos^2(n \arccos x)] \text{ дб при } |x| \leq 1, \quad (6.5.7)$$

$$A_m = 10 \lg [1 + (10^{A_{Cm}/10} - 1) \text{ch}^2(n \text{Arch } x)] \text{ дб при } |x| \geq 1, \quad (6.5.7')$$

так как, согласно уравнению (6.5.6),

$$\varepsilon^2 = 10^{A_{Cm}/10} - 1. \quad (6.5.6')$$

Значение частоты $x_{3\text{дб}}$, на которой затухание равно 3 дб, неявно определяется уравнением

$$|C_n(x_{3\text{дб}})| = \frac{1}{\varepsilon}. \quad (6.5.8)$$

Отметим, что, вообще говоря, условие $|x| = 1$ не соответствует точкам, где затухание равно 3 дб. Оно выполняется на границе полосы пропускания, где величина проходящей мощности та же, что и в точках минимумов осциллирующего участка характеристики передачи.

Можно убедиться, что при одной и той же полосе пропускания [область частот, в которой затухание меньше наперед заданной величины $(1 + \varepsilon^2)$], одинаковом n и достаточно большом ε крутизна спада характеристики на частоте среза для чебышевского фильтра больше, чем для фильтра Баттерворса.

Для фильтра Баттерворса

$$A_B = 1 + \varepsilon^2 \quad \text{при } |x| = \varepsilon^{1/n},$$

откуда следует, что

$$\frac{dA_B}{dx} \Big|_{|x|=\varepsilon^{1/n}} = 2n\varepsilon^{2n-1} = 2n\varepsilon^2 \varepsilon^{-1/n}. \quad (6.5.9)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 311.

Для чебышевского фильтра

$$A_C = 1 + \varepsilon^2 \quad \text{при } |x| = 1, \\ \frac{dA_C}{dx} \Big|_{|x|=1} = 2\varepsilon^2 C_n(1) \frac{dC_n(x)}{dx} \Big|_{|x|=1} = 2\varepsilon^2 \frac{dC_n(x)}{dx} \Big|_{|x|=1} = 2\varepsilon^2 n^2 1). \quad (6.5.10)$$

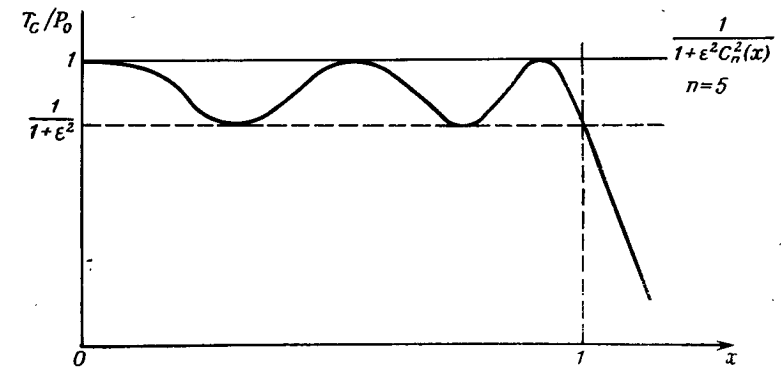
Следовательно, на частоте среза крутизна кривой A_C больше, чем кривой A_B , если

$$n^2 > n\varepsilon^{-1/n}$$

или

$$\varepsilon > \frac{1}{n^n}. \quad (6.5.11)$$

Кроме того, хотя для обоих типов фильтров крутизна спада характеристики асимптотически приближается к величине



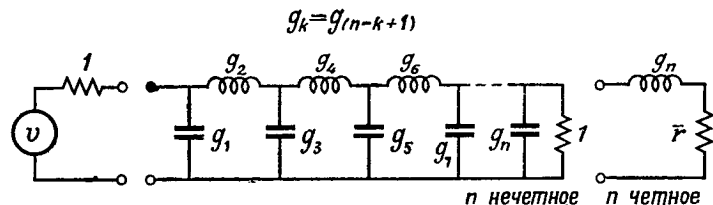
Ф и г. 6.5.2. Характеристика Чебышева для фильтра нижних частот (прототипа).

6 дб/октава, вносимые потери у чебышевского фильтра в $(\varepsilon^{2n-1})^2$ раз больше.

Таким образом, в полосе непрозрачности чебышевский фильтр меньше отличается от идеального фильтра с «прямоугольной» частотной характеристикой. Однако за это приходится расплачиваться осцилляциями частотной характеристики в полосе прозрачности фиг. (6.5.2).

$$1) \frac{dC_n(x)}{dx} \Big|_{|x|=1} = \begin{cases} n^2, & \text{если } n \text{ нечетно,} \\ n^2 - 1, & \text{если } n \text{ четно} \\ & \text{(но не делится на 4),} \\ n^2 + 1, & \text{если } n \text{ нечетно} \\ & \text{(и делится на 4).} \end{cases} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \text{Редко используется} \\ \text{на практике} \end{array}$$

а. Фильтр нижних частот с сосредоточенными постоянными и характеристикой Баттерворса. Характеристика передачи, описываемая выражением (6.5.1), может быть реализована с помощью



Фиг. 6.5.3. Нормированный фильтр нижних частот (прототип) с сосредоточенными параметрами.

схемы, изображенной на фиг. 6.5.3, при определенном подборе ее нормированных параметров g .

Значения параметров g определяются по формуле Беннетта

$$g_k = 2 \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6.5.12)$$

при $\bar{r} = 1$ (для четных и нечетных n).

Заметим, что

$$g_k = g_{(n-k+1)}. \quad (6.5.13)$$

Если $\bar{r} = 1$ ом, а $\omega_{3дб} = 1$ рад/сек, то нечетные элементы будут иметь размерность фарад, четные элементы будут выражаться в генри.

Вывод уравнения (6.5.12) приведен в приложении XVIII.

б. Чебышевский фильтр нижних частот с сосредоточенными постоянными. Схема, изображенная на фиг. 6.5.3, подходит и для этого случая, если ее параметры рассчитывать по уравнениям

$$g_k = \frac{4a_{k-1}a_k}{b_{k-1}g_{k-1}} \quad (6.5.14)$$

и

$$g_1 = \frac{2a_1}{\gamma}, \quad (6.5.14')$$

где

$$\beta = \ln \left(\operatorname{cth} \frac{\mathcal{A}_{Cm}}{17,37} \right) = 2 \operatorname{Arsh} \frac{1}{\epsilon},$$

$$\gamma = \operatorname{sh} \left(\frac{\beta}{2n} \right),$$

$$a_k = \sin \left[\frac{(2k-1)\pi}{2n} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (6.5.15)$$

$$b_k = \gamma^2 + \sin^2 \left(\frac{k\pi}{n} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Таблица 6.5.1

Значения параметров g для фильтров нижних частот (прототипов)

Фильтр Баттерворса								
n	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8
1	2,000							
2	1,414	1,414						
3	1,000	2,000	1,000					
4	0,765	1,848	1,848	0,765				
5	0,618	1,618	2,000	1,618	0,618			
6	0,518	1,414	1,932	1,932	1,414	0,518		
7	0,445	1,247	1,802	2,000	1,802	1,247	0,445	
8	0,390	1,111	1,663	1,962	1,962	1,663	1,111	0,390
Фильтр Чебышева, $\mathcal{A}_{Cm} = 0,01$ дБ								
1	0,094							
2	0,449	0,408						
3	0,629	0,970	0,629					
4	0,713	1,200	1,321	0,648				
5	0,756	1,305	1,577	1,305	0,756			
6	0,781	1,360	1,689	1,535	1,497	0,710		
7	0,797	1,392	1,748	1,633	1,748	1,392	0,797	
8	0,807	1,413	1,782	1,683	1,853	1,619	1,555	0,733
Фильтр Чебышева, $\mathcal{A}_{Cm} = 0,1$ дБ								
1	0,305							
2	0,843	0,622						
3	1,031	1,147	1,031					
4	1,088	1,306	1,770	0,818				
5	1,147	1,371	1,950	1,371	1,147			
6	1,168	1,404	2,056	1,517	1,903	0,862		
7	1,181	1,423	2,096	1,573	2,096	1,423	1,181	
8	1,189	1,434	2,120	1,601	2,120	1,564	1,944	0,878
Фильтр Чебышева, $\mathcal{A}_{Cm} = 0,25$ дБ								
1	0,487							
2	1,113	0,688						
3	1,303	1,146	1,303					
4	1,378	1,269	2,056	0,851				
5	1,382	1,326	2,209	1,326	1,382			
6	1,437	1,341	2,316	1,462	2,178	0,885		
7	1,447	1,356	2,348	1,469	2,348	1,356	1,447	
8	1,454	1,365	2,367	1,489	2,411	1,462	2,210	0,898

Если n нечетно, то $\bar{r} = 1$ и

$$g_k = g_{(n-k+1)}. \quad (6.5.16)$$

Но если n четно, то

$$\bar{r} = \text{th}^2(\beta/4) \quad (6.5.17)$$

и

$$g_n = g_1 \bar{r}. \quad (6.5.18)$$

Из-за сложности выражения (6.5.17) (заметим, что \bar{r} становится функцией \mathcal{A}_{cm}) и поскольку $T_c/P_0|_{x=0} = 1/(1+\epsilon^2)$, число n обычно берут нечетным¹⁾.

Проверка приведенных выше соотношений проведена в приложении XVIII.

В табл. 6.5.1 даны значения параметров g фильтра Баттерворса, изображенного на фиг. 6.5.3 (с числом элементов от 1 до 8), и чебышевского фильтра (с числом элементов от 1 до 8) при различных значениях \mathcal{A}_{cm} в децибелах.

§ 6.6. ФИЛЬТРЫ НИЖНИХ И ВЕРХНИХ ЧАСТОТ

Нормированное полное сопротивление для схемы, изображенной на фиг. 6.5.3 (частота среза $|x|=1$), равно

$$\bar{z} = \frac{1}{jxg_1 + \frac{1}{jxg_2 + \frac{1}{jxg_3 + \dots + \frac{1}{jxg_n + \frac{1}{\bar{r}}}}}}, \quad \text{если } n \text{ нечетно,} \quad (6.6.1)$$

$$\bar{z} = \frac{1}{jxg_1 + \frac{1}{jxg_2 + \frac{1}{jxg_3 + \dots + \frac{1}{jxg_n + \bar{r}}}}}, \quad \text{если } n \text{ четно.} \quad (6.6.1')$$

¹⁾ Это можно объяснить (по крайней мере качественно) на простом примере изображенной на фиг. 6.2.1 системы, эквивалентная схема которой приведена на фиг. 6.2.2. Если бы нужно было синтезировать фильтр в соответствии со схемой фиг. 6.2.2, не зная о системе, представленной на фиг. 6.2.1, то мы использовали бы два симметричных резонатора, отношение нагруженных добротностей которых равно $(n/n')^4 = 1/c$, поскольку, согласно уравнению (6.5.18) и равенству $1/c = \bar{r}$, для эквивалентной схемы выполняется условие: $g_2/g_1 = (n/n')^4 = 1/c$. Кроме того, пришлось бы обеспечить выходное нормированное сопротивление, равное $1/c = \bar{r}$, что, как нетрудно убедиться, согласуется с уравнением (6.5.17).

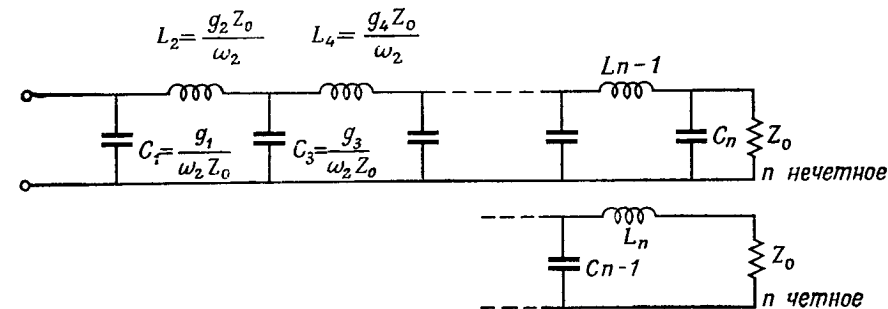
Эти формулы, рассмотренные в приложении XVIII, нетрудно получить при последовательном учете сопротивлений и проводимостей отдельных ветвей, перемещаясь по схеме справа налево.

Если входное характеристическое сопротивление равно Z_0 , то ненормированный импеданс исследуемой схемы равен $Z = \bar{z}Z_0$, или

$$Z = \frac{1}{jx \frac{g_1}{Z_0} + \frac{1}{jxZ_0g_2 + \frac{1}{jx \frac{g_3}{Z_0} + \dots}}}, \quad (6.6.2)$$

т. е. нечетные элементы характеризуются величиной g_k/Z_0 (в фарадах), четные — величиной $g_k Z_0$ (в генри), а сопротивление выходной нагрузки равно $\bar{r}Z_0$ ом (в большинстве случаев Z_0 ом).

а. Фильтры нижних частот. Если требуемая частота среза (частота, соответствующая затуханию 3 дБ в фильтре Баттерворса



Ф и г. 6.6.1. Фильтр нижних частот.

или \mathcal{A}_{cm} дБ в чебышевском фильтре) равна ω_2 , то в уравнения (6.5.1) или (6.5.3) вместо x следует подставить ω/ω_2 . По заданному затуханию вне полосы пропускания с помощью этих уравнений можно определить требуемое количество элементов фильтра (см. примечание на стр. 311).

После подстановки отношения ω/ω_2 вместо x выражение (6.6.2) преобразуется к виду

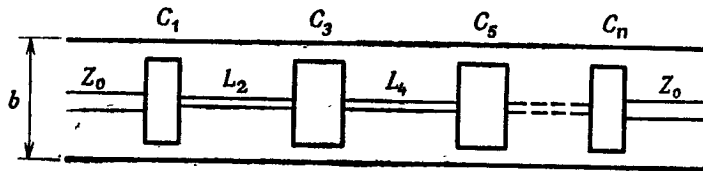
$$Z_{нч} = \frac{1}{j\omega \left(\frac{g_1}{\omega_2 Z_0} \right) + \frac{1}{j\omega \left(\frac{Z_0 g_2}{\omega_2} \right) + \frac{1}{j\omega \left(\frac{g_3}{\omega_2 Z_0} \right) + \dots}}}. \quad (6.6.3)$$

Таким образом, при заданных ω_2 , Z_0 и типе аппроксимации характеристики получим

$$\begin{aligned} C_k &= \frac{g_k}{\omega_2 Z_0} \phi \quad (k \text{ нечетное}) \\ L_k &= \frac{g_k Z_0}{\omega_2} \text{ гн} \quad (k \text{ четное}), \end{aligned} \quad (6.6.4)$$

где значения g_k определяются из уравнений (6.5.12) или (6.5.14).

Если практическая реализация фильтра осуществляется на коаксиальных или полосковых линиях, то роль параллельных



Ф и г. 6.6.2. Фильтр нижних частот на коаксиальных линиях.

конденсаторов и последовательных индуктивностей выполняют короткие отрезки линий соответственно с низким и высоким характеристическими сопротивлениями. Для коаксиальных линий имеем

$$C = \frac{0,241 \epsilon'}{\lg \frac{b}{a}} 10^{-12} \phi' \text{ см}, \quad (6.6.5)$$

$$L = 0,0048 \mu \lg \frac{b}{a} \text{ гн' см}, \quad (6.6.6)$$

где b — внутренний диаметр наружного проводника, a — наружный диаметр внутреннего проводника. При расчете необходимо учитывать емкость, обусловленную краевым эффектом, прибавляя ее к величине, определяемой по уравнению (6.6.5).

Соотношения (6.6.5) и (6.6.6), строго говоря, справедливы только на нулевой частоте, но если продольные размеры отрезков линий меньше четверти длины волны, то эти соотношения являются достаточно точными.

Возможное взаимное влияние двух соседних емкостных отрезков накладывает ограничение на минимальную длину индуктивных отрезков.

На практике многие коаксиальные фильтры нижних частот рассчитываются на основе параметров g , выбираемых в соответствии с рассмотренной в § 7.6 периодической структурой с «уполовиненными» звеньями на концах ($g_1 = g_n = 1$, все остальные значения g равны 2).

Поскольку волноводы обладают свойствами не пропускать частоты ниже критической, на основе их нельзя создать настоящих фильтров нижних частот. Волноводы по своей природе являются фильтрами верхних частот. Однако, реализуя схему, представленную на фиг. 6.6.1, с помощью набора чередующихся H - и E -тройников (см. § 3.4 и 3.6), разнесенных на расстоянии, кратные половине длины волны, и соединенных с короткозамкнутыми отрезками, эквивалентными соответствующим величинам емкостей или индуктивностей, можно было бы получить фильтр «режекции верхних частот». Однако, поскольку свойства всех элементов зависят от частоты, характеристика такого фильтра быстро ухудшалась бы за пределами довольно узкой полосы частот. На практике удобнее использовать схемы с гибридными волноводными сочленениями и ответвителями, описываемые в гл. 8, § 8.5.

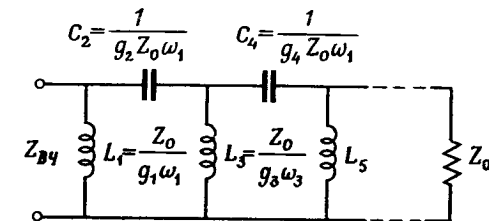
б. Фильтры верхних частот. Для фильтров верхних частот с частотой среза ω_1 в выражение (6.6.2) вместо x следует подставить ω_1/ω , т. е.

$$Z_{ВЧ} = \frac{1}{\frac{g_1 \omega_1}{j \omega Z_0} + \frac{1}{\frac{g_2 Z_0 \omega_1}{j \omega} + \frac{1}{\frac{g_3 \omega_1}{j \omega Z_0} + \dots}}}. \quad (6.6.7)$$

Таким образом, при заданных значениях ω_1 , Z_0 и определенном способе аппроксимации характеристики

$$\begin{aligned} L_k &= \frac{Z_0}{g_k \omega_1} \text{ гн} \quad (k \text{ нечетное}), \\ C_k &= \frac{1}{g_k Z_0 \omega_1} \phi \quad (k \text{ четное}). \end{aligned} \quad (6.6.8)$$

Если практическая реализация фильтра осуществляется на коаксиальных или полосковых линиях, то роль параллельных

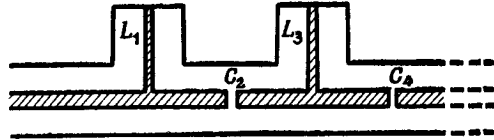


Ф и г. 6.6.3. Фильтр верхних частот.

индуктивностей выполняют шлейфы — короткие отрезки линии с большим характеристическим сопротивлением, которые под прямым углом ответвляются от основной линии. (В § 3.4 показано,

что для коаксиальных и полосковых линий тройниковые ответвления всегда соответствуют параллельному включению.) Последовательные конденсаторы получаются в результате разрыва центральной жилы. В этом случае также можно пользоваться соотношениями (6.6.8), если размеры отрезков линий и разрывов достаточно малы по сравнению с $\lambda/4$.

На волноводах нецелесообразно реализовать схему, показанную на фиг. 6.6.3, но можно создать системы, основанные на



Ф и г. 6.6.4. Фильтр верхних частот на коаксиальных линиях.

эффекте отсечки (путем уменьшения широкого размера сечения волновода).

Другие системы основаны на том, что величина реактивной проводимости $|b_e|$ диафрагмы или штыря больше в низкочастотной части диапазона, особенно если этот элемент «толстый» (см. примечание на стр. 263).

§ 6.7. ПОЛОСОВЫЕ И ЗАГРАЖДАЮЩИЕ ФИЛЬТРЫ

а. Полосовые фильтры. Для полосовых (полосно-пропускающих) фильтров с резонансной частотой ω_0 и полосой пропускания $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ величину x нужно определить так, чтобы

$$\begin{aligned} x &= 0 && \text{при } \omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1\omega_2}, \\ x &= 1 && \text{при } \omega = \omega_2, \\ x &= -1 && \text{при } \omega = \omega_1. \end{aligned}$$

Эти условия выполняются, если

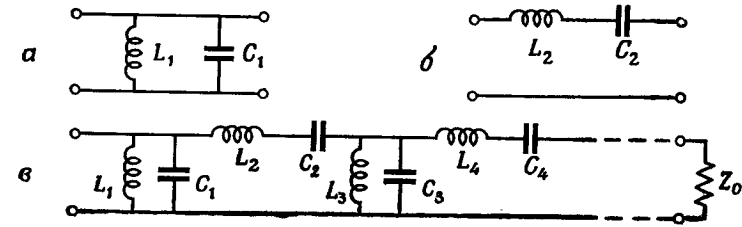
$$x = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\Delta\omega}. \quad (6.7.1)$$

Входное полное сопротивление полосового фильтра равно

$$Z_{\Pi} = \frac{1}{j \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\Delta\omega} \right) \frac{g_1}{Z_0} + \frac{1}{j \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\Delta\omega} \right) Z_0 g_2 + \frac{1}{j \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega\Delta\omega} \right) \frac{g_3}{Z_0} + \dots}}. \quad (6.7.2)$$

¹⁾ См. примечание на стр. 249

Рассмотрим нечетные (параллельные) элементы. Выражение $j[(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega\Delta\omega] g_1/Z_0$ представляет собой полную проводимость



Ф и г. 6.7.1. Полосовой фильтр.

параллельного контура L_1C_1 , показанного на фиг. 6.7.1, а,

$$Y_1 = j \left(C_1\omega - \frac{1}{L_1\omega} \right) = j \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega/C_1} \right) \quad (6.7.3)$$

при условии, что

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{g_1}{\Delta\omega Z_0}, \\ L_1 &= \frac{1}{\omega_0^2 C_1}. \end{aligned} \quad (6.7.3')$$

Для последовательных (четных) элементов выражение $j[(\omega^2 - \omega_0^2)/\omega\Delta\omega] Z_0 g_2$ представляет собой сопротивление последовательного контура L_2C_2 , показанного на фиг. 6.7.1, б,

$$Z_2 = j \left(L_2\omega - \frac{1}{C_2\omega} \right) = j \left(\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega/L_2} \right) \quad (6.7.4)$$

при условии, что

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{g_2}{\Delta\omega} Z_0, \\ C_2 &= \frac{1}{\omega_0^2 L_2}. \end{aligned} \quad (6.7.4')$$

Но в § 6.4 было показано, что нагруженной добротности Q_n пропорциональны нормированная емкость для нечетных ветвей и нормированная индуктивность для четных ветвей. Следовательно, представленную на фиг. 6.7.1, в схему можно реализовать в виде системы резонаторов с четвертьволновой связью при условии, что нагруженная добротность каждого отдельного резонатора удовлетворяет следующим требованиям:

$$\left. \begin{aligned} \text{для } k_{\text{неч}} & \quad \bar{C}_k = C_k Z_0 \\ \text{для } k_{\text{четн}} & \quad \bar{L}_k = \frac{L_k}{Z_0} \end{aligned} \right\} = \frac{g_k}{\Delta\omega} = \frac{2Q_{nk}}{\omega_0},$$

или

$$Q_{nk} = \frac{1}{2} g_k \frac{\omega_0}{\Delta\omega}. \quad (6.7.5)$$

Следует еще раз подчеркнуть, что величина Q_{nk} относится к k -му резонатору, а $\Delta\omega$ уже определена как результирующая полоса пропускания всей системы (между граничными частотами, в которых затухание равно 3 дБ для фильтров Баттерворса и A_{cm} дБ для фильтров Чебышева).

1. *Высокودобротные резонансные системы.* Если добротности Q_{nk} велики и $n = 1^1$, то можно воспользоваться приближенным уравнением (5.9.7')

$$Q_{nk} \approx \frac{\pi}{4} \bar{b}_{ek}^2 \left(\frac{\lambda_{B0}}{\lambda_0} \right)^2.$$

Таким образом, приравнявая выражения (6.7.5) и (5.9.7'), можно найти \bar{b}_{ek} для k -го резонатора

$$\bar{b}_{ek} = \pm \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{B0}} \right) \sqrt{\frac{2}{\pi} g_k \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.7.6)$$

Для полосковых резонаторов с емкостной связью можно воспользоваться уравнением (5.10.6), которое в приближенной форме записывается так:

$$\bar{x}_{ek} = - \sqrt{\frac{2}{\pi} g_k \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}. \quad (6.7.6')$$

При непосредственной связи можно пользоваться соотношением (XVII.7')

$$\begin{aligned} \bar{b}_{ek, k+1} &= \bar{b}_{ek} \bar{b}_{ek+1} = \\ &= \pm \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{B0}} \right)^2 \frac{2\omega_0}{\pi \Delta\omega} \sqrt{g_k g_{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (6.7.7)$$

где $\bar{b}_{ek, k+1}$ — реактивная проводимость неоднородности, связывающей k - и $(k+1)$ -й резонаторы. Отметим, в частности, что, согласно уравнению (6.7.6), $\bar{b}_{e0, 1} = \bar{b}_1$ и $\bar{b}_{en, n+1} = \bar{b}_{en}$, так как «концевые» неоднородности должны остаться неизменными.

Аналогичным образом для полосковых резонаторов с емкостной связью получим

$$\bar{x}_{ek, k+1} = - \bar{x}_{ek} \bar{x}_{ek+1} = - \frac{2\omega_0}{\pi \Delta\omega} \sqrt{g_k g_{k+1}}. \quad (6.7.7')$$

¹⁾ Число n , обозначающее количество резонаторов фильтра, не имеет ничего общего с n , обозначающим число полуволи для отдельного резонатора. Это традиционное обозначение относится не только к этим двум, но и ко многим другим величинам. Но в уравнении (5.9.7') n обычно равно 1 по причине, указанной в примечании на стр. 284.

Выражения (6.7.6) и (6.7.7) можно применять к волноводным или коаксиальным резонаторам, а выражения (6.7.6') и (6.7.7') — к коаксиальным и полосковым резонаторам. Заметим, что, во всяком случае, при четвертьволновой связи длина каждого резонатора равна

$$l = \frac{\lambda_{B0}}{2\pi} \left(n\pi + \operatorname{arctg} \frac{2}{\bar{b}_e} \right), \quad (6.7.8)$$

где \bar{b}_e — обычно отрицательная величина (индуктивная связь).

При непосредственной связи расстояние между неоднородностями $\bar{b}_{k, k+1}$ и $\bar{b}_{ek+1, k+2}$ определяется соотношениями, изложенными в § 5.9, и равно

$$l = \frac{\lambda_{B0}}{2\pi} \left(n\pi + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{\bar{b}_{ek, k+1}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{\bar{b}_{ek+1, k+2}} \right). \quad (6.7.9)$$

2. *Низкодобротные резонансные системы.* К этому случаю следует отнести не только системы с малым отношением $\omega_0/\Delta\omega$, но и системы, в которых при большой величине $\omega_0/\Delta\omega$ число элементов n велико [параметры g_1, g_2, \dots в уравнениях (6.5.12) и (6.5.14) достаточно малы]. Заметим, однако, что при больших значениях отношения $\omega_0/\Delta\omega$ полоса частот, в которой фактически используется низкодобротный резонатор, составляет небольшую часть его полосы пропускания.

Если отношение $\omega_0/\Delta\omega$ мало, то в уравнение (5.9.23') вместо величины $(\omega_0/\Delta\omega)/(\lambda_0/\lambda_{B0})^2$ можно подставить $(\lambda_{B1} + \lambda_{B2})/2(\lambda_{B1} - \lambda_{B2})$ (см. примечание на стр. 282). В результате получим

$$Q_{nk} \approx \frac{\pi}{4} |\bar{b}_{ek}| \left(\frac{\lambda_{B0}}{\lambda_0} \right)^2. \quad (6.7.10)$$

Длины волн λ_{B1} и λ_{B2} соответствуют границам полосы пропускания $\Delta\omega$.

Значение \bar{b}_{ek} определяется соотношением

$$\bar{b}_{ek} = \frac{g_k}{\pi} \left[\frac{\lambda_{B1} + \lambda_{B2}}{\lambda_{B1} - \lambda_{B2}} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (6.7.11)$$

Для аналогичного фильтра с непосредственными связями можно применить уравнение (XVII.7''), которое приводит к соотношению

$$\bar{b}_{ek, k+1} \approx \bar{b}_{ek} + \bar{b}_{ek+1} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\lambda_{B1} + \lambda_{B2}}{\lambda_{B1} - \lambda_{B2}} \right] (g_k + g_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (6.7.12)$$

Следует еще раз особо подчеркнуть, что выражения (6.7.10) — (6.7.12) носят весьма приближенный характер. Их справедливость в какой-то мере подтверждается поведением в предельном

случае, когда при параметрах g , выбранных по Баттерворсу, закон изменения \bar{b}_e (а следовательно, Γ)¹⁾ соответствует биномиальному распределению (по крайней мере для системы, в которой содержится не более четырех элементов). При большем числе резонаторов эта закономерность нарушается в той же мере, в какой распределение параметров g отличается от биномиального. Если бы в предельном случае изложенный выше расчет был абсолютно правильным и все выведенные соотношения были точными, то фильтры с очень широкой полосой и устройства для широкополосного согласования (§ 4.1) рассчитывались бы по одним и тем же уравнениям.

3. *Формулы Кона для систем с непосредственной связью* [27]. Формулы Кона применяются как для узкополосных, так и для широкополосных (до 20%) фильтров и дают результаты, отлично подтверждающиеся экспериментом. Значение $\bar{b}_{ek, k+1}$ определяется выражением

$$|\bar{b}_{ek, k+1}| = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\lambda_{B1} + \lambda_{B2}}{\lambda_{B1} - \lambda_{B2}} \right] \sqrt{g_k g_{k+1}} - \frac{1}{\frac{1}{\pi} \left[\frac{\lambda_{B1} + \lambda_{B2}}{\lambda_{B1} - \lambda_{B2}} \right] \sqrt{g_k g_{k+1}}}. \quad (6.7.13)$$

Для величины $\bar{x}_{ek, k+1}$ существует аналогичное выражение (последовательная непосредственная связь). По своей форме выражение (6.7.13) отличается от уравнений (6.6.7) и (6.7.12), так как оно выводилось иначе и при других упрощающих предположениях. Однако для $|\bar{b}_{ek, k+1}| \gg 3$ вторым слагаемым в выражении (6.7.13) можно пренебречь, допуская при этом ошибку, не превышающую 10%. Полученное соотношение теперь совпадает с уравнением (6.7.7), если в последнее вместо $(\omega_0/\Delta\omega)/(\lambda_0/\lambda_{B0})^2$ подставить $(\lambda_{B1} + \lambda_{B2})/2(\lambda_{B1} - \lambda_{B2})$.

в. *Заграждающие фильтры.* Для заграждающих фильтров с полосой непрозрачности $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ величину x необходимо выразить таким образом, чтобы

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \infty && \text{при } \omega = \omega_0 = \sqrt{\omega_1 \omega_2}, \\ x &= 1 && \text{при } \omega = \omega_1, \\ x &= -1 && \text{при } \omega = \omega_2. \end{aligned}$$

1) В предельном случае, когда $|\bar{b}_e|$ очень мало, длина резонатора бесконечно близка к $\lambda_{B0}/4$ для любых значений \bar{b}_e [уравнение (6.7.8)]. При этом коэффициент отражения $|\Gamma|$, соответствующий данному значению \bar{b}_e , равен просто величине $|\bar{b}_e|/2$, а результирующий коэффициент отражения определяется путем суммирования отдельных отражений по уравнению (4.1.5).

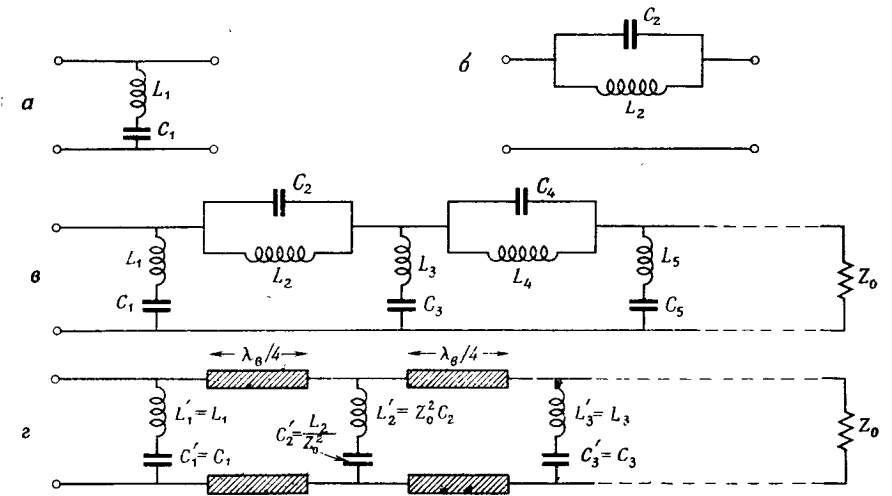
Эти условия выполняются, если

$$x = \frac{\omega(\omega_1 - \omega_2)}{\omega^2 - \omega_0^2} = \frac{-\omega\Delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \quad (6.7.14)$$

Входное полное сопротивление заграждающего фильтра равно

$$Z_3 = \frac{1}{-j \left(\frac{\omega\Delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \frac{g_1}{Z_0} + \frac{1}{-j \left(\frac{\omega\Delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) Z_0 g_2 + \frac{1}{-j \left(\frac{\omega\Delta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \frac{g_3}{Z_0} + \dots}}. \quad (6.7.15)$$

Рассмотрим параллельные (нечетные) элементы. Выражение $-j(\omega\Delta\omega/\omega^2 - \omega_0^2)g_1/Z_0$ представляет собой полную проводимость



Ф и г. 6.7.2. Заграждающий фильтр.

последовательного контура $L_1 C_1$, подключенного параллельно линии (фиг. 6.7.2, а), т. е.

$$Y_1 = -j \frac{1}{L_1 \omega - \frac{1}{C_1 \omega}} = -j \left(\frac{\omega/L_1}{\omega^2 - \omega_0^2} \right) \quad (6.7.16)$$

при условии, что

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{Z_0}{g_1 \Delta\omega}, \\ C_1 &= \frac{1}{\omega_0^2 L_1}. \end{aligned} \quad (6.7.17)$$

Для последовательных (четных) элементов выражение $-j[\omega\Delta\omega/(\omega^2 - \omega_0^2)]Z_0g_2$ представляет собой полное сопротивление параллельного контура L_2C_2 , включенного в линию последовательно (фиг. 6.6.2, б), т. е.

$$Z_2 = \frac{1}{i\left(\omega C_2 - \frac{1}{L_2\omega}\right)} = -j\frac{\omega/C_2}{\omega^2 - \omega_0^2} \quad (6.7.18)$$

при условии, что

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{1}{g_2 Z_0 \Delta\omega}, \\ L_2 &= \frac{1}{\omega_0^2 C_2}. \end{aligned} \quad (6.7.19)$$

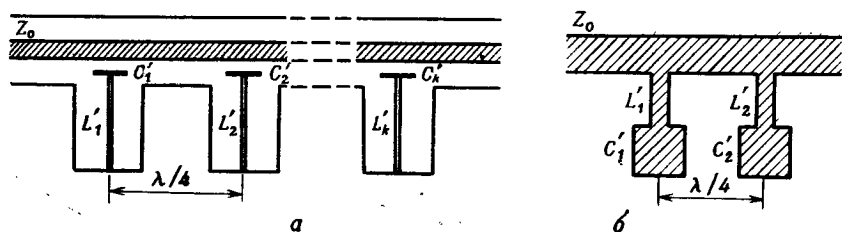
В свою очередь схема, изображенная на фиг. 6.7.2, г, эквивалентна схеме, показанной на фиг. 6.7.2, в, где теперь

$$\begin{aligned} L'_k &= \frac{Z_0}{g_k \Delta\omega}, \\ C'_k &= \frac{1}{\omega_0^2 L_k}. \end{aligned} \quad (6.7.20)$$

Нормировка этих величин дает

$$\begin{aligned} \bar{L}'_k &= \frac{1}{g_k \Delta\omega}, \\ \bar{C}'_k &= \frac{1}{\omega_0^2 L_k}. \end{aligned} \quad (6.7.21)$$

Если практическая реализация схемы на фиг. 6.7.2, г осуществляется с помощью коаксиальных линий, то в качестве

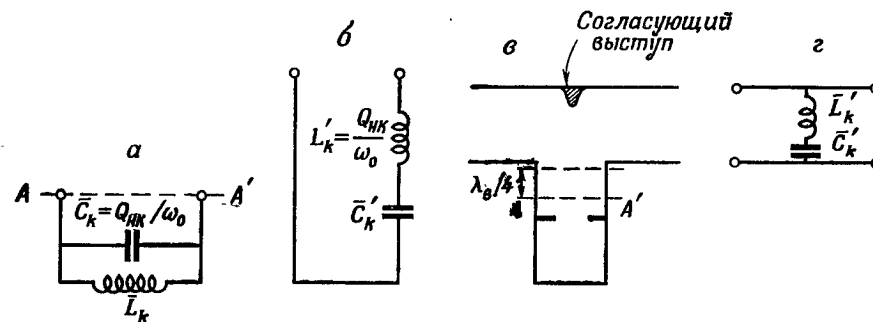


Фиг. 6.7.3. Реализация заграждающего фильтра на коаксиальных и полосковых линиях.

параллельных ветвей можно использовать короткие короткозамкнутые шлейфы с большим характеристическим сопротивлением, связь которых с основной линией носит емкостный характер. Другой вариант, очень подходящий при использовании полосковых

линий, заключается в замене конденсаторов короткими разомкнутыми на конце шлейфами с малым характеристическим сопротивлением, а индуктивностей — короткими шлейфами с большим характеристическим сопротивлением [см. уравнения (6.6.5) и (6.6.6)]. Устройство таких фильтров показано на фиг. 6.7.3.

В случае волноводов реализацию указанной схемы можно осуществить комбинацией H - и E -тройников, резонаторов, работающих на отражение, и отрезков волноводов, длина которых равна $\lambda/4$



Фиг. 6.7.4. Параллельное включение последовательного контура.

или $\lambda/4$ длины волны. Резонаторы, работающие на отражение, должны иметь очень малые собственные потери, т. е. $Q_{вн} \ll Q_0$. В этом случае эквивалентная схема резонатора (для плоскости минимума при расстройке) имеет вид, показанный на фиг. 6.7.4, а, где, согласно уравнению (5.4.23),

$$\bar{C}_k = \frac{Q_{нк}}{\omega_0}, \quad (6.7.22)$$

так как $Q_n = Q_{вн}$. Если сместиться на четверть длины волны, то эквивалентная схема резонатора принимает вид, показанный на фиг. 6.7.4, б, где величина \bar{L}'_k связана с $Q_{нк}$ соотношением

$$\bar{L}'_k = \bar{C}_k = \frac{Q_{нк}}{\omega_0}. \quad (6.7.23)$$

Использование вырожденного Y -тройника в плоскости H (§ 3.4), плоскость включения которого отстоит на четверть длины волны от плоскости эффективного короткого замыкания резонатора, позволяет реализовать схему, где замещающие резонатор элементы включены параллельно линии (фиг. 6.7.4, в и г).

Последовательные (четные) элементы схемы могут быть синтезированы с помощью вырожденных Y -тройников в плоскости E (§ 3.6), у которых плоскость включения бокового плеча совпадает с плоскостью эффективного короткого замыкания AA' . Однако

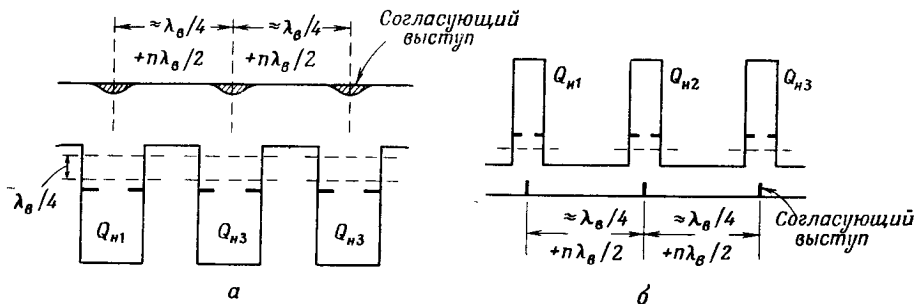
последовательные элементы можно синтезировать и с помощью H -тройников, разделенных четвертьволновыми отрезками волновода (фиг. 6.7.2, б). Итак, объединив уравнения (6.7.21) и (6.7.23), получим следующие расчетные соотношения¹⁾:

$$\bar{L}'_h = \frac{1}{g_h \Delta \omega} = \frac{Q_{nh}}{\omega_0}, \quad (6.7.24)$$

т. е.

$$Q_{nh} = \frac{\omega_0}{g_h \Delta \omega}. \quad (6.7.24')$$

Действуя по тому же шаблону, можно синтезировать заграждающие фильтры с помощью только E -тройников, разделенных отрез-



Ф и г. 6.7.5. Разновидности волноводных заграждающих фильтров.

ками, длина которых кратна нечетному числу четвертей длины волны. Расчетные соотношения записываются следующим образом²⁾:

$$\bar{C}_k = \frac{Q_{nh}}{\omega_0} = \frac{1}{g_h \Delta \omega}, \quad (6.7.25)$$

$$Q_{nh} = \frac{\omega_0}{g_h \Delta \omega}. \quad (6.7.25')$$

Волноводные заграждающие фильтры должны использоваться в сравнительно узком диапазоне частот, так как длина четвертьволновых отрезков, полагавшаяся постоянной, на самом деле зависит от частоты.

Другие системы, в которых применяются гибридные соединения, полосовые фильтры и резонансные неоднородности, рассмотрены в гл. 8, § 8.5.

¹⁾ Эти соотношения соответствуют «идеальному» параллельному тройнику [уравнение (3.4.37)]. На практике боковое плечо согласовывают [уравнение (3.4.30'')]. Уравнение (6.7.24') принимает вид $Q_{nh} = 2\omega_0/g_h \Delta \omega$.

²⁾ Эти соотношения соответствуют «идеальному» последовательному тройнику [уравнение (3.6.27)]. На практике удобнее иметь согласованное плечо β , но уравнение (6.7.25') принимает вид $Q_{nh} = 2\omega_0/g_h \Delta \omega$.

Периодические системы

§ 7.0. ВВЕДЕНИЕ

Периодические замедляющие системы являются неотъемлемой частью магнетронов, ламп бегущей и обратной волн и т. д. Для этих приборов значительный интерес представляют как распределение поля в замедляющей системе, так и свойства ее как электрической цепи. Кроме того, периодические системы применяются в параметрических усилителях, в пассивных СВЧ-линиях задержки и в антенной технике.

Практически все основные свойства периодических систем могут быть получены из теоремы Флоке, утверждающей, что распределение поля в любой бесконечной периодической линии должно периодически повторяться в силу периодичности граничных условий. Следовательно, поля в соседних ячейках могут отличаться лишь по амплитуде и по фазе, причем фаза поля в каждой ячейке определяется начальными условиями на открытых границах этой ячейки.

В настоящей главе кратко рассматривается распределение полей с точки зрения представления их в виде суммы пространственных гармоник (гармоник Хартри). Рассмотрение полей в виде суммы пространственных гармоник в противоположность определению параметров линии через коэффициенты отражения очень похоже на анализ Фурье-сигналов, периодических во времени. При таком представлении можно выделить любую гармонику поля, с которой взаимодействует электронный пучок или которая интересна по другим причинам. Этому своеобразному методу посвящен § 7.1. Основное внимание уделяется эквивалентным схемам периодических систем. Изложение ведется в том же плане, как и ранее в § 1.2 и § 1.3, где постоянная распространения и характеристическое сопротивление определяются сначала для передающей линии бесконечной длины, а уже затем вводятся понятия коэффициента отражения и сопротивления и рассматриваются зависимости этих величин от координаты z для линии конечной длины. В известном смысле гладкий или «полюй» волновод может быть рассмотрен как частный случай периодической системы.

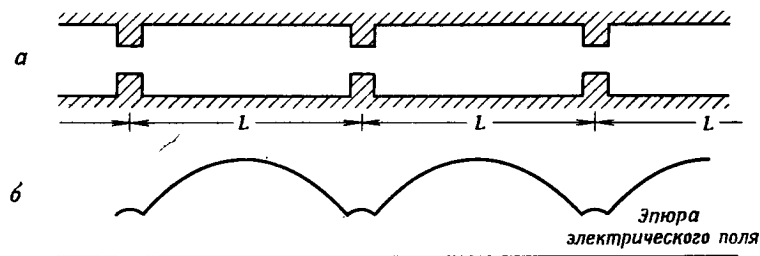
В § 7.5 исследуются свойства «фильтра» из ограниченного числа одинаковых ячеек и рассматриваются условия, при которых

такой фильтр является «прозрачным». В § 7.6 рассматриваются свойства систем, состоящих из нескольких одинаковых ячеек и двух полужеек на концах, и сравниваются свойства этих систем с фильтрами, созданными на основе распределений Баттерворса и Чебышева. Такие системы находят применение не только в качестве фильтров, но и для создания дифференциальных фазовращателей.

Таким образом, исследование периодических систем открывает новый подход к проблемам широкополосного согласования (§ 4.1) и фильтров с непосредственной связью (§ 6.2 и 6.3). Рассмотрение соответствующей исходной модели фильтра нижних частот дополняется приложением XVIII.

§ 7.1. ТЕОРЕМА ФЛОКЕ

Предположим, что передающая линия имеет вид, показанный на фиг. 7.1.1, а. Через L обозначен пространственный период



Ф и г. 7.1.1. Периодическая замедляющая система и возможное распределение электрического поля в ней.

линии, т. е. расстояние между соседними неоднородностями. Передающая линия не ограничена в обоих направлениях. На фиг. 7.1.1, б показано предполагаемое распределение поперечного электрического поля. В каждой последующей ячейке передающей линии картина стоячей волны электрического поля будет повторяться с точностью до коэффициента затухания, а фаза в каждой соответствующей точке будет отличаться на постоянную величину, так как распределение поля в ячейках одинаково из-за идентичности граничных условий (в двух соседних ячейках могут быть различны только амплитуды поля и фазы на открытых границах ячеек).

То же самое справедливо для всех других составляющих поля, которые впредь будут называться «волновыми функциями». Эти соображения обобщены в следующей теореме Флоке:

«На данном типе волны и на данной частоте в стационарном режиме волновая функция $w(z+L)$ в точке с координатой $(z+L)$

равна волновой функции $w(z)$ ¹⁾ в точке с координатой z , умноженной на комплексную постоянную».

Если в точке с координатой z волновая функция равна $w(z)$, то в точке с координатой $(z+L)$ волновая функция может быть представлена в виде

$$w(z+L) = w(z) e^{-j\gamma_0 L}, \quad (7.1.1)$$

где $j\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0$ — комплексная постоянная.

Например, пусть поперечное электрическое поле в пределах ячейки определяется соотношением

$$w(z) = E(z) = E_0^+ e^{j(\omega t - \gamma_e z)} f(z), \quad (7.1.2)$$

где γ_e — постоянная распространения в волноводе без неоднородностей. Функция $f(z)$ представляется в виде

$$f(z) = 1 + \Gamma(z).$$

Модуль этой функции определяет картину стоячей волны, причем $\Gamma(z)$ есть коэффициент отражения в точке с координатой z [см. уравнение (1.3.7)]. Величина $\Gamma(z)$ учитывает отражения от всех неоднородностей справа от точки с координатой z и, следовательно, постоянна по модулю вдоль оси z только в «гладкой» области.

В сечении с координатой $(z+L)$ волновая функция $E(z+L)$ имеет следующий вид:

$$E(z+L) = E_0^+ e^{j(\omega t - \gamma_e(z+L) - \varphi)} [1 + \Gamma(z+L)], \quad (7.1.3)$$

где φ есть фазовый сдвиг, обусловленный неоднородностью. По теореме Флоке

$$\Gamma(z+L) = \Gamma(z), \quad (7.1.4)$$

так что

$$E(z+L) = E(z) e^{-j(\gamma_e L + \varphi)} = E(z) e^{-j\gamma_0 L}. \quad (7.1.3')$$

Следовательно,

$$\gamma_0 = \gamma_e + \frac{\varphi}{L}. \quad (7.1.5)$$

Эта величина является постоянной распространения периодически нагруженного волновода.

Волновую функцию $w(z) = E(z)$ можно теперь записать в виде

$$w(z) = E(z) = E_0^+ e^{j(\omega t - \gamma_0 z)} f(z). \quad (7.1.6)$$

Из сравнения уравнений (7.1.2) и (7.1.5) следует, что γ_0 является «усредненным» значением постоянной распространения электромагнитной волны.

¹⁾ Эта волновая функция определяет зависимости полей от поперечных координат таким же неявным образом, как и $E(z)$ [уравнение (1.3.5)] или $v(z)$ [уравнение (1.4.1)].

Полученные соотношения могут быть использованы как для передающих линий, построенных на основе обычных «гладких» волноводов, так и для периодической системы произвольного поперечного сечения.

Функция $f(z)$, которая в случае линии, изображенной на фиг. 7.1.1, определяла картину стоячей волны в гладкой части волновода, может стать очень сложной в пределах пространственного периода структуры, если сама передающая линия сложна. Эта функция может быть теперь рассмотрена как характеристика, периодически модулирующая функцию $E_0^+ e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}$ по амплитуде и фазе. Естественно представить функцию $f(z)$ в виде суммы гармоник Фурье, названных при рассмотрении данных задач гармониками Хартри,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j \frac{2\pi n z}{L}}, \quad (7.1.7)$$

где

$$a_n = \frac{1}{L} \int_z^{z+L} f(z) e^{j \frac{2\pi n z}{L}} dz, \quad n = 0, \quad 1, 2, 3, \dots, \\ -1, -2, -3, \dots,$$

так что

$$\omega(z) = E_0^+ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{-j \frac{2\pi n z}{L}} e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}, \quad n = 0, \quad 1, 2, 3, \dots, \\ -1, -2, -3, \dots \quad (7.1.8)$$

Для n -й гармоники Хартри можно записать

$$E_0^+ a_n e^{-j \frac{\pi n z}{L}} e^{j(\omega t - \gamma_0 z)} = E_0^+ a_n e^{j(\omega t - \gamma_n z)}, \quad (7.1.9)$$

где

$$\gamma_n = \gamma_0 + \frac{2\pi n}{L}. \quad (7.1.10)$$

Нулевая гармоника a_0 называется основной гармоникой и характеризует падающую бегущую волну. Ей соответствует постоянная распространения γ_0 , которая обычно положительна и по величине меньше всех других γ_n [заметим, что все γ_n удовлетворяют уравнению (7.1.3)]. С другой стороны, нулевая гармоника a_0 была бы равна функции $\omega(z)$, если множитель $f(z)$ равнялся единице.

Рассмотрим подробнее выражение

$$j\gamma_0 = \alpha_0 + j\beta_0. \quad (7.1.11)$$

Остановимся на следующих трех случаях:

1. Если $\beta_0 = 0$, то все гармоники Хартри затухают от ячейки к ячейке. Основная гармоника не претерпевает фазового сдвига

при переходе к следующей ячейке, однако гармоники более высоких порядков имеют фазовый сдвиг [уравнения (7.1.9) и (7.1.10)].

2. Если $\alpha_0 = 0$, то все гармоники распространяются без затухания.

3. Если $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 \neq 0$, то имеет место распространение гармоник и одновременно рассеяние мощности СВЧ. Однако если периодическая система не имеет потерь, то коэффициент γ_0 может быть либо чисто действительным, либо чисто мнимым, как и в случае простых волноводов.

Положим, что передающая линия не имеет потерь, так что

$$\gamma_0 = \beta_0, \quad (7.1.12)$$

где β_0 — действительное число. Уравнение (7.1.10) принимает вид

$$\beta_n = \beta_0 + \frac{2\pi n}{L}. \quad (7.1.10')$$

Таким образом, n -ю гармонику Хартри можно рассматривать как волну с фазовой постоянной β_n , связанной с β_0 уравнением (7.1.10'). Если n — отрицательное число, то фазовая постоянная также отрицательна. Заметим, что случай $\beta_n \neq \beta_0$ представляет интерес, когда рассматривают поведение волны только в пределах ячейки. Фазовый сдвиг для всех гармоник Хартри при переходе от фиксированного положения в одной ячейке к такому же положению в соседней ячейке равен $\beta_0 L$.

Длина волны n -й гармоники записывается так:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{|\beta_n|} = \frac{2\pi}{\beta_0 + \frac{2\pi n}{L}}, \quad (7.1.13)$$

а ее фазовая скорость определяется из выражения

$$v_{\phi n} = \frac{\omega}{\beta_n} = \frac{\omega}{\beta_0 + \frac{2\pi n}{L}}. \quad (7.1.14)$$

Таким образом, как λ_n , так и $v_{\phi n}$ уменьшаются с увеличением номера гармоники n . Кроме того, $v_{\phi n}$ отрицательна, если n — отрицательное число.

Групповая скорость равна

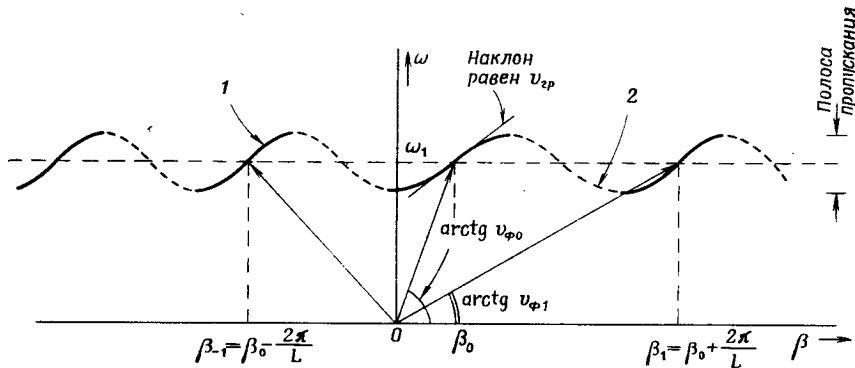
$$v_{gp n} = \frac{d\omega}{d\beta_n} = \frac{d\omega}{d\beta_0} \frac{d\beta_0}{d\beta_n} = \frac{d\omega}{d\beta_0}, \quad (7.1.15)$$

поскольку $d\beta_0/d\beta_n = 1$ из уравнения (7.1.10'). Итак, на данной частоте все гармоники Хартри имеют одну и ту же групповую скорость.

На фиг. 7.1.2 показана типичная $\omega - \beta$ -диаграмма. Некоторый диапазон изменения частоты ω соответствует полосе пропускания

($\beta_0 \neq 0$). Пусть рабочая частота равна ω_1 . Первая точка пересечения линии $\omega = \omega_1$ с правой частью кривой $\omega = f(\beta)$ соответствует основной гармонике, имеющей фазовую постоянную β_0 . Фазовая скорость равна $v_{\phi 0} = \omega_1/\beta_0$, тогда как групповая скорость $v_{гр}$ равна тангенсу угла наклона касательной к кривой в точке ее пересечения с линией $\omega = \omega_1$.

Часть кривой сразу же слева от оси ω не имеет физического смысла, но приобретает реальность, если энергия передается



Ф и г. 7.1.2. Типичная $\omega - \beta$ -диаграмма.

1 — обратная гармоника ($v_{гр} > 0$, $v_{\phi} < 0$); 2 — часть диаграммы, соответствующая сигналу, распространяющемуся в отрицательном направлении.

по линии в отрицательном направлении. Таким образом, диаграмма $\omega - \beta$ симметрична относительно оси ω , если учитывать также фиктивные участки кривой $\omega = f(\beta)$.

Кривая вблизи точки $\beta_1 = \beta_0 + (2\pi/L)$ имеет тот же наклон касательной, что и при β_0 , т. е. первая гармоника имеет групповую скорость, равную групповой скорости основной гармоники. Эта β_1 -ветвь идентична β_0 -ветви. Фазовая скорость здесь $v_{\phi 1} = \omega_1/\beta_1$ меньше $v_{\phi 0}$.

Точка $\beta_{-1} = \beta_0 - (2\pi/L)$ соответствует «обратной гармонике». Она имеет также положительную групповую скорость, как и все другие гармоники, но ее фазовая скорость отрицательная. Заметим, что

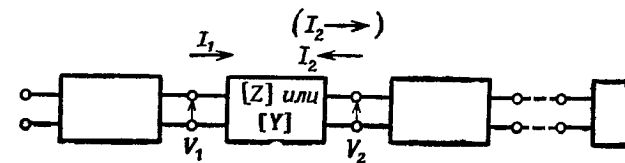
$$|v_{\phi(-1)}| < |v_{\phi 0}|.$$

По диаграмме 7.1.2 можно определить фазовую постоянную любой гармоники для данной структуры. Однако определить амплитуды пространственных гармоник, которые зависят как от геометрии структуры, так и от частоты, по этой диаграмме нельзя. В некото-

рых частных случаях может существовать только одна волна (ненагруженный волновод) или две волны (полностью развязанные резонаторы). Во всех других случаях определение амплитуды пространственных гармоник является очень сложной задачей, связанной с определением распределения поля в структуре.

§ 7.2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА БЕСКОНЕЧНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Рассмотрим случай, когда параметры эквивалентной схемы каждой ячейки периодической системы известны. Иначе говоря, положим, что полевая задача уже решена. Эквивалентная схема бесконечной передающей структуры диапазона СВЧ показана на



Ф и г. 7.2.1. Бесконечная периодическая система с заданными $[Z]$ или $[Y]$.

фиг. 7.2.1. Соотношения между напряжениями и токами определяются с помощью матрицы сопротивления $[Z]$

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2, \\ V_2 &= Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2 \end{aligned} \quad (7.2.1)$$

или матрицы проводимости $[Y]$

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}V_1 + Y_{12}V_2, \\ I_2 &= Y_{21}V_1 + Y_{22}V_2. \end{aligned} \quad (7.2.1')$$

Заметим, что в приведенных формулах фигурируют абсолютные значения напряжений и токов (см. § 1.6). Это упрощает исследование неоднородностей, тем более что не всегда можно провести нормировку.

Как будет показано ниже, удобно изменить направление тока I_2 так, чтобы все токи были направлены вправо. Тогда выходной ток и выходное напряжение одной ячейки становятся входным током и входным напряжением следующей ячейки (матрица $ABCD$, приложение XI). Если среда изотропна, то $Z_{12} = Z_{21}$ и $Y_{12} = Y_{21}$,

и уравнения (7.2.1) и (7.2.1') для n -й ячейки будут иметь вид

$$V_n = Z_{11}I_n - Z_{12}I_{n+1}, \quad (7.2.2)$$

$$V_{n+1} = Z_{12}I_n - Z_{22}I_{n+1}.$$

$$I_n = Y_{11}V_n + Y_{12}V_{n+1}, \quad (7.2.2')$$

$$I_{n+1} = -(Y_{12}V_n + Y_{22}V_{n+1}).$$

В соответствии с теоремой Флоке

$$V_n = V_0 e^{-j\gamma n L}, \quad (7.2.3)$$

$$I_n = I_0 e^{-j\gamma n L}.$$

Так как уравнения (7.2.3) связывают токи и напряжения в одинаковых сечениях двух соседних ячеек, то $\gamma = \gamma_0$, т. е. можно рассматривать только постоянную распространения основной гармоники Хартри. Подставив уравнения (7.2.3) в уравнения (7.2.2), получим

$$V_n = V_0 e^{-j\gamma n L} = Z_{11}I_0 e^{-j\gamma n L} - Z_{12}I_0 e^{-j\gamma(n+1)L}, \quad (7.2.4)$$

$$V_{n+1} = V_0 e^{-j\gamma(n+1)L} = Z_{12}I_0 e^{-j\gamma n L} - Z_{22}I_0 e^{-j\gamma(n+1)L}$$

Напряжение V_0 можно найти независимо из любого уравнения (7.2.4). Так, из первого уравнения

$$V_0 = Z_{11}I_0 - Z_{12}I_0 e^{-j\gamma L}, \quad (7.2.5)$$

а из второго уравнения

$$V_0 = Z_{12}I_0 e^{j\gamma L} - Z_{22}I_0. \quad (7.2.6)$$

Из уравнений (7.2.5) и (7.2.6) следует, что

$$Z_{11} - Z_{12}e^{-j\gamma L} = Z_{12}e^{j\gamma L} - Z_{22}$$

или

$$\cos \gamma L = \frac{e^{j\gamma L} + e^{-j\gamma L}}{2} = \frac{Z_{11} + Z_{22}}{2Z_{12}}. \quad (7.2.7)$$

Таким же образом из уравнений (7.2.2') имеем

$$I_n = I_0 e^{-j\gamma n L} = Y_{11}V_0 e^{-j\gamma n L} + Y_{12}V_0 e^{-j\gamma(n+1)L}, \quad (7.2.4')$$

$$I_{n+1} = I_0 e^{-j\gamma(n+1)L} = -Y_{12}V_0 e^{-j\gamma n L} - Y_{22}V_0 e^{-j\gamma(n+1)L}.$$

Из первого уравнения (7.2.4') получаем

$$I_0 = Y_{11}V_0 + Y_{12}V_0 e^{-j\gamma L}, \quad (7.2.5')$$

а из второго уравнения

$$I_0 = -Y_{12}V_0 e^{j\gamma L} - Y_{22}V_0. \quad (7.2.6')$$

Из уравнений (7.2.5') и (7.2.6') получается равенство

$$Y_{11} + Y_{12}e^{-j\gamma L} = -Y_{12}e^{j\gamma L} - Y_{22}$$

или

$$\cos \gamma L = \frac{Y_{11}Y_{22}}{-2Y_{12}}. \quad (7.2.7')$$

Следовательно, уравнения (7.2.7) и (7.2.7') определяют постоянную γ по крайней мере неявно, через элементы матрицы $[Z]$ или $[Y]$.

Для линий без потерь Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} — мнимые величины, так что $\cos \gamma L$ должен быть действительной величиной, если

$$|(Z_{11} + Z_{22})| \leq |2Z_{12}|. \quad (7.2.8)$$

В этом случае $\gamma = \beta$, т. е. волна распространяется без затухания и рабочая точка находится в полосе пропускания.

Однако если неравенство (7.2.8) не выполняется, то $\gamma = -j\alpha$ и точка находится в полосе загира. Уравнения (7.2.7) и (7.2.7') принимают вид

$$\operatorname{ch} \alpha L = \frac{Z_{11} + Z_{22}}{2Z_{12}} = \frac{Y_{11} + Y_{22}}{-2Y_{12}}. \quad (7.2.9)$$

Как величина, так и знак коэффициентов Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} зависят от частоты. Поэтому при изменении частоты наблюдаются чередующиеся полосы пропускания и полосы загира.

Характеристическое сопротивление Z_c можно определить на зажимах любой ячейки как отношение напряжения к току при условии, что линия бесконечна (см. § 1.2), т. е.

$$Z_c = \frac{V_n}{I_n}. \quad (7.2.10)$$

Заметим, что эта величина не имеет смысла внутри ячейки.

Из уравнений (7.2.2) и (7.2.3) можно найти выражение Z_c

$$Z_c = Z_{11} - Z_{12} \frac{I_{n+1}}{I_n} = Z_{11} - Z_{12} e^{-j\gamma L}, \quad (7.2.11)$$

$$Z_c = Z_{12} \frac{I_n}{I_{n+1}} - Z_{22} = Z_{12} e^{j\gamma L} - Z_{22}.$$

Сложив и поделив на 2 правые части равенств, получим выражение для Z_c в симметричной форме

$$Z_c = Z_{12} \left(\frac{e^{j\gamma L} - e^{-j\gamma L}}{2} \right) + \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2}. \quad (7.2.12)$$

Хотя уравнение (7.2.12) справедливо для волн, распространяющихся в любом направлении (с соответствующей сменой знака), однако удобно ввести следующие обозначения: Z_c^+ — для волн, распространяющихся в положительном направлении и Z_c^- — для волн, распространяющихся в отрицательном направлении. В последнем случае γL в уравнении (7.2.12) нужно заменить на $-\gamma L$.

Таким образом, запишем

$$Z_c^+ = jZ_{12} \sin \gamma L + \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2}, \quad (7.2.13)$$

$$Z_c^- = -jZ_{12} \sin \gamma L + \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2}. \quad (7.2.14)$$

Если ячейки симметричны, то $Z_{11} = Z_{22}$. Если ячейки без потерь (Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} — мнимые величины), то

$$Z_c^+ = Z_{c0} + jZ_{c1}, \quad (7.2.15)$$

$$Z_c^- = -Z_{c0} + jZ_{c1}, \quad (7.2.16)$$

где

$$Z_{c0} = jZ_{12} \sin \gamma L, \quad (7.2.17)$$

$$Z_{c1} = \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2j}.$$

Сопротивление Z_{c0} есть действительная величина в полосе пропускания, а Z_{c1} — действительная величина на любой частоте.

В полосе загираия, т. е. при $\gamma = -j\alpha$, величины Z_c^+ и Z_c^- — чисто мнимые, так как $Z_{c0} = Z_{12} \operatorname{sh} \alpha L$.

Из уравнений (7.2.10) и (7.2.3) следует, что напряжение V_n^+ , соответствующее положительной волне, можно выразить через I_0^+ и Z_c^+ , а напряжение V_n^- , соответствующее отрицательной волне — через I_0^- и Z_c^- , т. е.

$$V_n^+ = Z_c^+ I_n^+ = Z_c^+ I_0^+ e^{j(\omega t - \gamma n L)}, \quad (7.2.18)$$

$$V_n^- = Z_c^- I_n^- = Z_c^- I_0^- e^{j(\omega t + \gamma n L)}. \quad (7.2.19)$$

Характеристическую проводимость Y_c линии бесконечной длины можно определить аналогичным образом как отношение тока к напряжению на произвольно выбранных зажимах ячейки. Итак,

$$Y_c = \frac{I_n}{V_n}. \quad (7.2.10')$$

Из уравнений (7.2.2') и (7.2.3) можно записать

$$Y_c = Y_{11} + Y_{12} e^{-j\gamma L} = -Y_{12} e^{j\gamma L} - Y_{22}. \quad (7.2.11')$$

Если сложить правые части равенств и поделить на два, то получится выражение Y_c в симметричной форме

$$Y_c = -Y_{12} \left(\frac{e^{j\gamma L} - e^{-j\gamma L}}{2} \right) + \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2}. \quad (7.2.12')$$

Для волны, распространяющейся в отрицательном направлении, γL заменяется на $-\gamma L$, так что

$$Y_c^+ = -jY_{12} \sin \gamma L + \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2}, \quad (7.2.13')$$

$$Y_c^- = jY_{12} \sin \gamma L + \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2}. \quad (7.2.14')$$

Если ячейки симметричны, то $Y_{11} = Y_{22}$. Если ячейки без потерь, то Y_{11} , Y_{22} и Y_{12} становятся мнимыми величинами, так что

$$Y_c^+ = Y_{c0} + jY_{c1}, \quad (7.2.15')$$

$$Y_c^- = -Y_{c0} + jY_{c1}, \quad (7.2.16')$$

где

$$Y_{c0} = -jY_{12} \sin \gamma L, \quad (7.2.17')$$

$$Y_{c1} = \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2j}.$$

Проводимость Y_{c0} будет действительной величиной, если γ не комплексная (в случае потерь) или мнимая (в полосе загираия) величина. Если $\gamma = -j\alpha$, то $Y_{c0} = -Y_{12} \operatorname{sh} \alpha L$.

Следовательно, в определенных сечениях ячеек периодическая система имеет характеристическое сопротивление (или характеристическую проводимость), аналогичное сопротивлению обычного волновода. В полосе пропускания и при отсутствии активных потерь характеристическое сопротивление линии с симметричными ячейками является действительной величиной и, как в случае обычных волноводов, изменяет знак с изменением направления распространения волны. Если ячейки несимметричны, то характеристическое сопротивление содержит также и мнимую часть, которая не зависит от направления распространения волны. Замечание о знаках относится только к действительному члену.

§ 7.3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Если структура оканчивается зажимами k , к которым подключено сопротивление Z_k , то

$$\frac{V_k}{I_k} = Z_k, \quad (7.3.1)$$

где V_k и I_k равны сумме положительных (падающих) и отрицательных (отраженных) волн, т. е.

$$V_k = V_k^+ + V_k^-, \quad (7.3.2)$$

$$I_k = I_k^+ + I_k^-. \quad (7.3.3)$$

В сечении k коэффициент отражения Γ_k ¹⁾ можно определить таким образом:

$$\Gamma_k = -\frac{I_k^-}{I_k^+} \quad (7.3.4)$$

¹⁾ Не следует смешивать Γ_k с $\Gamma(z)$ из уравнений (7.1.2) и (7.1.3). Величина Γ_k зависит от соотношения Z_k и Z_c [уравнение (7.3.7)] и равна нулю для линий бесконечной длины, а величина $\Gamma(z)$ зависит от соотношения Z_k и Z_0 в гладкой части волновода и, следовательно, отлична от нуля в линии бесконечной длины.

[см. уравнение (1.3.4) для однородного волновода конечной длины]. Из уравнений (7.2.10), (7.3.1) — (7.3.4) получаем

$$V_k = Z_k I_k = V_k^+ + V_k^- = Z_c^+ I_k^+ + Z_c^- I_k^- = Z_c^+ I_k^+ - \Gamma_k Z_c^- I_k^+, \quad (7.3.5)$$

$$I_k = I_k^+ + I_k^- = I_k^+ - \Gamma_k I_k^+. \quad (7.3.6)$$

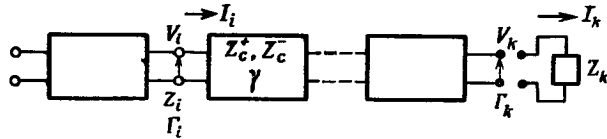
Перепишем уравнение (7.3.5) в виде

$$Z_k = (Z_c^+ - \Gamma_k Z_c^-) \frac{I_k^+}{I_k}, \quad (7.3.5')$$

а уравнение (7.3.6) — в виде

$$\Gamma_k = 1 - \frac{I_k}{I_k^+}. \quad (7.3.6')$$

Исключив из уравнений (7.3.5') и (7.3.6') отношение I_k/I_k^+ , полу-



Ф и г. 7.3.1. Периодическая линия конечной длины.

чим¹⁾ следующие соотношения:

$$\Gamma_k = \frac{Z_k - Z_c^+}{Z_k - Z_c^-}, \quad (7.3.7)$$

$$Z_k = \frac{Z_c^+ - \Gamma_k Z_c^-}{1 - \Gamma_k}. \quad (7.3.8)$$

Подставив уравнения (7.2.13) и (7.2.14) в уравнения (7.3.7) и (7.3.8), получим

$$\Gamma_k = \frac{Z_k - jZ_{12} \sin \gamma L - \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2}}{Z_k + jZ_{12} \sin \gamma L - \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2}} \quad (7.3.7')$$

и

$$Z_k = \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} + jZ_{12} \sin \gamma L \left[\frac{1 + \Gamma_k}{1 - \Gamma_k} \right]. \quad (7.3.8')$$

¹⁾ Ср. с гладким волноводом, где

$$Z_c^+ = Z_0, \quad Z_c^- = -Z_0, \quad (1.3.13')$$

$$\Gamma_k = \frac{Z_k - Z_0}{Z_k + Z_0},$$

$$Z_k = \frac{1 + \Gamma_k}{1 - \Gamma_k} Z_0 = \frac{Z_0 + \Gamma_k Z_0}{1 - \Gamma_k}. \quad (1.3.11')$$

Оконечную нагрузку можно определить через ее проводимость

$$Y_k = \frac{1}{Z_k},$$

а характеристическую проводимость в соответствии с уравнениями (7.2.10) и (7.2.10') можно выразить характеристическое сопротивление

$$Y_c^+ = \frac{1}{Z_c^+},$$

$$Y_c^- = \frac{1}{Z_c^-}.$$

Тогда коэффициент отражения на конце линии Γ_k можно выразить через проводимость нагрузки и характеристическую проводимость линии

$$\Gamma_k = \frac{(1/Y_k) - (1/Y_c^+)}{(1/Y_k) - (1/Y_c^-)} = \frac{1 - Y_k/Y_c^+}{1 - Y_k/Y_c^-} \quad (7.3.7'')$$

и

$$Y_k = \frac{1 - \Gamma_k}{(1/Y_c^+) - (\Gamma_k/Y_c^-)} = \frac{1 - \Gamma_k}{Y_c^- - \Gamma_k Y_c^+} Y_c^+ Y_c^-. \quad (7.3.8'')$$

В плоскости i -зажимов коэффициент отражения Γ_i определяется в виде

$$\Gamma_i = -\frac{I_i^-}{I_i^+}. \quad (7.3.4')$$

В соответствии с теоремой Флоке можно записать

$$\begin{aligned} I_i^+ &= I_k^+ e^{-j(i-k)\gamma L} = I_k^+ e^{j(k-i)\gamma L}, \\ I_i^- &= I_k^- e^{+j(i-k)\gamma L} = I_k^- e^{-j(k-i)\gamma L}, \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

тогда

$$\Gamma_i = -\frac{I_k^- e^{-j(k-i)\gamma L}}{I_k^+ e^{j(k-i)\gamma L}} = \Gamma_k e^{-j2(k-i)\gamma L}. \quad (7.3.10)$$

Это соотношение связывает коэффициент отражения на i -зажимах с коэффициентом отражения на k -зажимах.

Из уравнений (7.3.7), (7.3.8) и (7.3.10) можно получить соотношение, определяющее сопротивление Z_i на зажимах i через сопротивление Z_k на зажимах k ,

$$\begin{aligned} Z_i &= \frac{\Gamma_i Z_c^- - Y_c^+}{\Gamma_i - 1} = \frac{\Gamma_k e^{-2j(k-i)\gamma L} Z_c^- - Z_c^+}{\Gamma_k e^{-2j(k-i)\gamma L} - 1} = \\ &= \frac{Z_c^- (Z_k - Z_c^+) e^{-2j(k-i)\gamma L} - Z_c^+ (Z_k - Z_c^-)}{(Z_k - Z_c^+) e^{-2j(k-i)\gamma L} - (Z_k - Z_c^-)}. \end{aligned} \quad (7.3.11)$$

Выразив Z_c^+ и Z_c^- через Z_{c0} и Z_{c1} , согласно уравнениям (7.2.15) — (7.2.17), получим

$$Z_i = \frac{(-Z_{c0} + jZ_{c1})(Z_k - Z_{c0} - jZ_{c1})e^{-j2(k-i)\gamma L} - (Z_{c0} + jZ_{c1})(Z_k + Z_{c0} - jZ_{c1})}{(Z_k - Z_{c0} - jZ_{c1})e^{-j2(k-i)\gamma L} - (Z_k + Z_{c0} - jZ_{c1})} =$$

$$= jZ_{c1} + Z_{c0} \left[\frac{(Z_k - jZ_{c1}) \cos(k-i)\gamma L + jZ_{c0} \sin(k-i)\gamma L}{j(Z_k - jZ_{c1}) \sin(k-i)\gamma L + Z_{c0} \cos(k-i)\gamma L} \right]. \quad (7.3.12)$$

Теперь можно выразить сопротивление Z_i через сопротивление Z_k и параметры эквивалентной схемы¹⁾

$$Z_i = \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} + Z_{12} \sin \gamma L \times$$

$$\times \left[\frac{\left(Z_k - \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} \right) \cos(k-i)\gamma L - Z_{12} \sin \gamma L \sin(k-i)\gamma L}{\left(Z_k - \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} \right) \sin(k-i)\gamma L + Z_{12} \sin \gamma L \cos(k-i)\gamma L} \right]. \quad (7.3.13)$$

В полосе пропускания периодической системы без активных потерь $\gamma = \beta$. В полосе заграждения $\gamma = -j\alpha$ и

$$\sin \gamma L = -j \operatorname{sh} \alpha L,$$

$$\cos \gamma L = \operatorname{ch} \alpha L.$$

Можно получить выражения для проводимостей, подобные (7.3.11) — (7.3.13). Так, проводимость i -й ячейки представляется в виде

$$Y_i = \frac{Y_c^- (Y_k - Y_c^+) e^{-j2(k-i)\gamma L} - Y_c^+ (Y_k - Y_c^-)}{(Y_k - Y_c^+) e^{-j2(k-i)\gamma L} - (Y_k - Y_c^-)}, \quad (7.3.11')$$

или

$$Y_i = jY_{c1} + Y_{c0} \left[\frac{(Y_k - jY_{c1}) \cos(k-i)\gamma L + jY_{c0} \sin(k-i)\gamma L}{j(Y_k - jY_{c1}) \sin(k-i)\gamma L + Y_{c0} \cos(k-i)\gamma L} \right], \quad (7.3.12')$$

или

$$Y_i = \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2} - Y_{12} \sin \gamma L \times$$

$$\times \left[\frac{\left(Y_k - \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2} \right) \cos(k-i)\gamma L - Y_{12} \sin \gamma L \sin(k-i)\gamma L}{\left(Y_k - \frac{Y_{11} - Y_{22}}{2} \right) \sin(k-i)\gamma L - Y_{12} \sin \gamma L \cos(k-i)\gamma L} \right]. \quad (7.3.13')$$

Отметим, что при $\sin(k-i)\gamma L = 0$, т. е. когда

$$(k-i)\gamma L = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (7.3.14)$$

уравнения (7.3.13) и (7.3.13') упрощаются и принимают вид

$$Z_i = Z_k, \quad (7.3.15)$$

$$Y_i = Y_k. \quad (7.3.16)$$

¹⁾ См. уравнение передающей линии (1.3.19').

Случай $\gamma L = n\pi$, $n = 0, 1, \dots$, следует, однако, исключить из рассмотрения, так как характеристическое сопротивление Z_c становится равным нулю или мнимой величине.

Соотношение (7.3.14) выполняется, если величина $(k-i)L$ равна целому числу полуволн. Отрезок периодической системы такой длины обладает свойствами, аналогичными свойствами отрезка гладкого волновода той же длины. Его можно использовать как линию передачи в полосе пропускания; из него можно образовать резонатор, если создать короткое замыкание на концах или подключить к концам реактивные сопротивления большой величины независимо от величины Z_c^+ (и Z_c^-).

С другой стороны, при $Z_c^+ = Z_0$ рассматриваемая структура «прозрачна» независимо от числа ячеек (§ 7.6). Это возможно только в случае, когда каждая ячейка симметрична ($Z_{11} = Z_{22}$).

В случае произвольной частоты, когда соотношение (7.3.14) не выполняется, коэффициент отражения можно подсчитать по уравнению (7.3.7). Периодическую систему можно рассматривать как фильтр, параметры которого нетрудно рассчитать. Основным достоинством такого фильтра с одинаковыми ячейками является простота, однако он не имеет ни максимально плоской характеристики, как у фильтра Баттерворса, ни приближения к ступенчатой характеристике, как у фильтра Чебышева.

§ 7.4. МАТРИЦА СОПРОТИВЛЕНИЙ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ НЕСКОЛЬКИХ ИДЕНТИЧНЫХ ЯЧЕЕК

Уравнение (7.3.13) связывает сопротивление Z_i на i -зажимах с сопротивлением Z_k на k -зажимах и элементы матрицы сопротивлений Z_{11} , Z_{22} , Z_{12} . Если $k = i + 1$, то

$$Z_i = \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} + Z_{12} \sin \gamma L \times$$

$$\times \left[\frac{\left(Z_{i+1} - \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} \right) \cos \gamma L - Z_{12} \sin^2 \gamma L}{\left(Z_{i+1} - \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} \right) \sin \gamma L + Z_{12} \sin \gamma L \cos \gamma L} \right]. \quad (7.4.1)$$

Из уравнения (7.3.12) в свою очередь следует, что

$$Z_i = jZ_{c1} + Z_{c0} \left[\frac{(Z_{i+1} - jZ_{c1}) \cos \gamma L + jZ_{c0} \sin \gamma L}{j(Z_{i+1} - jZ_{c1}) \sin \gamma L + Z_{c0} \cos \gamma L} \right]. \quad (7.4.2)$$

Это выражение полезно привести к следующему виду:

$$Z_i = \frac{jZ_{c1}[j(Z_{i+1} - jZ_{c1}) \sin \gamma L + Z_{c0} \cos \gamma L] + Z_{c0}[(Z_{i+1} - jZ_{c1}) \cos \gamma L + jZ_{c0} \sin \gamma L]}{j(Z_{i+1} - jZ_{c1}) \sin \gamma L + Z_{c0} \cos \gamma L} =$$

$$= \frac{Z_{i+1}j(Z_{c1} - Z_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L) + Z_{c0}^2 + Z_{c1}^2}{Z_{i+1} - j(Z_{c1} + Z_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L)}. \quad (7.4.3)$$

С другой стороны, с помощью уравнений

$$\begin{aligned} V_i &= Z_{11}I_i - Z_{12}I_{i+1}, \\ V_{i+1} &= Z_{12}I_i - Z_{22}I_{i+1} \end{aligned} \quad (7.2.2)$$

можно найти Z_i (из первого уравнения)

$$Z_i = \frac{V_i}{I_i} = Z_{11} - Z_{12} \frac{I_{i+1}}{I_i} \quad (7.4.4)$$

и Z_{i+1} (из второго уравнения)

$$Z_{i+1} = \frac{V_{i+1}}{I_{i+1}} = Z_{12} \frac{I_i}{I_{i+1}} - Z_{22}. \quad (7.4.5)$$

Кроме того, из этих двух уравнений можно исключить отношение

$$\frac{I_i}{I_{i+1}} = \frac{Z_{22} + Z_{i+1}}{Z_{12}};$$

тогда получим

$$Z_i = Z_{11} - Z_{12} \left[\frac{Z_{12}}{Z_{22} + Z_{i+1}} \right] = \frac{Z_{i+1}(Z_{11}) + (Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2)}{Z_{i+1} + Z_{22}}. \quad (7.4.6)$$

Сравнивая уравнения (7.4.3) и (7.4.6), находим

$$Z_{11} = j[Z_{c1} - Z_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L], \quad (7.4.7)$$

$$Z_{22} = -j[Z_{c1} + Z_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L], \quad (7.4.8)$$

$$Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2 = Z_{c0}^2 + Z_{c1}^2. \quad (7.4.9)$$

Подстановка уравнений (7.4.7) и (7.4.8) в уравнение (7.4.9) дает

$$\begin{aligned} Z_{12}^2 &= Z_{11}Z_{22} - Z_{c0}^2 - Z_{c1}^2 = -Z_{c0}^2(1 + \operatorname{ctg}^2 \gamma L) = \\ &= -Z_{c0}^2 \operatorname{cosec}^2 \gamma L \end{aligned} \quad (7.4.9')$$

или

$$Z_{12} = -jZ_{c0} \operatorname{cosec} \gamma L. \quad (7.4.10)$$

В выражении (7.4.10) выбран знак «-», поскольку

$$Z_{c0} = jZ_{12} \sin \gamma L. \quad (7.2.17)$$

Таким образом, все элементы матрицы сопротивлений одной ячейки Z_{11} , Z_{22} , Z_{12} могут быть определены через характеристические сопротивления периодической системы:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= j[Z_{c1} - Z_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L], \\ Z_{22} &= -j[Z_{c1} + Z_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L], \\ Z_{12} &= -jZ_{c0} \operatorname{cosec} \gamma L. \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

Если рассматривать не одну, а s ячеек, то в уравнениях (7.4.3) и (7.4.6) необходимо заменить $(i+1)$ на $(i+s)$ и γL на $s\gamma L$.

Совершенно очевидно, что систему из s ячеек можно рассматривать в целом как четырехполюсник, причем

$$\begin{aligned} Z_{11}|_s &= j[Z_{c1} - Z_{c0} \operatorname{ctg} s\gamma L], \\ Z_{22}|_s &= -j[Z_{c1} + Z_{c0} \operatorname{ctg} s\gamma L], \\ Z_{12}|_s &= -jZ_{c0} \operatorname{cosec} s\gamma L. \end{aligned} \quad (7.4.12)$$

Отметим здесь, что уравнения (7.4.12) очень просто выводятся из уравнений (7.4.11). Именно поэтому для представления четырехполюсника удобно выбирать матрицу $[Z]$, а не матрицы $[S]$ или $[A]$.

Для ячейки ненагруженного волновода длиной z и с характеристическим сопротивлением Z_0 запишем

$$\begin{aligned} Z_{c1} &= 0, \\ Z_{c0} &= Z_0, \\ sL &= z; \end{aligned}$$

тогда уравнения (7.4.12) упрощаются, т. е.

$$\begin{aligned} Z_{11}|_z &= -jZ_0 \operatorname{ctg} \gamma z, \\ Z_{22}|_z &= -jZ_0 \operatorname{ctg} \gamma z, \\ Z_{12}|_z &= -jZ_0 \operatorname{cosec} \gamma z \end{aligned} \quad (7.4.13)$$

или

$$[Z] = \frac{-jZ_0}{\sin \gamma z} \begin{vmatrix} \cos \gamma z & 1 \\ 1 & \cos \gamma z \end{vmatrix} \quad (7.4.14)$$

Из уравнения (2.2.5), связывающего матрицы $[\bar{Z}]$ и $[S]$, можно показать, что матрице сопротивления (7.4.14) соответствует следующая матрица рассеяния:

$$[S] = \begin{vmatrix} 0 & e^{-j\gamma z} \\ e^{-j\gamma z} & 0 \end{vmatrix} \quad (7.4.15)$$

Что касается элементов матрицы проводимости, то заметим, что уравнение (7.3.12') записано в таком же виде, как и уравнение (7.3.12). Следовательно, по аналогии с уравнением (7.4.3) имеем:

$$Y_i = \frac{Y_{i+1}j(Y_{c1} - Y_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L) + Y_{c0}^2 + Y_{c1}^2}{Y_{i+1} - j(Y_{c1} + Y_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L)}. \quad (7.4.3')$$

С другой стороны, из уравнений (7.2.2')

$$\begin{aligned} I_i &= Y_{11}V_i + Y_{12}V_{i+1}, \\ -I_{i+1} &= Y_{12}V_i + Y_{22}V_{i+1} \end{aligned}$$

можно определить проводимость Y_i (из первого уравнения)

$$Y_i = \frac{I_i}{V_i} = Y_{11} + Y_{12} \frac{V_{i+1}}{V_i} \quad (7.4.4')$$

и проводимость Y_{i+1} (из второго уравнения)

$$Y_{i+1} = \frac{I_{i+1}}{V_{i+1}} = - \left(Y_{12} \frac{V_i}{V_{i+1}} + Y_{22} \right). \quad (7.4.5')$$

Исключив из уравнений (7.4.4') и (7.4.5') отношение V_i/V_{i+1} , получим отношение, определяющее Y_i через Y_{i+1} ,

$$\frac{V_i}{V_{i+1}} = - \frac{Y_{i+1} + Y_{22}}{Y_{12}}, \quad (7.4.6')$$

$$Y_i = Y_{11} - Y_{12} \frac{Y_{12}}{Y_{22} + Y_{i+1}} = \frac{Y_{i+1}(Y_{11}) + (Y_{11}Y_{22} - Y_{12}^2)}{Y_{i+1} + Y_{22}}.$$

Сравнивая уравнения (7.4.3') и (7.4.6'), находим, что

$$\begin{aligned} Y_{11} &= j(Y_{c1} - Y_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L), \\ Y_{22} &= -j(Y_{c1} + Y_{c0} \operatorname{ctg} \gamma L), \\ Y_{12} &= +jY_{c0} \operatorname{cosec} \gamma L. \end{aligned} \quad (7.4.11')$$

Знак «+» выбран для последнего уравнения в соответствии с уравнением

$$Y_{c0} = -jY_{12} \sin \gamma L. \quad (7.2.17')$$

Элементы матрицы проводимости четырехполюсника, эквивалентного последовательному соединению из s ячеек, равны

$$\begin{aligned} Y_{11}|_s &= j(Y_{c1} - Y_{c0} \operatorname{ctg} s\gamma L), \\ Y_{22}|_s &= -j(Y_{c1} + Y_{c0} \operatorname{ctg} s\gamma L), \\ Y_{12}|_s &= jY_{c0} \operatorname{cosec} s\gamma L. \end{aligned} \quad (7.4.12')$$

Матрица проводимости одной ячейки волновода записывается в виде

$$[Y] = \frac{jY_0}{\sin \gamma z} \begin{vmatrix} -\cos \gamma z & 1 \\ 1 & -\cos \gamma z \end{vmatrix} \quad (7.4.14')$$

[см. уравнения (4.4.8) и (4.4.8')].

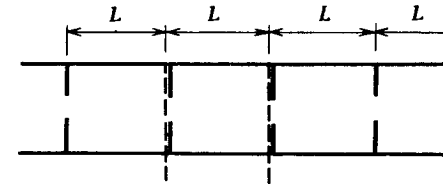
Полученные уравнения справедливы независимо от того, работает ли линия в полосе пропускания или в полосе запираания, с активными потерями или без них, если только

$$\begin{aligned} \gamma &= -j\alpha + \beta \\ j\gamma &= \alpha + j\beta. \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

или

§ 7.5. ГЛАДКИЙ ВОЛНОВОД С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

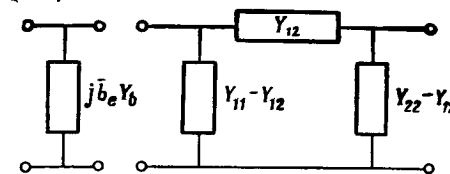
Свойства гладкого волновода, периодически нагруженного неоднородностями, описываются уравнениями, полученными в последних двух параграфах, если эти неоднородности задаются матрицами $[Z]$ или $[Y]$. В простейшем случае неоднородность можно



Фиг. 7.5.1. Простой волновод с периодически включенными неоднородностями.

рассматривать как параллельную проводимость величиной $j\bar{b}_e Y_0$, однако методы анализа, изложенные ниже, можно легко использовать и в случае более сложной эквивалентной схемы.

«Ячейка» волновода должна быть выбрана так, чтобы вся структура была составлена из таких периодических ячеек. На



Фиг. 7.5.2. Эквивалентная схема ячейки.

фиг. 7.5.1 показана «ячейка», которая выбрана как отрезок волновода длиной L , открытый на правом конце и нагруженный неоднородностью $j\bar{b}_e Y_0$ на левом конце. Ячейка оканчивается сразу же слева от неоднородности.

В качестве эквивалентной схемы отрезка гладкого волновода длиной L можно принять П-образный четырехполюсник (фиг. 7.5.2). Элементы матрицы проводимости ячейки определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} Y_{11} &= -jY_0 \operatorname{ctg} \gamma_e L + j\bar{b}_e Y_0, \\ Y_{22} &= -jY_0 \operatorname{ctg} \gamma_e L, \\ Y_{12} &= jY_0 \operatorname{cosec} \gamma_e L, \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

где γ_e — постоянная распространения волновода без неоднородностей.

Постоянная распространения структуры определяется из уравнения

$$\cos \gamma L = \frac{Y_{11} + Y_{22}}{-2Y_{12}}, \quad (7.2.7')$$

которое можно расписать следующим образом:

$$\cos \gamma L = \frac{-j2Y_0 \operatorname{ctg} \gamma_e L + j\bar{b}_e Y_0}{-2jY_0 \operatorname{cosec} \gamma_e L} = \cos \gamma_e L - \frac{\bar{b}_e}{2} \sin \gamma_e L. \quad (7.5.2)$$

Уравнение (7.5.2) определяет постоянную распространения периодической системы γ через постоянную распространения гладкого волновода γ_e и через реактивную проводимость неоднородности \bar{b}_e . Это уравнение может быть записано и в таком виде:

$$\cos \gamma L = A \cos (\gamma_e L + \theta), \quad (7.5.2')$$

где величина

$$A = \sqrt{1 + \left(\frac{\bar{b}_e}{2}\right)^2}$$

всегда больше единицы и

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\bar{b}_e}{2}.$$

Так как γ есть действительная величина (работа в полосе пропускания), то должно выполняться соотношение

$$|\cos (\gamma_e L + \theta)| \leq \frac{1}{A}. \quad (7.5.3)$$

Рассмотрим случаи большой и малой величин неоднородности \bar{b}_e .

Случай 1. Если величина \bar{b}_e мала (малая неоднородность), то θ мало и $A \approx 1$. Таким образом, условие (7.5.3) должно быть выполнено для любого действительного значения $\gamma_e L$, кроме значений, близких к $n\pi$ (ср. с широкополосным согласованием, § 4.1).

Случай 2. Если величина \bar{b}_e велика, то θ близко к $\pm \pi/2$ и A также велико. Следовательно, уравнение (7.5.3) не будет выполняться для всех действительных значений $\gamma_e L$, кроме значений, близких к $n\pi$ [25] [ср. с значениями $\gamma_e L$, близкими к $n\pi$ в уравнении (6.7.9) для высокодобротных резонаторов].

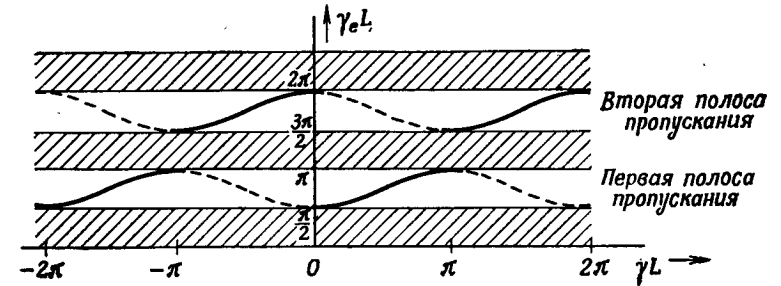
На фиг. 7.5.3 показано изменение $\gamma_e L$ от γL для случая $\bar{b}_e = -2$. Этот график находится в хорошем соответствии с графиком, изображенным на фиг. 7.1.2. Заметим, что $\gamma_e L$ является

периодической неоднозначной функцией γL . Во второй полосе пропускания групповая скорость отрицательна для значений $0 < \gamma L < \pi$, и, следовательно, сигнал в этой области не может распространяться в положительном направлении.

Чтобы построить график зависимости частоты от γL , можно воспользоваться соотношением

$$\gamma_e = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - k_c^2}. \quad (7.5.4)$$

Если рассматривать гладкий волновод, в котором расположены s ячеек и на конце включена проводимость Y_h , то входную прово-



Ф и г. 7.5.3. График зависимости $\gamma_e L$ от γL для значения \bar{b}_e , равного -2 .

димость такого волновода можно получить из уравнения (7.3.13'). Величины Y_{11} , Y_{22} , Y_{12} определяются с помощью уравнений (7.5.1).

Как отмечено ранее, структура, составленная из s ячеек, будет «прозрачной», если

$$\sin s\gamma L = 0, \quad (7.3.14')$$

т. е. если

$$\gamma L = \frac{n\pi}{s}, \quad (7.5.5)$$

причем случай $\gamma L = n\pi$, где $n = 0, 1, 2, \dots$, исключается.

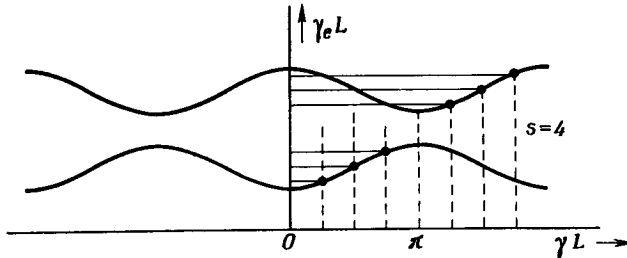
Для каждой конкретной структуры значения γ_e , соответствующие уравнению (7.5.5) [так же как и значения ω в уравнении (7.5.4)], могут быть легко определены из уравнения (7.5.2') или графически. Графическое определение γ_e показано на фиг. 7.5.4 и состоит в том, что интересующая область делится на s частей. На соответствующих частотах вход структуры в соответствии с выражением (7.3.15) согласован, если выход ее согласован, как в случае гладких волноводов. Таким образом,

$$Z_i = Z_0.$$

если

$$Z_k = Z_0.$$

Когда $s=2$, структура является одиночным проходным резонатором. Можно показать, что в этом случае его длина соответствует величине, определенной из выражений (5.9.6) или (5.9.6'). Точно так же и фазовый сдвиг, вносимый такой структурой, соответствует фазовому сдвигу, вносимому полым резонатором относительно плоскости эквивалентного представления его параметров [уравнения (5.7.17) и (5.7.18)]. Если число ячеек увеличивается,



Ф и г. 7.5.4. Графическое определение частот «прозрачности».

то структура оказывается согласованной на большем числе дискретных частот в полосе пропускания. В пределе структура будет согласована на всех частотах в полосе пропускания. Однако если \bar{b}_e велико, то полоса пропускания узкая, и, хотя число ячеек может быть большим, частоты, на которых структура согласуется, будут занимать узкий диапазон.

Если $Y_{i+1} = Y_0$, то входная проводимость Y_i определяется, согласно уравнению (7.4.6'), соотношением

$$Y_i = \frac{Y_0 Y_{11}|_s + (Y_{11}|_s Y_{22}|_s - Y_{12}^2|_s)}{Y_0 + Y_{22}|_s}, \quad (7.5.6)$$

где теперь

$$Y_{11}|_s = j \left(\frac{\bar{b}_e Y_0}{2} - Y_0 \frac{\sin \gamma L \cos s \gamma L}{\sin \gamma_e L \sin s \gamma L} \right),$$

$$Y_{22}|_s = -j \left(\frac{\bar{b}_e Y_0}{2} + Y_0 \frac{\sin \gamma L \cos s \gamma L}{\sin \gamma_e L \sin s \gamma L} \right),$$

$$Y_{12}|_s = j Y_0 \frac{\sin \gamma L}{\sin \gamma_e L} \frac{1}{\sin s \gamma L},$$

так как

$$Y_{c1} = \frac{\bar{b}_e Y_0}{2}, \quad Y_{c0} = Y_0 \frac{\sin \gamma L}{\sin \gamma_e L}.$$

Несмотря на то, что расчетные формулы оказываются очень громоздкими, величину Γ_i можно определить из соотношения

$$\Gamma_i = \frac{Y_0 - Y_i}{Y_0 + Y_i}. \quad (7.5.7)$$

Передаваемую в нагрузку мощность как в пределах полосы пропускания, так и вне ее можно найти из выражения

$$T = P_0 (1 - |\Gamma_i|^2). \quad (7.5.8)$$

Из предыдущей главы известно, что амплитудные характеристики фильтров можно найти сравнительно просто¹⁾, в то время как расчет фазовых характеристик оказывается очень сложным. В случае периодических систем положение оказывается обратным. В следующем параграфе будет рассмотрен промежуточный случай.

Если структура замкнута сама на себя, как в магнетроне, то резонансные условия следует определять из соотношения

$$\gamma L = \frac{2\pi n}{s}, \quad (7.5.9)$$

а не из уравнения (7.5.5), так как на частотах, для которых выполняется соотношение (7.5.9), бегущая волна будет в фазе в любой точке.

§ 7.6. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ПОЛУЯЧЕЙКАМИ НА КОНЦАХ

Если структура не бесконечна, то ее удобно разбить на ячейки так, чтобы

$$Y_{11} = Y_{22}. \quad (7.6.1)$$

Такая структура должна оканчиваться на полуячейке.

На фиг. 7.6.1 изображена ее структура; она несколько отличается от структуры, изображенной на фиг. 7.5.1. Теперь каждая ячейка симметрична ($Y_{11} = Y_{12}$), через \bar{b}_e обозначена реактивная проводимость каждой ячейки, через $\bar{b}_e/2$ — реактивная проводимость полуячеек.

Уравнения (7.5.1) принимают вид

$$Y_{11} = Y_{22} = -j Y_0 \operatorname{ctg} \gamma_e L + j \frac{\bar{b}_e}{2} Y_0, \quad (7.6.2)$$

$$Y_{12} = j Y_0 \operatorname{cosec} \gamma_e L.$$

¹⁾ Амплитудная характеристика определяется с помощью уравнений (6.5.1) и (6.5.3), причем теперь ячейки однородны.

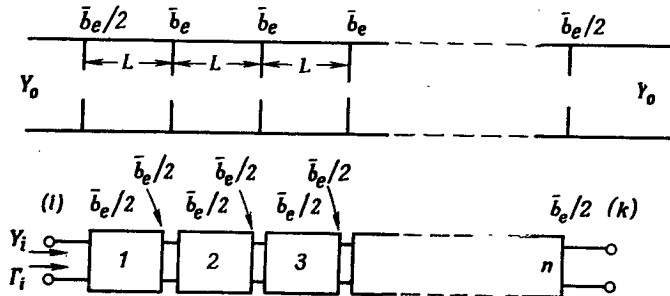
Постоянная распространения структуры определяется из соотношения

$$\cos \gamma L = \frac{Y_{11}}{-Y_{12}}, \quad (7.6.3)$$

в результате получается выражение, аналогичное уравнению (7.5.2):

$$\cos \gamma L = \cos \gamma_e L - \frac{\bar{b}_e}{2} \sin \gamma_e L. \quad (7.6.3')$$

В этом нет ничего удивительного, так как свойства *бесконечной* периодически нагруженной линии не зависят от расположения ячеек. Следовательно, функция $\gamma_e L$ от γL та же и для структуры



Ф и г. 7.6.1. Периодическая система с конечными полужайками.

конечных размеров. Частоты «прозрачности» оказываются такими же, как и в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе. Однако всегда имеется особая точка, соответствующая условию

$$Y_{c0} \equiv -jY_{12} \sin \gamma L = Y_0. \quad (7.6.4)$$

Это условие не зависит от числа ячеек, так как характеристическое сопротивление периодической системы имеет то же значение, что и характеристические сопротивления входной и выходной линии. Для этого частного случая уравнение (7.6.4) примет вид

$$\sin \gamma L = \sin \gamma_e L. \quad (7.6.5)$$

Это можно показать, если в уравнение (7.3.13') подставить $Y_k = Y_0$:

$$Y_i = -Y_{12} \sin \gamma L \left[\frac{Y_0 \cos(k-i) \gamma L + Y_{12} \sin \gamma L \sin(k-i) \gamma L}{Y_0 \sin(k-i) \gamma L - Y_{12} \sin \gamma L \cos(k-i) \gamma L} \right]. \quad (7.6.6)$$

Если $Y_{c0} = Y_0$, то

$$Y_i = -jY_0 \left[\frac{Y_0 \cos(k-i) \gamma L + jY_0 \sin(k-i) \gamma L}{Y_0 \sin(k-i) \gamma L - jY_0 \cos(k-i) \gamma L} \right] = Y_0. \quad (7.6.7)$$

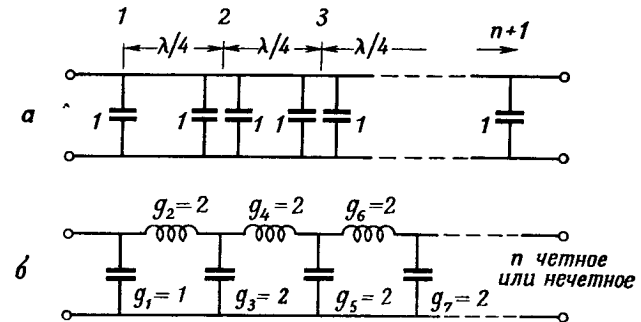
Особую точку, в которой выполняется условие (7.6.5)¹⁾, можно определить по графику зависимости $\gamma_e L$ от γL . В общем случае коэффициент отражения Γ_i , согласно уравнению (7.5.7), записывается в виде

$$\Gamma_i = \frac{(Y_0^2 - Y_{c0}^2) \operatorname{tg}(k-i) \gamma L}{(Y_0^2 + Y_{c0}^2) \operatorname{tg}(k-i) \gamma L - 2jY_0 Y_{c0}}. \quad (7.6.8)$$

Коэффициент передачи T/P_0 , определенный согласно уравнению (7.5.8), оказывается равным

$$\frac{T}{P_0} = (1 - |\Gamma_i|^2) = \frac{1}{1 + \frac{[1 - (Y_{c0}/Y_0)^2] \sin^2(k-i) \gamma L}{4(Y_{c0}/Y_0)^2}}. \quad (7.6.9)$$

Уравнение (7.6.9) можно использовать для расчета характеристики передачи фильтра, изображенного на фиг. 7.6.1, а также



Ф и г. 7.6.2. К выводу формулы фильтра нижних частот.

для расчета характеристики передачи фильтра нижних частот, изображенного на фиг. 7.6.2, б.

Рассмотрим фильтр, состоящий из конденсаторов, расположенных на расстоянии $\lambda/4$ ²⁾ (фиг. 7.6.2, а). При величине емкости

¹⁾ Для простых случаев, таких, как $\bar{b}_{e1} = -2$, $\bar{b}_{e2} = -4$, $\bar{b}_{e3} = -2$, читатель может быстро проверить соответствие с расчетом по круговой диаграмме (фиг. 6.3.2, б, случай сильной связи). Дифференциальный фазовый сдвиг ($\gamma L = \gamma_e L$), соответствующий фиг. 7.5.4, может быть использован для создания широкополосных дифференциальных фазовращателей (большое число элементов, малая величина \bar{b}_e), четвертьволновых пластин, полуволновых пластин и т. д.

²⁾ Для простоты предполагается, что связь остается постоянной, даже если частота приближается к нулю.

$C = 1$ ϕ можно записать в функции нормированной частоты x

$$\frac{Y_{11}}{Y_0} = \frac{Y_{22}}{Y_0} = jx, \quad (7.6.10)$$

$$\frac{Y_{12}}{Y_0} = j,$$

так как в уравнениях (7.6.2) $\operatorname{ctg} \gamma_e L = 0$, $\operatorname{cosec} \gamma_e L = 1$, $\bar{b}_e = x$.
Характеристическая проводимость линии оказывается равной

$$Y_{c0} = -jY_{12} \sin \phi = Y_0 \sin \phi, \quad (7.6.11)$$

где ϕ есть фазовый сдвиг на ячейку, заменяющий γL . Этот фазовый сдвиг получается согласно уравнению (7.6.3)

$$\cos \phi = -\frac{Y_{11}}{Y_{12}} = -x. \quad (7.6.12)$$

Уравнение (7.6.9) приобретает вид

$$\frac{T}{P_0} = \frac{1}{1 + \frac{\cos^2 \phi}{4 \sin^2 \phi} \sin^2 n\phi}, \quad (7.6.13)$$

где $n = s = (k - i)$ равно четному или нечетному числу ячеек. Возможность перехода от фиг. 7.6.2, а к фиг. 7.6.2, б показана в гл. 4.

Уравнение (7.6.13) следует сравнить с (6.5.1) (фильтр Баттерворса) и с уравнением (6.5.3) (фильтр Чебышева). Граничные ячейки представляют компромисс между одним из этих типов и конструкцией, описанной в § 7.5. Граничная частота $x = 1$ не является результатом расчета по заданному значению затухания, а соответствует предельному случаю реального ϕ .

При $x = 1$ коэффициент передачи становится равным

$$\frac{T}{P_0} \Big|_{x=1} = \frac{1}{1 + \frac{n^2}{4}} \quad (7.6.14)$$

и пренебрежимо мал, если число n велико. Из уравнения (7.6.13) видно, что при приближении x к единице наблюдается пульсирующее увеличение амплитуды. Точки «прозрачности» и максимумы пульсаций можно определить, приравняв производную от T нулю.

Несмотря на имеющиеся недостатки, этот тип фильтра часто используют, особенно в качестве фильтров нижних частот, для которых не требуется резкая отсечка непосредственно за пределами заданной полосы частот. Их основным достоинством является простота конструкции.



Практические применения систем

§ 8.0. ВВЕДЕНИЕ

В данной главе рассматриваются некоторые примеры применения рассмотренных выше приборов. Во многих случаях используются комбинации из двух или более таких приборов, причем получающаяся в результате система зачастую обеспечивает решение задачи, которая, казалось бы, не имеет никакого отношения к приборам, используемым в качестве составных частей.

Параграф 8.1 посвящается применению мостовых соединений, используемых в качестве линейных и пассивных элементов, и является дополнением к § 2.6 и 4.9, п. «г». Параграф 8.2 охватывает мостовые соединения с СВЧ-кристаллами или варакторами, которые используются либо как детекторы, либо как модуляторы (сами полупроводниковые элементы рассматриваются попутно, как это было сделано с ферритами в § 4.9). В этом же параграфе в дополнение к дискриминатору Паунда рассматривается дискриминатор с раздвоенным резонансом. Еще более сложный частотный дискриминатор описывается в приложении XIX. В § 8.3 в том же плане рассматриваются модуляторы, не содержащие мостовых соединений.

Параграф 8.4 посвящен вопросам применения турникетного соединения. Такое соединение может не только заменить четвертьволновую пластину в круглом волноводе вместе с переходом между круглым и прямоугольным волноводами, но и использоваться в антенном переключателе радиолокатора, работающего в непрерывном режиме.

Наконец, § 8.5 является дополнением к гл. 6 и 7, так как в нем рассматриваются некоторые фильтры, синтез которых трудно осуществить с помощью исходной модели фильтра нижних частот и специфические особенности которого вытекают из волноводного характера распространения колебаний.

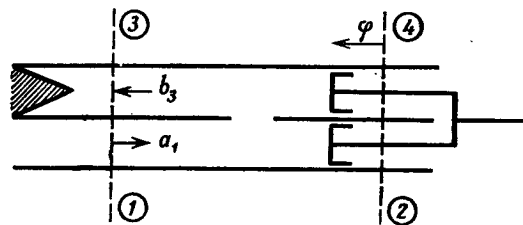
Все описанные применения имеют не только принципиальное, но и большое практическое значение в современной технике связи, и специалист сумеет без особого труда связать излагаемый ниже материал со своей повседневной практикой.

§ 8.1. ПРИМЕНЕНИЕ МОСТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

а. Фазовращатель (раздвижная волноводная линия). В соответствии с принятым на фиг. 8.1.1 обозначением плеч матрица рассеяния для трехдецибелного направленного ответвителя со связью по узкой стенке волновода записывается в виде [ср. с уравнением (3.7.16')]

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & j \\ 1 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 1 \\ j & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (8.1.1)$$

Если в плечи 2 и 4 поместить симметрично расположенные и механически спаренные подвижные закорачивающие поршни,



Ф и г. 8.1.1. Фазовращатель (раздвижная линия).

находящиеся на электрическом расстоянии φ от плоскостей отсчета (отсчет φ производится по направлению к этим плоскостям), то

$$a_2 = -e^{j2\varphi} b_2,$$

$$a_4 = -e^{j2\varphi} b_4.$$

Таким образом, если a_1 является входным сигналом, то выходной сигнал равен

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & j \\ 1 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 1 \\ j & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ -e^{j2\varphi} b_2 \\ 0 \\ -e^{j2\varphi} b_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & a_1 \\ a_1 & -\sqrt{2} ja_1 e^{j2\varphi} \\ -\sqrt{2} ja_1 e^{j2\varphi} & ja_1 \end{vmatrix} \quad (8.1.2)$$

т. е.

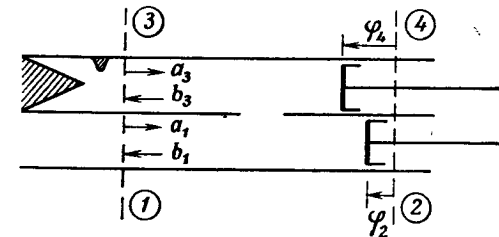
$$b_3 = -ja_1 e^{j2\varphi} = a_1 e^{j(2\varphi - \frac{\pi}{2})}. \quad (8.1.2')$$

Изменяя φ , можно как угодно регулировать фазу сигнала b_3 , не нарушая согласования прибора в целом. Это соединение удобно рассматривать как раздвижную волноводную линию, достоинствами

которой являются симметрия деталей и стандартность конструкции закорачивающих поршней. Этот же принцип можно применить к двойному волноводному тройнику и другим мостовым соединениям, но их геометрическая форма менее удобна для механического изготовления.

На практике этот прибор может выполнять те же функции, что и фазовращатель (§ 4.6) или прецизионный фазовращатель (§ 4.8).

б. Трансформатор полных сопротивлений, или согласователь. Описываемое устройство отличается от раздвижной волноводной линии только несимметричным расположением закорачивающих поршней и независимостью их регулировки.



Ф и г. 8.1.2. Трансформатор полных сопротивлений (согласователь).

Предположим, что из-за рассогласования в плече 3 возник сигнал a_3 . Обратившись теперь к фиг. 8.1.2, нетрудно видеть, что

$$a_2 = -e^{j2\varphi_2} b_2, \quad a_4 = -e^{j2\varphi_4} b_4.$$

Следовательно, при входном сигнале a_1 выходной сигнал определяется системой четырех уравнений

$$\mathbf{b} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & j \\ 1 & 0 & j & 0 \\ 0 & j & 0 & 1 \\ j & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ -e^{j2\varphi_2} b_2 \\ a_3 \\ -e^{j2\varphi_4} b_4 \end{vmatrix} \quad (8.1.3)$$

Решения этой системы

$$b_1 = \frac{1}{2} [a_1 (e^{j2\varphi_2} - e^{j2\varphi_4}) + ja_3 (e^{j2\varphi_2} + e^{j2\varphi_4})],$$

$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_1 + ja_3),$$

$$b_3 = -\frac{1}{2} [ja_1 (e^{j2\varphi_2} + e^{j2\varphi_4}) - a_3 (e^{j2\varphi_2} - e^{j2\varphi_4})],$$

$$b_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} (ja_1 + a_3). \quad (8.1.3')$$

Для того чтобы b_1 равнялось нулю, т. е. для согласования со стороны плеча 1, необходимо выполнить следующее равенство:

$$\frac{e^{j2\varphi_2} + e^{j2\varphi_4}}{e^{j2\varphi_2} - e^{j2\varphi_4}} = j \frac{a_1}{a_3}. \quad (8.1.4)$$

Это условие всегда выполнимо, так как после алгебраических преобразований получаем выражение

$$e^{j2(\varphi_2 - \varphi_4)} = -\frac{1 + j \frac{a_1}{a_3}}{1 - j \frac{a_1}{a_3}}, \quad (8.1.4')$$

модуль которого равен единице.

Согласователь на двойном тройнике работает точно таким же образом.

в. Балансный антенный переключатель. Устройство балансного антенного переключателя показано на фиг. 8.1.3. Во время импульсов магнетрона два защитных разрядника образуют эффективные



Ф и г. 8.1.3. Балансный антенный переключатель.

короткие замыкания на некоторых одинаковых электрических расстояниях φ от плоскостей отсчета 2 и 4, и весь выходной сигнал, согласно уравнению (8.1.2'), поступает в плечо 3 (антенну). (В данном случае величина угла φ не играет никакой роли.) Второе соединение с плечами 1', 2', 3' и 4' развязано.

В промежутках между импульсами магнетрона защитные разрядники пропускают сигналы и связывают первое мостовое соединение со вторым. При поступлении эхо-сигнала a_3 из антенны в первый мост появляется выходной сигнал

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 \\ ja_3 \\ 0 \\ a_3 \end{vmatrix} \quad (8.1.5)$$

который поступает во второй мост (проходя электрическое расстояние φ_0 , не имеющее особого значения и учитываемое лишь для общности выкладок). При этом

$$a'_1 = \frac{j}{\sqrt{2}} a_3 e^{-j\varphi_0}, \quad a'_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} a_3 e^{-j\varphi_0}.$$

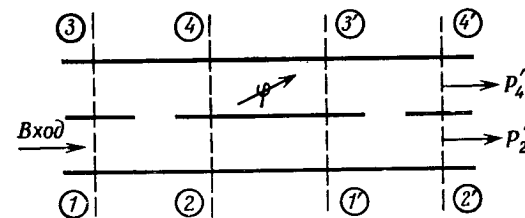
Величина сигнала на выходе второго моста в этом случае составляет

$$b' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 2ja_3 e^{-j\varphi_0} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (8.1.6)$$

т. е. вся принимаемая мощность проходит в плечо приемника 2.

Следует отметить, что в действительности разрядники не создают идеального короткого замыкания и не полностью развязывают оба моста в режиме передачи. Однако при идентичных разрядниках просачивающаяся мощность и «пик» направляются в плечо 4', т. е. данное устройство обеспечивает еще и дополнительную защиту приемника.

г. Регулируемый направленный ответвитель. Ответвитель с нулевым переходным ослаблением, изображенный на фиг. 8.1.3



Ф и г. 8.1.4. Регулируемый направленный ответвитель.

(см. также § 4.5, п. «е»), можно превратить в ответвитель с бесконечно большим ослаблением, изменив на 180° разность фаз между входными сигналами второго моста.

Вообще, изменяя разность фаз φ на фиг. 8.1.4, можно как угодно регулировать соотношение амплитуд сигналов b'_1 и b'_2 , не нарушая при этом согласования системы со стороны входа. По своему принципу действия такая система не нуждается в поглотителях мощности.

Если в плечо 1' поступает сигнал $(1/\sqrt{2}) a_1$, то в плечо 3' приходит сигнал $(1/\sqrt{2}) a_1 e^{-j\varphi'}$. Выходной сигнал равен

$$b' = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & & \\ a_1 (1 + je^{-j\varphi'}) & & \\ 0 & & \\ a_1 (j + e^{-j\varphi'}) & & \end{vmatrix} \quad (8.1.7)$$

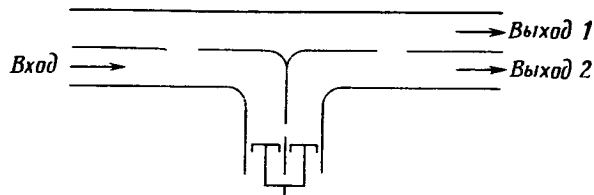
т. е.

$$b'_2 = \frac{1}{2} a_1 (1 + je^{-j\varphi'}), \quad b'_4 = \frac{1}{2} a_1 (j + e^{-j\varphi'}).$$

Можно показать, что соответствующие мощности будут равны следующим величинам:

$$P'_2 = \frac{1 + \sin \varphi'}{2} P_0, \quad P'_4 = \frac{1 - \sin \varphi'}{2} P_0. \quad (8.1.8)$$

Таким образом, путем изменения φ' можно плавно изменять от нуля до бесконечности отношение мощностей в каналах 2' и 4'.



Фиг. 8.1.5. Регулируемый направленный ответвитель, в котором все функции выполняются только мостовыми соединениями.

Если первоначальное разветвление достигается с помощью трехдецибельного ответвителя (фиг. 8.1.4), то $\varphi' = \varphi - \pi/2$.

На фиг. 8.1.5 изображен еще один вариант регулируемого направленного ответвителя, в котором фазовый сдвиг создается с помощью третьего мостового соединения.

§ 8.2. ДРУГИЕ ПРИМЕНЕНИЯ МОСТОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

а. Балансный фазовый детектор. Рассмотрим устройство, изображенное на фиг. 8.2.1 и состоящее из двойного тройника и двух кристаллических СВЧ-детекторов, присоединенных к дифференциальному усилителю.

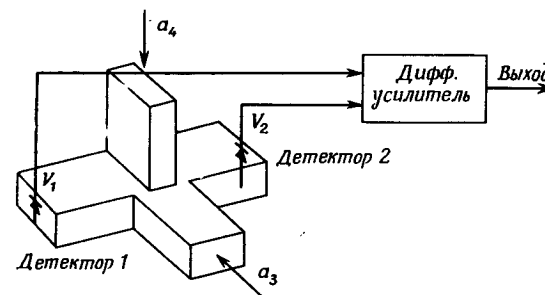
Работа кристаллического детектора и детекторной головки достаточно сложна, но в данном случае представляют интерес лишь следующие свойства:

1. Выходное напряжение детектора пропорционально амплитуде СВЧ-сигнала, возведенной в некоторую степень p :

$$V_1 \sim |b_1|^p, \quad (8.2.1)$$

где $p=2$ на квадратичном участке характеристики детектора и $p=1$ на линейном участке.

2. Выходное напряжение повторяет изменения амплитуды входного сигнала, если только они происходят не слишком быстро,



Фиг. 8.2.1. Балансный фазовый детектор.

но не успевает повторять мгновенные значения величины СВЧ-сигнала. Следовательно, оно не зависит от фазы СВЧ-сигнала.

В дифференциальном усилителе происходит вычитание напряжения V_2 из напряжения V_1 и усиление получившейся разности. Постоянная составляющая выходного сигнала может находиться на любом уровне, включая нулевой.

Сигналы a_3 и a_4 одной и той же частоты поступают соответственно в плечи 3 и 4. Из соотношений (2.6.2) получаем

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_3 + a_4), \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_3 - a_4). \quad (8.2.2)$$

На основании (8.2.1) имеем

$$V_1 \sim |a_3 + a_4|^p, \quad V_2 \sim |a_3 - a_4|^p. \quad (8.2.3)$$

Таким образом, напряжения V_1 и V_2 зависят не только от амплитуд сигналов a_3 и a_4 , но и от разности фаз между ними.

В идеальном случае желательно, чтобы $|a_3| = |a_4|$ и чтобы p равнялось 1 или 2. Если, например, $a_4 = a_3 e^{j\theta}$ и $p=2$, то

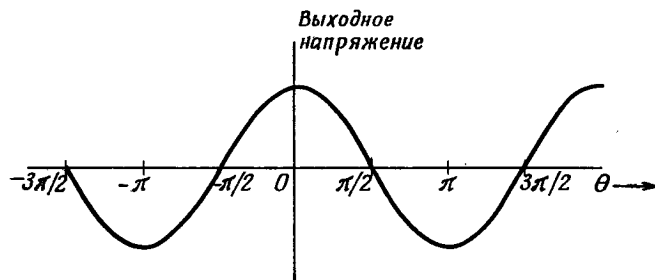
$$\begin{aligned} V_1 &\sim |a_3|^2 |1 + e^{j\theta}|^2 = 4 |a_3|^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}, \\ V_2 &\sim |a_3|^2 |1 - e^{j\theta}|^2 = 4 |a_3|^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

и

$$\text{Выходное напряжение} = G \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) = G \cos \theta, \quad (8.2.5)$$

здесь G — коэффициент усиления.

Если характеристики кристаллов линейны ($p=1$), то выходное напряжение дифференциального усилителя по-прежнему пропорционально синусу разности фаз между входными сигналами (фиг. 8.2.2). Из выражений (8.2.3) нетрудно определить, что будет в реальных условиях, когда $|a_3| \neq |a_4|$. Отметим, что



Ф и г. 8.2.2. Зависимость выходного напряжения дифференциального усилителя от разности фаз.

балансное фазовое детектирование можно осуществить с помощью трехдецибелного моста или любого другого мостового соединения, так как симметричность расположения кристаллов по отношению к плоскости отсчета не имеет особого значения¹⁾ и ее нарушение приводит лишь к горизонтальному смещению рабочей характеристики фазового детектора на постоянную величину.

б. Частотный дискриминатор Паунда. На фиг. 8.2.3 изображен частотный дискриминатор Паунда. Для плеча 1 коэффициент отражения от резонатора, измеряемый в плоскости эквивалентного представления, равен Γ_1 . На основании уравнений (5.3.6)

$$\Gamma_1 = \frac{1 - \bar{y}}{1 + \bar{y}} = \frac{1 - \bar{g} - j\bar{b}}{1 + \bar{g} + j\bar{b}}. \quad (8.2.6)$$

В окрестности частоты ω_0 справедливо следующее соотношение:

$$\Gamma_1 = \frac{1 - \frac{Q_{\text{ВН}}}{Q_0} - jQ_{\text{ВН}} \frac{2d\omega}{\omega_0}}{1 + \frac{Q_{\text{ВН}}}{Q_0} + jQ_{\text{ВН}} \frac{2d\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{Q_{\text{ВН}}} \frac{1 - j \frac{2d\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{2d\omega}{\omega_0}}. \quad (8.2.6')$$

¹⁾ См. «Балансные смесители», § 8.2, п. «в».

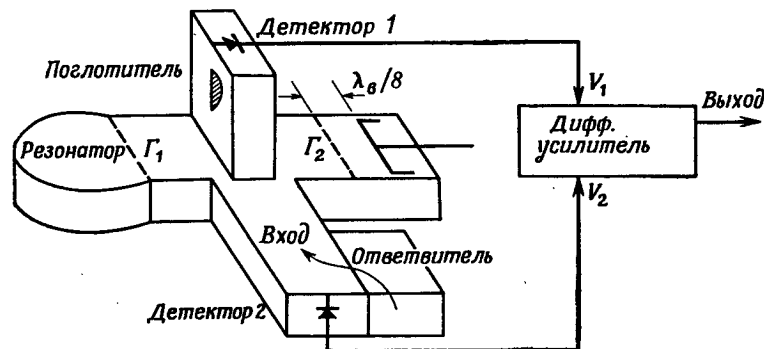
Если $|2d\omega/\omega_0| \ll 1/Q_{\text{Н}}$, то выражение (8.2.6') упрощается

$$\Gamma_1 \approx Q_{\text{Н}} \left(\frac{1}{Q_{\text{ВН}}} - \frac{1}{Q_0} \right) - jQ_{\text{Н}} \frac{2d\omega}{\omega_0}, \quad (8.2.7)$$

а если к тому же $Q_0 = Q_{\text{ВН}}$, то

$$\Gamma_1 \approx -jQ_0 \frac{d\omega}{\omega_0}. \quad (8.2.7')$$

Следует подчеркнуть, что, согласно уравнению (8.2.7'), величина Γ_1 пропорциональна $d\omega$ и изменяет знак одновременно с $d\omega$



Ф и г. 8.2.3. Частотный дискриминатор Паунда.

(ср. фиг. 5.3.5 для $\bar{r} \approx 1$). Если в резонатор поступают две боковые частоты, расположенные симметрично относительно ω_0 , то фаза отраженной верхней боковой частоты будет сдвинута на -90° , а нижней — на $+90^\circ$. Коэффициент отражения в плече 2 равен Γ_2 . Отражение происходит от короткозамыкающего поршня, находящегося на расстоянии $\lambda_{\text{в}}/8$ от плоскости отсчета, симметричной относительно плоскости эквивалентного представления резонатора. Согласно выражению (2.3.11'),

$$\Gamma_2 = -e^{-j \frac{\pi}{2}} = j. \quad (8.2.8)$$

На основании уравнений (2.6.5) и (2.6.10) при $\Gamma_3 = \Gamma_4 = 0$ имеем

$$b_3 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} a_3 = \frac{j \left(1 - Q_{\text{Н}} \frac{2d\omega}{\omega_0} \right)}{2} + \frac{1}{2} \frac{Q_0 - Q_{\text{ВН}}}{Q_0 + Q_{\text{ВН}}}, \quad (8.2.9)$$

$$b_4 = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} a_3 = \frac{-j \left(1 + Q_{\text{Н}} \frac{2d\omega}{\omega_0} \right)}{2} + \frac{1}{2} \frac{Q_0 - Q_{\text{ВН}}}{Q_0 + Q_{\text{ВН}}}.$$

Как указывалось в параграфе, посвященном балансному фазовому детектору, результирующие напряжения на выходах кристаллических детекторов будут пропорциональны соответственно величинам $|b_3|$ и $|b_4|$, возведенным в некоторую степень p . Если $p = 1$, то выходной сигнал дифференциального усилителя при $Q_0 = Q_{вн}$ составит

$$\text{Выходной сигнал} \sim \left| 1 - Q_0 \frac{d\omega}{\omega_0} \right| - \left| 1 + Q_0 \frac{d\omega}{\omega_0} \right| = G \frac{Q_0 d\omega}{\omega_0}. \quad (8.2.10)$$

Если же $p = 2$, то

$$\text{Выходной сигнал} \sim \left| 1 - Q_0 \frac{d\omega}{\omega_0} \right|^2 - \left| 1 + Q_0 \frac{d\omega}{\omega_0} \right|^2 = G' \frac{Q_0 d\omega}{\omega_0}. \quad (8.2.10')$$

Если $Q_0 \neq Q_{вн}$ и $p = 2$, то

$$\text{Выходной сигнал} \sim \left| 1 - Q_n \frac{2d\omega}{\omega_0} \right|^2 - \left| 1 + Q_n \frac{2d\omega}{\omega_0} \right|^2 = G' \frac{Q_n 2d\omega}{\omega_0}, \quad (8.2.10'')$$

где G и G' — коэффициенты усиления.

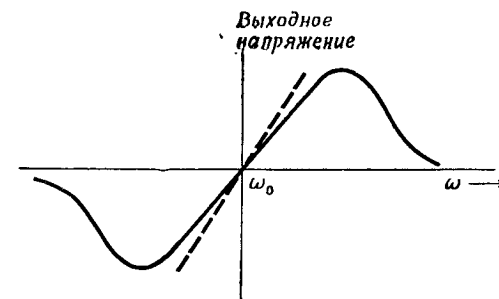
Выходной сигнал дифференциального усилителя линейно зависит от частоты в пределах определенного участка характеристики. Границы этого участка определяются пределами применимости формулы (8.2.7) или (8.2.7'). Если, в частности, $|d\omega|$ очень велико, то Γ_1 стремится к -1 , и, согласно уравнению (8.2.9), $|b_3| = |b_4|$. Характер зависимости выходного напряжения от частоты показан на фиг. 8.2.4, иллюстрирующей преобразование частотных отклонений в амплитудные.

Если сигнал модулирован по частоте, то выходное напряжение дифференциального усилителя пропорционально мгновенному значению девиации частоты, а частота выходного сигнала равна частоте модуляции. Если частотная модуляция (ЧМ) сопровождается амплитудной модуляцией (АМ), то выходной сигнал имеет довольно сложную структуру. Но если частота АМ невелика, то форму выходного напряжения можно определить графически по характеристике, показанной на фиг. 8.2.4, учитывая при этом, что крутизна характеристики зависит от амплитуды. Влияние АМ, ничтожное при значениях ω , близких к ω_0 , заметно возрастает по мере увеличения $|\omega - \omega_0|$.

В приложении XIX описывается система, которая ослабляет влияние амплитудной модуляции.

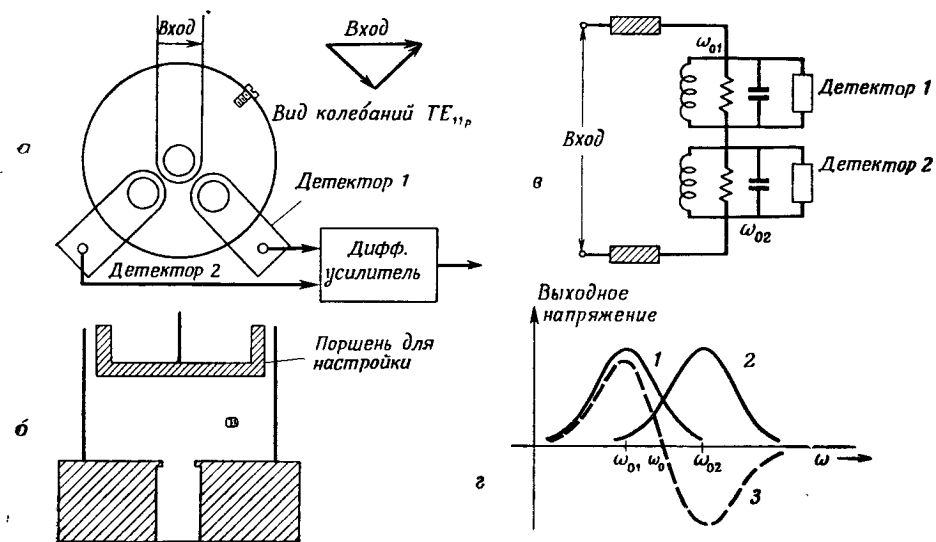
В дискриминаторе Паунда для регулировки рабочей частоты требуется одновременная перестройка как резонатора, работающего на отражение, так и закорачивающего поршня. От этого недостатка свободен дискриминатор с раздвоенным резонансом, перестраиваемый с помощью только одного элемента.

Действие этой системы легче всего пояснить на примере двух проходных резонаторов, питаемых от одной линии и настроенных на различные, но близкие частоты ω_{01} и ω_{02} . На выходе каждого



Фиг. 8.2.4. Рабочая характеристика частотного дискриминатора. --- результат возрастания величины $|a_3|$.

из резонаторов включены кристаллические детекторы. Зависимости выходного напряжения обоих детекторов от частоты приведены на фиг. 8.2.5, г (кривые 1 и 2). Если вторую частотную



Фиг. 8.2.5. Частотный дискриминатор с раздвоенным резонансом.

характеристику вычесть из первой, используя для этого, например, дифференциальный усилитель, то получится кривая 3, являющаяся рабочей характеристикой дискриминатора.

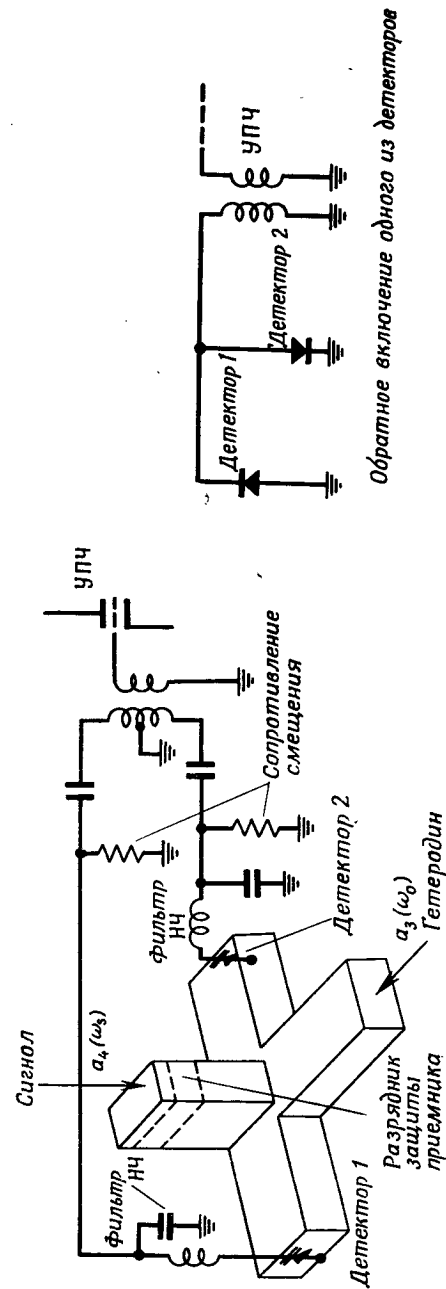
В одном устройстве трудно объединить два проходных перестраиваемых резонатора, так как при их перестройке необходимо очень точно поддерживать постоянную разность между резонансными частотами. Однако оба эти резонатора можно объединить в один, работающий на виде колебаний TE_{11p} и запитываемый, как показано на фиг. 8.2.5, а. Можно считать, что входной сигнал разветвляется по двум каналам 1 и 2. Возмущающий элемент расположен в резонаторе несимметрично, что обеспечивает неодинаковое его воздействие на резонансные частоты двух каналов. На выходе каждого канала расположен СВЧ-детектор.

Для расчета системы можно воспользоваться приведенной к ее входу эквивалентной схемой, показанной на фиг. 8.2.5, в. Оба канала перестраиваются с помощью одного регулировочного устройства, обеспечивающего постоянство разности между резонансными частотами каналов в широком диапазоне частот. Крутизна характеристики этого прибора, так же как и дискриминатора Паунда, зависит от амплитуды входного сигнала [29].

в. **Балансный смеситель.** Балансные смесители очень похожи на балансные фазовые детекторы. Действительно, балансный фазовый детектор, изображенный на фиг. 8.2.1, может не только индцировать постоянную разность фаз между сигналами a_3 и a_4 , когда они имеют одинаковые частоты, но и вырабатывать напряжение, пропорциональное мгновенной разности фаз, когда сигналы отличаются по частоте. Таким образом, частота выходного сигнала равна разности частот входных сигналов или промежуточной частоте (ПЧ).

На фиг. 8.2.6 приводится схема, применяющаяся при обычных промежуточных частотах, лежащих в интервале 1—100 Мгц. СВЧ-сигнал, проходящий через смесительный детектор или минуящий его, зашунтирован дроссельным устройством (встроенным фильтром нижних частот). Усилитель промежуточной частоты (УПЧ) и детекторы развязаны по постоянному току, и постоянная составляющая тока детектора, протекая через соответствующее сопротивление, обеспечивает необходимое автосмещение. Величина смещения определяется главным образом величиной сопротивления и уровнем сигнала гетеродина $|a_3|$. Ниже будет показано, что этот уровень должен быть намного выше уровня сигнала $|a_4|$. Если два детектора одинаковы, то используется УПЧ с push-пульным (дифференциальным) входом. Если же один из детекторов используется в «обратном» включении, т. е. изменена полярность одного из диодов, то в УПЧ применяется обычный двухполюсный вход.

При рассмотрении приемников, как уже упоминалось, считают, что сигнал гетеродина a_3 намного превышает принимаемый сигнал a_4 . Простые предположения, положенные в основу выражения (8.2.1),



Ф и г. 8.2.6. Балансный смеситель.

Обратное включение одного из детекторов

уже недостаточны для обоснования целесообразности такого соотношения сигналов и поэтому необходим более точный расчет.

Если $|a_3| \gg |a_4|$, то можно с достаточной точностью полагать, что кристаллический детектор действует как линейный однополупериодный выпрямитель. Пусть сигналы a_3 и a_4 изменяются во времени по закону [30]

$$\begin{aligned} a_3 &\rightarrow \sqrt{2} A_3 \cos \omega_0 t, \\ a_4 &\rightarrow \sqrt{2} A_4 \cos (\omega_s t + \varphi_s), \end{aligned} \quad (8.2.11)$$

где ω_0 — частота гетеродина, а ω_s — частота сигнала. В этом случае имеем

$$b_1 \rightarrow A_3 \cos \omega_0 t + A_4 \cos (\omega_s t + \varphi_s) = A_3 [\cos \omega_0 t + k \cos (\omega_s t + \varphi_s)] \quad (8.2.12)$$

и

$$b_2 \rightarrow A_3 \cos \omega_0 t - A_4 \cos (\omega_s t + \varphi_s) = A_3 [\cos \omega_0 t + k \cos (\omega_s t + \varphi_s + \pi)], \quad (8.2.12')$$

где

$$k = \frac{A_4}{A_3} \ll 1.$$

Выходные напряжения каждого линейного однополупериодного детектора можно представить в форме

$$V_1 \sim A_3 \{c_0(k) + 0,5 \cos \omega_0 t + c_{11}(k) \cos (\omega_s t + \varphi_s) + c_{02}(k) \cos (2\omega_0 t) + c_{11}(k) \cos [(\omega_0 - \omega_s)t - \varphi_s] + \dots\}, \quad (8.2.13)$$

$$V_2 \sim A_3 \{c_0(k) + 0,5 \cos \omega_0 t - c_{11}(k) \cos (\omega_s t + \varphi_s) + c_{02}(k) \cos (2\omega_0 t) - c_{11}(k) \cos [(\omega_0 - \omega_s)t - \varphi_s] + \dots\}. \quad (8.2.14)$$

Тогда выходное напряжение УПЧ (без высокочастотных составляющих) равно

$$\text{Выходное напряжение} = G 2 A_3 c_{11}(k) \cos [(\omega_0 - \omega_s)t - \varphi_s]. \quad (8.2.15)$$

Но

$$c_{11}(k) = \frac{k}{\pi} \left[1 - \frac{1}{8} k^2 - \frac{1}{64} k^4 - \dots \right], \quad (8.2.16)$$

и если k мало по сравнению с единицей ($A_3 > 10A_4$), то

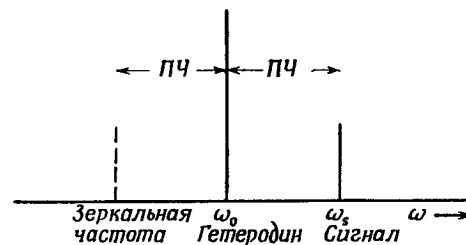
$$c_{11}(k) \approx \frac{k}{\pi} = \frac{A_4}{\pi A_3}. \quad (8.2.16')$$

Следовательно, выходное напряжение усилителя пропорционально следующей величине:

$$\text{Выходное напряжение} = G \frac{2}{\pi} A_4 \cos [(\omega_0 - \omega_s)t - \varphi_s]. \quad (8.2.15')$$

Таким образом, при слабых входных сигналах выходное напряжение УПЧ не зависит от амплитуды сигнала гетеродина $|a_3|$ и, следовательно, от ее изменений во времени (т. е. от шумов гетеродина). Это основная особенность балансного смесителя.

Отметим, что смесительные детекторы могут находиться на различных расстояниях от плоскости симметрии, если сигналы a_3 и a_4 претерпевают практически одинаковые фазовые задержки в своих плечах (т. е. при условии, что ПЧ мала или электрическая разность хода сигналов a_3 и a_4 составляет лишь небольшую долю



Ф и г. 8.2.7. Частоты сигнала, гетеродина и зеркального канала.

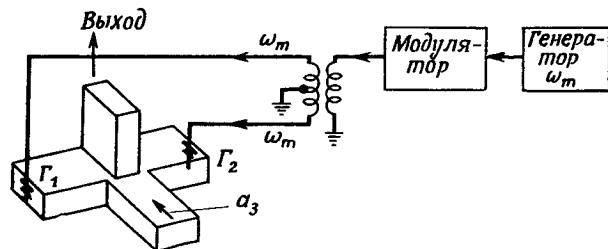
длины волны сигнала ПЧ). В частности, для этой цели можно использовать любое гибридное соединение, работающее в диапазоне промежуточных частот.

При использовании антенного переключателя расположение детекторов по отношению к плоскости симметрии иногда определяется их выходными полными сопротивлениями на промежуточной частоте. Нелинейность характеристик кристаллических детекторов (так называемые «линейные» однополупериодные выпрямители на самом деле всегда нелинейны) приводит к возникновению сигналов «зеркальной частоты» (фиг. 8.2.7). Эти паразитные сигналы сами по себе, вообще говоря, безвредны, но, отражаясь обратно к детектору, они неблагоприятно влияют на его выходное сопротивление по промежуточной частоте, снижая чувствительность приемника.

Фазы этих паразитных ВЧ-сигналов зависят от фаз сигналов a_3 и a_4 в каждом из плеч. Если плечи симметричны, то эти сигналы проходят через плоскость симметрии в противофазе и поступают в плечо 4 (сигнальный канал). Если же одно плечо длиннее другого на $\lambda_B/4$, то паразитные сигналы встречаются в плоскости симметрии тройника в фазе и проникают в плечо 3 (гетеродинный канал), где их можно поглотить с помощью аттенюатора. При симметричных плечах разрядник защиты приемника, который является проходным резонатором лишь на рабочей частоте, отражает сигнал зеркальной частоты обратно к детекторам [31].

г. Балансный модулятор. На фиг. 8.2.8 приведена обычная схема балансного модулятора. СВЧ-сигнал a_3 поступает в плечо 3. Коэффициенты отражения Γ_1 и Γ_2 от нагрузок плеч 1 и 2 меняются во времени. Модулированный сигнал поступает в выходное плечо 4.

Коэффициенты отражения Γ_1 и Γ_2 являются по определению комплексными величинами (см. § 1.1) и не зависят от $j\omega t$. Однако



Фиг. 8.2.8. Балансный модулятор.

при определенных условиях, когда, например, на полупроводниковый диод подается переменное напряжение смещения с частотой ω_m , отношение $E_{отр}$ и $E_{пад}$ (обе эти величины являются комплексными) периодически изменяется с частотой ω_m .

Из формул (8.2.9) следует, что

$$b_3 = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2} a_3, \quad b_4 = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2} a_3. \quad (8.2.17)$$

При использовании кристаллических СВЧ-детекторов желательно, чтобы коэффициент отражения Γ_1 изменялся следующим образом:

$$\Gamma_1 = \Gamma_0 \cos \omega_m t + \Gamma_-, \quad (8.2.18)$$

где Γ_0 и Γ_- — комплексные числа. Главное в этой формуле — это наличие в выражении для Γ_1 переменной составляющей, изменяющейся по гармоническому закону при постоянной начальной фазе. Годограф вектора (8.2.18) на комплексной плоскости является прямой линией. Если $\Gamma_- = 0$, то прямая расположена симметрично относительно начала координат.

Коэффициент отражения Γ_2 в плече 2 равен

$$\Gamma_2 = \Gamma_0 \cos (\omega_m t + \pi) + \Gamma_-, \quad (8.2.18')$$

поскольку на кристалл 2 (предполагается, что последний идентичен кристаллу 1) напряжение смещения подается в противофазе¹⁾.

¹⁾ Или оба модулирующих напряжения находятся в фазе, но полярность включения одного из детекторов изменена на противоположную.

Из уравнений (8.2.17) следует, что

$$b_3 = a_3 \Gamma_-, \quad (8.2.19)$$

$$b_4 = a_3 \Gamma_0 \cos \omega_m t = |a_3| \Gamma_0 \frac{e^{j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}}{2} e^{j(\omega t + \varphi_0)}, \quad (8.2.20)$$

где $\omega t + \varphi_0$ — фаза сигнала a_3 . Уравнение (8.2.20) можно записать в другой форме:

$$b_4 = \frac{|a_3| \Gamma_0}{2} [e^{j[(\omega + \omega_m)t + \varphi_0]} + e^{j[(\omega - \omega_m)t + \varphi_0]}] = \frac{|a_3| |\Gamma_0|}{2} [e^{j[(\omega + \omega_m)t + \psi_0]} + e^{j[(\omega - \omega_m)t + \psi_0]}], \quad (8.2.20')$$

где $\psi_0 = \varphi_0 + \theta_0$, а θ_0 — аргумент Γ_0 .

Закончив на этом операции с комплексными величинами, запишем выражение для вещественной части сигнала b_4 :

$$\begin{aligned} \text{Выходной сигнал в плече 4} &= \frac{|\Gamma_0| |a_3|}{2} \{ \cos [(\omega + \omega_m)t + \psi_0] + \\ &+ \cos [(\omega - \omega_m)t + \psi_0] \} = \\ &= |\Gamma_0| |a_3| \cos \omega_m t \cos (\omega t + \psi_0). \end{aligned} \quad (8.2.21)$$

Из плеча 4 поступает сигнал, содержащий две боковые частоты, равные соответственно сумме и разности величин ω и ω_m . Что касается несущей частоты ω , то она либо полностью подавляется, когда $\Gamma_- = 0$, либо частично подавляется, а частично направляется в плечо 3, когда $\Gamma_- \neq 0$.

Балансную модуляцию можно также осуществить, меняя по синусоидальному закону фазу коэффициента Γ при постоянной его амплитуде, вместо того чтобы менять амплитуду при постоянной фазе. Подобный метод применяется при использовании варакторных диодов (варикапов), которые можно рассматривать как конденсаторы, реактивное сопротивление которых линейно зависит от приложенного напряжения. В идеальном случае потери отсутствуют и $\Gamma_1 = 1$.

При подаче синусоидального смещения величина Γ_1 изменяется по закону

$$\Gamma_1 = e^{j(\alpha_0 \cos \omega_m t + \theta_0)}, \quad (8.2.22)$$

где α_0 — максимальная девиация фазы коэффициента Γ_1 ($\alpha_0 \leq \pi/2$, значение $\alpha_0 = \pi/2$ соответствует изменению емкости от 0 до ∞), а θ_0 — фаза Γ_1 при $\omega_m t = (\pi/2) + n\pi$.

Если варакторы одинаковы, то

$$\Gamma_2 = e^{j(-\alpha_0 \cos \omega_m t + \theta_0)}. \quad (8.2.23)$$

Сигнал на выходе плеча 3 равен

$$b_3 = \frac{|a_3|}{2} [e^{j(\omega t + \psi_0 + \alpha_0 \cos \omega_m t)} + e^{j(\omega t + \psi_0 - \alpha_0 \cos \omega_m t)}], \quad (8.2.24)$$

а на выходе плеча 4 составит

$$b_4 = \frac{|a_4|}{2} [e^{j(\omega t + \psi_0 + \alpha_0 \cos \omega_m t)} - e^{j(\omega t + \psi_0 - \alpha_0 \cos \omega_m t)}]. \quad (8.2.25)$$

Вещественные части b_3 и b_4 равны соответственно [9]

Выходной сигнал в плече 3 =

$$\begin{aligned} &= \frac{|a_3|}{2} [J_0(\alpha_0) \cos(\omega t + \psi_0) - 2J_1(\alpha_0) \cos \omega_m t \sin(\omega t + \psi_0) - \\ &- 2J_2(\alpha_0) \cos 2\omega_m t \cos(\omega t + \psi_0) + 2J_3(\alpha_0) \cos 3\omega_m t \sin(\omega t + \psi_0) + \dots \\ &\dots + J_0(\alpha_0) \cos(\omega t + \psi_0) + 2J_1(\alpha_0) \cos \omega_m t \sin(\omega t + \psi_0) - \\ &- 2J_2(\alpha_0) \cos 2\omega_m t \cos(\omega t + \psi_0) - 2J_3(\alpha_0) \cos 3\omega_m t \sin(\omega t + \psi_0) + \dots] = \\ &= |a_3| [J_0(\alpha_0) \cos(\omega t + \psi_0) - 2J_2(\alpha_0) \cos 2\omega_m t \cos(\omega t + \psi_0) + \dots], \quad (8.2.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Выходной сигнал в плече 4} &= |a_3| [2J_1(\alpha_0) \cos \omega_m t \sin(\omega t + \psi_0) + \\ &+ 2J_3(\alpha_0) \cos 3\omega_m t \sin(\omega t + \psi_0) + \dots]. \quad (8.2.27) \end{aligned}$$

Таким образом, сигнал на выходе плеча 3 содержит слагаемые, пропорциональные функциям Бесселя с четными индексами (включая несущую), тогда как выходной сигнал плеча 4 содержит только те слагаемые, которые пропорциональны функциям Бесселя нечетного порядка. По мере увеличения α_0 функция $J_0(\alpha_0)$ убывает, а интересующий нас коэффициент $J_1(\alpha_0)$ возрастает. Кроме того, для обычно встречающихся значений α_0 справедливо неравенство $J_3(\alpha_0) < J_1(\alpha_0)$. Поэтому выходной сигнал плеча 4 можно приближенно записать так:

$$\begin{aligned} \text{Выходной сигнал в плече 4} &\approx |a_3| 2J_1(\alpha_0) \cos \omega_m t \sin(\omega t + \psi_0) = \\ &= |a_3| J_1(\alpha_0) \{\sin[(\omega + \omega_m)t + \psi_0] + \sin[(\omega - \omega_m)t + \psi_0]\}. \quad (8.2.27') \end{aligned}$$

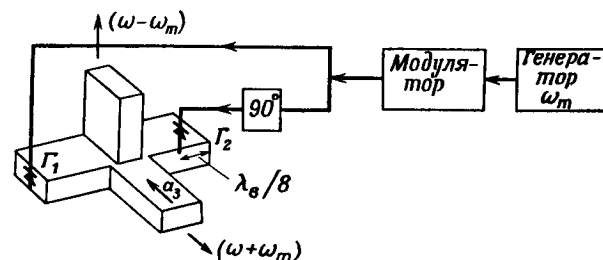
Расчетный коэффициент преобразования такой системы оказывается выше, чем в случае согласованных детекторов ($\Gamma_{\pm} = 0$, $|\Gamma_0| \rightarrow 1$).

Как видно из изложенного выше, для рассматриваемой цели после принятия определенных мер можно использовать любые гибридные соединения. Нужные амплитудные и фазовые изменения коэффициентов Γ_1 и Γ_2 можно обеспечить и с помощью ферритовых устройств, подмагничиваемых синусоидально меняющимися полями (см. § 8.3).

д. Однополосная модуляция. Один из способов осуществления однополосной модуляции (преобразования частоты) — это фильтрация одной из двух боковых частот, получившихся в результате

двухполосной модуляции. Но если боковые частоты близки друг к другу, то этот метод трудно реализовать на практике.

От этого недостатка свободен метод, поясняемый на фиг. 8.2.9 (см. также § 8.3). В отличие от рассмотренного выше двухполосного модулятора модулирующие напряжения, подаваемые на полупроводниковые диоды, находятся в квадратуре, а сами диоды расположены несимметрично. Кристалл 2 расположен на $\lambda_B/8$ ближе к плоскости симметрии тройника, чем кристалл 1.



Ф и г. 8.2.9. Однополосный балансный модулятор.

Обязательным условием является равенство нулю коэффициента Γ_{\pm} в выражении (8.2.18), поскольку теперь нельзя осуществить компенсацию несущей в плече 4 или 3. В плече 2, противоположном плечу 1, коэффициент Γ_2 в соответствии с уравнением (2.3.11) равен

$$\Gamma_2 = j\Gamma_0 \cos(\omega_m t + 90^\circ) = -j\Gamma_0 \sin \omega_m t. \quad (8.2.28)$$

Из уравнений (8.2.17) получаем

$$b_3 = \frac{\Gamma_0 a_3}{2} [\cos \omega_m t - j \sin \omega_m t] = \frac{|\Gamma_0| |a_3|}{2} e^{j[(\omega - \omega_m)t + \psi_0]}, \quad (8.2.29)$$

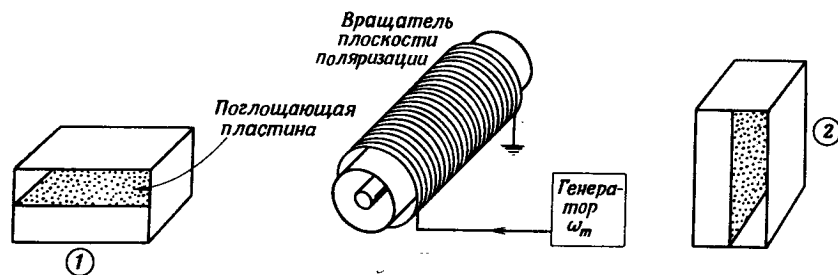
$$b_4 = \frac{\Gamma_0 a_3}{2} [\cos \omega_m t + j \sin \omega_m t] = \frac{|\Gamma_0| |a_3|}{2} e^{j[(\omega + \omega_m)t + \psi_0]}. \quad (8.2.30)$$

Таким образом, на выходах плеч 3 и 4 получаются сигналы нижней и верхней боковых частот соответственно. Сигнал несущей поглощается в диодах. Нижнюю и верхнюю боковые частоты можно поменять местами, изменив полярность включения одного из диодов или изменив полярность одного из модулирующих напряжений, или, наконец, подавая СВЧ-сигнал в плечо 4.

Если Γ_1 отличается от $\Gamma_0 \cos \omega_m t$, изменяясь при этом по известному закону, то можно разделить Γ_1 на вещественную и мнимую части, разложив затем каждую из них в ряд Фурье. Это отличие приведет к появлению паразитных боковых частот. В следующем параграфе будет показано, что полупроводниковые диоды можно заменить устройствами, вращающими плоскость поляризации.

§ 8.3. ФЕРРИТОВЫЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ МОДУЛЯТОРЫ

а. Устройства, вращающие плоскость поляризации. Если феррит не насыщен, то угол поворота плоскости поляризации (или разность между β^+ и β^- , см. § 4.9) пропорционален постоянному магнитному полю, т. е. току в соленоиде¹⁾. Если, кроме того, предположить постоянные величины ($\beta^+ + \beta^-$) в рассматриваемом интервале напряженностей магнитного поля, то фарадеевское вращение плоскости поляризации, обусловленное изменением магнитного поля, не должно сопровождаться никакими сдвигами фазы.



Ф и г. 8.3.1. Балансный модулятор с двумя боковыми частотами.

Если между двумя прямоугольными волноводами с взаимно перпендикулярными широкими стенками поместить элемент, вращающий плоскость поляризации, используя при этом соответствующие переходы с круглого волновода на прямоугольный, то такое устройство может действовать как балансный модулятор. Поглощающие пластины размещаются, как показано на фиг. 8.3.1.

Преобразовав выражения (4.9.6.) и (4.9.7) с учетом сделанных выше допущений и оставив только составляющие a_y , получим

$$b_2 = \frac{|a_1|}{2} j [e^{j(\omega t + \psi_0 - \theta)} - e^{j(\omega t + \psi_0 + \theta)}], \quad (8.3.1)$$

где $\psi_0 = \varphi_0 - \theta_0$; θ_0 — фазовый сдвиг, одинаковый для обоих направлений круговой поляризации; $\beta^- d = \theta_0 + \theta$; $\beta^+ d = \theta_0 - \theta$; θ — составляющая фазового сдвига, пропорциональная приложенному магнитному полю.

¹⁾ Величина приложенного магнитного поля, необходимого для насыщения, зависит не только от свойств феррита, но прежде всего от формы применяемого образца. Отметим, что устройства, описанные в § 4.9, работают в области насыщения, тогда как в данном параграфе рассматриваются устройства с синусоидальными магнитными полями, имеющими нулевой средний уровень.

В отсутствие магнитного поля $\theta = 0$ и $b_2 = 0$.

Пусть под воздействием магнитного поля угол θ изменяется по синусоидальному закону с частотой ω_m и амплитудой α_0

$$\theta = \alpha_0 \cos \omega_m t. \quad (8.3.2)$$

Подставив соотношение (8.3.2) в (8.3.1), получим для b_2 выражение, которое в точности совпадает с выражением (8.2.25) и вещественная часть которого имеет следующий вид:

$$\text{Выходной сигнал в плече } 2 = |a_1| [2J_1(\alpha_0) \cos \omega_m t \sin(\omega t + \psi'_0) + 2J_3(\alpha_0) \cos 3\omega_m t \sin(\omega t + \psi'_0) + \dots], \quad (8.3.3)$$

где постоянная фаза обозначена через ψ'_0 . Удлиняя ферритовый стержень, можно увеличивать аргумент α_0 (амплитуду величины θ) до любых сколь угодно больших значений.

Следует отметить также, что выходной сигнал в плече 2 изменяется по тому же закону, что и волна, отраженная от одного из кристаллов в однополосном модуляторе. Таким образом, если распределить СВЧ-сигнал между двумя каналами, поместить в каждый из них устройство, показанное на фиг. 8.3.1, обеспечивая сдвиг по фазе на 90° между двумя модулирующими напряжениями, и осуществить сложение двух выходных сигналов в двойном тройнике (с плечами, отличающимися по длине на $\lambda_B/4$), то можно создать устройство, эквивалентное однополосному модулятору, показанному на фиг. 8.2.9.

Если на фиг. 8.3.1 один из прямоугольных волноводов повернуть вокруг оси на 90° , то получится амплитудный модулятор. Преобразовав выражения (4.9.6) и (4.9.7) и оставив только составляющие a_x , получим

$$b_2 = \frac{|a_1|}{2} [e^{j(\omega t + \psi_0 - \theta)} + e^{j(\omega t + \psi_0 + \theta)}]. \quad (8.3.4)$$

Но этот результат аналогичен выражению (8.2.24), и поэтому можно записать

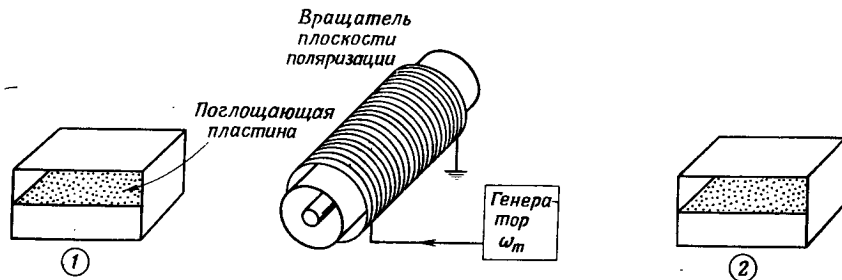
Выходной сигнал в плече 2 =

$$= |a_1| [J_0(\alpha_0) \cos(\omega t + \psi_0) - 2J_2(\alpha_0) \cos 2\omega_m t \cos(\omega t + \psi_0)] = |a_1| J_0(\alpha_0) \cos(\omega t + \psi_0) \left\{ 1 - \frac{2J_2(\alpha_0)}{J_0(\alpha_0)} \cos 2\omega_m t \right\}, \quad (8.3.5)$$

здесь $2J_2(\alpha_0)/J_0(\alpha_0)$ есть коэффициент модуляции. Поскольку α_0 может принимать любые значения, коэффициент $2J_2(\alpha_0)/J_0(\alpha_0)$ может быть как меньше, так и больше 1. При $\alpha_0 = 1,5 \text{ рад}$ коэффициент равен 1.

Комбинируя рассмотренные выше и некоторые другие схемы, можно осуществлять различные виды модуляции. Амплитудную

модуляцию можно, например, превратить в двухполосную с подавлением несущей, добавляя сигнал несущей, находящейся в противофазе. При малых индексах модуляции комбинация амплитудной и частотной модуляции позволяет осуществить однополосную модуляцию.



Ф и г. 8.3.2. Амплитудный модулятор.

Наконец, балансную амплитудную модуляцию (при малых индексах модуляции) можно превратить в амплитудную или частотную модуляцию, добавляя несущую, находящуюся в соответствующей фазе.

б. Использование ферритовых устройств для частотной модуляции. В § 8.2 было показано, как можно получить частотную модуляцию с помощью варакторов [уравнения (8.2.22) и (8.2.23)]. То же самое можно осуществить с помощью любого фазовращателя на феррите. В этом случае необратимость не дает никаких преимуществ и вообще не играет никакой роли. Существенна лишь однозначная связь фазового сдвига с меняющимся приложенным магнитным полем. Можно воспользоваться, например, невзаимным фазовращателем, изображенным на фиг. 4.9.2, заменив в нем постоянный магнит соленоидом. Частотный модулятор можно осуществить также, расположив между двумя четвертьволновыми пластинами ферритовый стержень, вращающий плоскость поляризации, и приложив к нему переменное магнитное поле. В этом случае фазовый сдвиг будет зависеть от напряженности поля.

Во всех этих примерах фазовый сдвиг не растет непрерывно, а изменяется по закону (8.3.2). В получающемся спектре содержится бесчисленное множество боковых частот, симметричных относительно ω и разнесенных одна от другой на ω_m .

в. Однополосная модуляция с помощью непрерывно возрастающего фазового сдвига и серродинное преобразование частоты. Если фазовый сдвиг растет во времени непрерывно

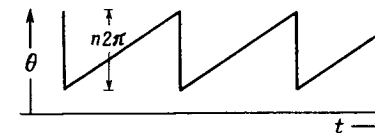
$$\theta = \pm \omega_m t + \theta_0, \quad (8.3.6)$$

то происходит преобразование сверхвысокой частоты от значения ω до величины $\omega \pm \omega_m$.

В волноводе, заканчивающемся короткозамыкающим поршнем, фаза отраженной волны в выбранной плоскости отсчета равна

$$\theta = \pi + \frac{4\pi d}{\lambda_B}, \quad (8.3.7)$$

где d — перемещение поршня. Если зависимость перемещения поршня от времени линейна, то фаза изменяется по закону (8.3.6). Но на практике физически невозможно осуществить непрерывное движение поршня в одном и том же направлении. Компромиссным решением является серродинное устройство, в котором поршень



Ф и г. 8.3.3. Закон изменения разности фаз при серродинном преобразовании частоты.

перемещается линейно на определенное расстояние, а затем скачком возвращается обратно, т. е., иными словами, движется по пилообразному закону. Для устранения паразитных гармоник необходимо, чтобы длительность обратного хода была очень мала и величина скачка фазы θ составляла $n2\pi$.

Такой же результат можно получить «электронным» путем, если в ферритовом устройстве, рассмотренном в п. «б», изменять ток по пилообразному закону, обеспечивая при этом линейность прямого хода, кратковременность обратного хода и совпадение скачка фазы с величиной $n2\pi$.

Прецизионный дифференциальный фазовращатель, описанный в § 4.8, представляет собой прибор, теоретически и практически удовлетворяющий уравнению (8.3.6). Непрерывное вращение (с помощью мотора) полуволновой секции, не внося никаких потерь, приводит к сдвигу частоты, равному удвоенной частоте вращения, так как фазовый сдвиг в точности равен удвоенному углу поворота секции вокруг своей оси. Для увеличения частотного сдвига можно соединить последовательно несколько таких полуволновых секций [см. уравнение (4.8.6)], каждая из которых вносит свой пропорциональный вклад в преобразование частоты¹⁾.

Электронным аналогом этого прибора является взаимный ферритовый фазовращатель, описанный в § 4.9, п. «д». Вращение поперечного магнитного поля достигается с помощью двух пар катушек,

¹⁾ Следует отметить, что для получения максимального сдвига частоты направления вращения секций должны чередоваться.

запитываемых синусоидальными напряжениями, одинаковыми по амплитуде и сдвинутыми по фазе на 90° (см. фиг. 4.9.10 и приложение VII). И на этот раз сдвиг частоты равен удвоенной частоте вращения магнитного поля.

§ 8.4. ПРИМЕНЕНИЕ ТУРНИКЕТНЫХ СОЕДИНЕНИЙ

а. **Согласованный четырехплечевой разветвитель мощности.** В § 3.8 было показано, что матрица рассеяния согласованного турникетного соединения имеет вид

$$[S] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.15')$$

Если в плечи 5 и 6 (фиг. 3.8.2) поступают одинаковые сигналы, амплитуда которых равна a , т. е. входной сигнал представляет собой поляризованную волну, плоскость поляризации которой наклонена под углом 45° , то выходные сигналы определяются из следующего соотношения:

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ a \\ a \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} a \\ a \\ -a \\ -a \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (8.4.1)$$

т. е. сигналы на выходе плеч 1, 2, 3 и 4 равны по амплитуде, но, однако, не все находятся в фазе.

б. **Согласованный трехплечевой разветвитель мощности.** Если в плечо 1 поступает сигнал a_1 , а в круглом волноводе (плечи 5, 6) на расстоянии θ от плоскостей отсчета помещен закорачивающий поршень, то выходные сигналы определяются из соотношения

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \\ b_6 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -b_5 e^{j2\theta} \\ -b_6 e^{j2\theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -\sqrt{2} b_5 e^{j2\theta} \\ a_1 - \sqrt{2} b_6 e^{j2\theta} \\ \sqrt{2} b_5 e^{j2\theta} \\ a_1 + \sqrt{2} b_6 e^{j2\theta} \\ \sqrt{2} a_1 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (8.4.2)$$

Следовательно, $b_6 = 0$, $b_5 = (1/\sqrt{2}) a_1$ и

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{1}{2} a_1 e^{j2\theta}, & b_3 &= \frac{1}{2} a_1 e^{j2\theta}, \\ b_2 &= \frac{1}{2} a_1, & b_4 &= \frac{1}{2} a_1. \end{aligned} \quad (8.4.3)$$

Таким образом, b_2 , b_3 и b_4 равны по величине и находятся в фазе если $\theta = n\pi$.

Однако $b_1 \neq 0$ и КСВН на входе равен

$$\text{КСВН} = \frac{|a_1| + |b_1|}{|a_1| - |b_1|} = 3,0. \quad (8.4.4)$$

В плече 1 необходимо предусмотреть вспомогательное согласующее устройство (см. приложение V). Если удалось добиться согласования, то сигнал, подводимый к плечу 1, будет по крайней мере в узком диапазоне частот поровну и без потерь распределяться между остальными тремя выходными прямоугольными волноводами.

в. **Турникетное соединение в качестве анализатора и поляризатора.** В § 3.8 было показано, что в противоположных плечах прямоугольного сечения закорачивающие поршни можно разместить несимметрично, соблюдая при этом условие $\theta_4 = \theta_2 + \pi/2$. В этом случае соединение имеет четыре действующих плеча, для которых

мы примем нумерацию, указанную на фиг. 3.8.4. Матрицу рассеяния такого устройства мы уже определили в следующем виде:

$$[S]_{\theta_2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -e^{j2\theta_2} \\ 0 & 0 & -1 & -e^{j2\theta_2} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -e^{j2\theta_2} & -e^{j2\theta_2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (3.8.18)$$

Свойства прибора сильно зависят от величины θ_2 .

1. При $\theta_2 = n\pi$ ($n = 1, 2, \dots$) матрица рассеяния принимает вид

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (8.4.5)$$

Рассматриваемое устройство действует как обычное мостовое соединение, отличаясь от него только объединением двух плеч (3 и 4 на фиг. 3.8.4) в одном волноводе. Если в плечо 1 поступает сигнал a , то выходные сигналы определяются следующим образом:

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a \\ -a \end{vmatrix} \quad (8.4.6)$$

т. е. имеются равные сигналы на выходах плеч 3 и 4 при отсутствии какого-либо сигнала в плече 4. Но эти два выходных сигнала можно рассматривать как одну линейно поляризованную волну, плоскость поляризации которой наклонена под углом 45° и направлена на фиг. 3.8.4 направо и вверх.

Если сигнал a поступает в плечо 2, то выходной сигнал будет иметь линейную поляризацию, направленную на фиг. 3.8.4 направо вниз.

Возможен и обратный процесс: линейно поляризованная волна, поступающая в цилиндрический волновод и имеющая произвольно направленную плоскость поляризации, будет разложена на две перпендикулярные составляющие, одна из которых направлена влево вниз, а другая вправо вниз. Первая поступает в плечо 1, а вторая — в плечо 2.

При $\theta_2 = n\pi + \pi/2$ прибор в основном работает по-прежнему и все сказанное выше справедливо, если только номера выходных волноводов поменять местами.

2. Если $\theta_2 = n\pi + \pi/4$, то свойства турникетного соединения качественно изменяются или по крайней мере должны быть выра-

жены по-другому. Матрица рассеяния принимает вид

$$[S] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \mp j \\ 0 & 0 & -1 & \mp j \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \mp j & \mp j & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (8.4.7)$$

Если в плечо 1 поступает сигнал a , то выходные сигналы выразятся теперь так:

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & \mp j \\ 0 & 0 & -1 & \mp j \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \mp j & \mp j & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \frac{a}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mp j \end{vmatrix} \quad (8.4.8)$$

т. е. в круглом волноводе появится волна круговой поляризацией. Теперь прибор действует подобно четвертьволновой пластине (см. § 4.7), в то же время заменяя собой переход с прямоугольного волновода на цилиндрический. Плоскость поляризации выходного сигнала вращается по часовой стрелке при $\theta_2 = n\pi + \pi/4$ и против часовой стрелки при $\theta_2 = n\pi - \pi/4$.

При заданном значении θ_2 сигнал a , поступающий в плечо 2, возбуждает в цилиндрическом волноводе волну, круговая поляризация которой направлена в противоположную сторону.

Возможен и обратный эффект. Если в цилиндрический волновод поступает сигнал, имеющий эллиптическую поляризацию, то он будет разложен на составляющие, поляризованные по кругу, одна из которых окажется в плече 1, а вторая — в плече 2. Здесь, однако, имеет место замечательное (и в то же время вполне объяснимое) явление: если сигнал a_1 из плеча 1 возбуждает в цилиндрическом волноводе сигнал с круговой поляризацией определенного знака, то при том же знаке круговой поляризации волна, поступающая в соединение через цилиндрический волновод, должна пройти в плечо 2. Этим явлением можно воспользоваться для коммутации непрерывных сигналов.

г. Коммутация непрерывных сигналов. Если турникетное соединение настроено на круговую поляризацию, т. е. $\theta_2 = \pi/4$, то, как указывалось выше, сигнал a_1 , поступающий в плечо 1, возбуждает на выходе цилиндрического волновода волну с правой круговой поляризацией. После отражения от любой изотропной поверхности (металл или диэлектрик, находящийся либо в самом цилиндрическом волноводе, либо в наружном облучаемом пространстве) эта волна вернется с обратным (левым) направлением круговой поляризации (см. приложение VII). Когда эта отраженная волна поступит обратно в турникетное соединение, выходной сигнал

будет наблюдаться только в плече 2. В матричной форме это записывается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & -1 & -j \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -j & -j & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a_1 \\ -ja_1 \end{pmatrix} \quad (8.4.8')$$

Например, сигнал, отраженный от закорачивающего поршня, определится в виде

$$a = \frac{e^{-j2\varphi_0}}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_1 \\ ja_1 \end{pmatrix} \quad (8.4.9)$$

где φ_0 — электрическое расстояние до закорачивающего поршня.

Выходной сигнал равен

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{pmatrix} = \frac{e^{-j2\varphi_0}}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -j \\ 0 & 0 & -1 & -j \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -j & -j & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_1 \\ ja_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.4.10)$$

Таким образом, турникетное соединение выполняет функции антенного переключателя, обеспечивающего развязку между выходом передатчика (плечо 1) и входом приемника (плечо 2)¹⁾.

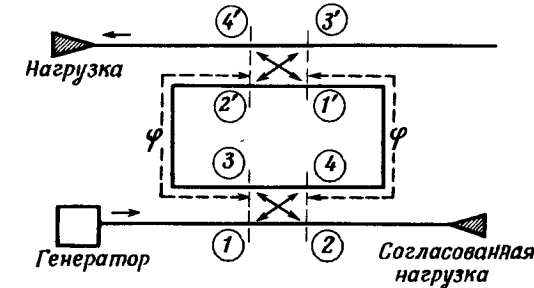
Это свойство можно использовать также в радиолокации для выделения анизотропных целей (например, самолетных винтов или закрылков) на фоне изотропных целей (например, дождевых капель). Изотропные цели будут отражать сигнал в плечо, противоположное тому, из которого он вышел. Анизотропные цели приведут к возникновению эллиптической поляризации, так что часть сигнала вернется обратно в исходное плечо. Таким образом, можно избавиться от паразитных отражений, используя при этом один и тот же канал как для передачи, так и для приема сигналов и подключив к этому каналу циркулятор или газоразрядный антенный переключатель.

Кроме рассмотренных применений турникетных соединений, представляет интерес турникетный циркулятор, описанный в § 4.9, п. «Г».

¹⁾ Отметим, что в турникетном соединении, настроенном на линейную поляризацию ($\theta_2 = \pi$ или $\theta_2 = \pi \pm \pi/2$), этот эффект не наблюдается, т. е. сигнал a_1 после отражения возвращается обратно в плечо 1.

§ 8.5. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФИЛЬТРЫ И УСТРОЙСТВА ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТ

а. Направленный фильтр на волноводах или полосковых линиях. Рассмотрим резонатор бегущей волны (фиг. 8.5.1), аналогичный резонатору, изображенному на фиг. 5.2.1, и отличающийся от него наличием второго точно такого же направленного ответвителя.



Ф и г. 8.5.1. Направленный фильтр.

Предположим для простоты, что оба ответвителя расположены симметрично, как показано на фигуре, и что потери отсутствуют (далее покажем, что это не приведет к существенным ошибкам при не слишком малых значениях k).

Во многих отношениях эта структура аналогична идеальному симметричному проходному резонатору, описанному в § 5.9, в том же смысле, в каком резонатор бегущей волны аналогичен обычному резонатору, включенному по схеме двухполосника. При резонансе вся мощность, поступающая в плечо 1, выходит из плеча 4. При отходе в сторону от резонанса мощность, поступающая в нагрузку, уменьшается, а оставшаяся часть мощности направляется в плечо 2, поглощаясь затем в согласованной нагрузке. Таким образом, во всем частотном диапазоне генератор работает на согласованную нагрузку.

— Пусть матрица рассеяния каждого направленного ответвителя имеет следующий вид, уже встречавшийся в § 5.2:

$$[S] = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 & jk \\ \sqrt{1-k^2} & 0 & jk & 0 \\ 0 & jk & 0 & \sqrt{1-k^2} \\ jk & 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.2.1)$$

Если внутри кольца неоднородностей нет, то на вход первого ответвителя поступают следующие сигналы:

$$\begin{aligned} a_1, \\ a_2 = 0, \\ a_3 = b'_3 e^{-j\varphi}, \\ a_4 = 0. \end{aligned} \quad (8.5.1)$$

Входные сигналы второго ответвителя соответственно равны

$$\begin{aligned} a'_1 = b_4 e^{-j\varphi}, \\ a'_2 = 0, \\ a'_3 = b'_3 = 0, \\ a'_4 = 0. \end{aligned} \quad (8.5.2)$$

Выходные сигналы второго ответвителя записываются в виде

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ b'_3 \\ b'_4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 & jk \\ \sqrt{1-k^2} & 0 & jk & 0 \\ 0 & jk & 0 & \sqrt{1-k^2} \\ jk & 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_4 e^{-j\varphi} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 \\ \sqrt{1-k^2} b_4 e^{-j\varphi} \\ 0 \\ jk b_4 e^{-j\varphi} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

т. е.

$$\begin{aligned} b'_2 = \sqrt{1-k^2} b_4 e^{-j\varphi}, \\ a_3 = \sqrt{1-k^2} b_4 e^{-j2\varphi}. \end{aligned} \quad (8.5.4)$$

Следовательно, выходные сигналы первого (входного) ответвителя равны

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 & jk \\ \sqrt{1-k^2} & 0 & jk & 0 \\ 0 & jk & 0 & \sqrt{1-k^2} \\ jk & 0 & \sqrt{1-k^2} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ 0 \\ \sqrt{1-k^2} b_4 e^{-j2\varphi} \\ 0 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 0 \\ \sqrt{1-k^2} a_1 + jk \sqrt{1-k^2} b_4 e^{-j2\varphi} \\ 0 \\ jk a_1 + (1-k^2) b_4 e^{-j2\varphi} \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (8.5.5)$$

т. е.

$$\begin{aligned} b_2 = \sqrt{1-k^2} a_1 + jk \sqrt{1-k^2} b_4 e^{-j2\varphi}, \\ b_4 = jk a_1 + (1-k^2) b_4 e^{-j2\varphi} \end{aligned} \quad (8.5.5')$$

или

$$b_4 = \frac{jka_1}{1 - (1-k^2)e^{-j2\varphi}}. \quad (8.5.6)$$

При $\varphi = n\pi$ эта величина достигает своего максимального значения

$$b_4 = j \frac{a_1}{k}. \quad (8.5.6')$$

Согласно уравнению (8.5.5'),

$$b_2 = 0. \quad (8.5.7)$$

Интересно отметить, что такой же результат можно получить непосредственно из уравнений (5.2.6') и (5.2.5'), заменив величину $e^{-\alpha_T}$, характеризующую омические потери, выражением $\sqrt{1-k^2}$, определяющим внешние потери.

Из уравнений (8.5.3) и (8.5.6') при $\varphi = n\pi$ (условие резонанса) имеем

$$b'_4 = jk b_4 e^{-j\varphi} = \pm a, \quad (8.5.8)$$

знак зависит от четности числа n .

Для оценки широкополосности такого устройства можно воспользоваться способом, описанным в приложении XV, где, однако, не учитывается энергия, накопленная в направленных ответвителях.

Накопленная энергия $U_{\text{нак}}$ равна

$$U_{\text{нак}} = \frac{2Pl}{v_{\text{гp}}} = \frac{2l}{v_{\text{гp}}} \frac{1}{2} |b_4|^2, \quad (8.5.9)$$

где $l = n\lambda_B/2$ — длина, соответствующая требуемому значению φ . Энергия, рассеиваемая на расстоянии, соответствующем одному радиану, как во входном, так и в выходном ответвителях равна

$$U_{\text{расс}} = \frac{1}{2} \frac{k^2}{\omega} |b_4|^2. \quad (8.5.10)$$

Таким образом, внешняя добротность

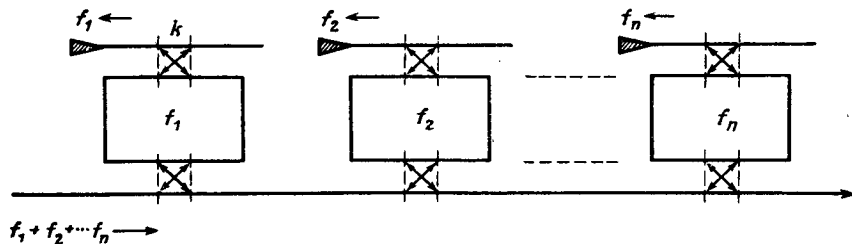
$$Q_{\text{вн}} = 2\pi \frac{U_{\text{нак}}}{U_{\text{расс}} \cdot \text{за период}} = \frac{2\pi n}{k^2} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda} \right)^2, \quad (8.5.11)$$

и, следовательно, нагруженная добротность

$$Q_{\text{н}} = \frac{Q_{\text{вн}}}{2} = \frac{\pi n}{k^2} \left(\frac{\lambda_B}{\lambda} \right)^2. \quad (8.5.12)$$

Полосу можно сузить, уменьшая k или увеличивая n . Но с увеличением n к рабочей частоте приближаются другие резонансы.

Как показано на фиг. 8.5.2, направленные фильтры бегущей волны, настроенные на частоты $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n$, можно включить каскадно, осуществив таким образом устройство для разделения частот. Сигнал каждой частоты поглощается своей цепью, в то время как остальные сигналы продолжают беспрепятственно распространяться по фидеру. Такую систему удобно осуществить на



Ф и г. 8.5.2. Разделение частот с помощью направленных фильтров бегущей волны.

полосковых линиях, так как в волноводном исполнении она довольно громоздка. В последнем случае можно воспользоваться более компактным устройством, рассматриваемым ниже.

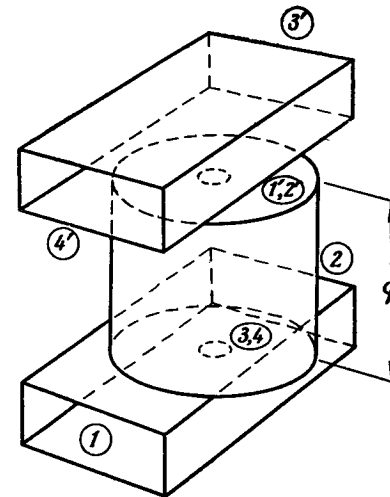
б. Волноводный направленный фильтр. Основой рассматриваемого устройства является направленный ответвитель, осуществляющий связь между прямоугольным и цилиндрическим волноводами и описанный в § 4.5, п. «д». Для правильного выбора плоскостей включения входного и выходного ответвителей можно воспользоваться уравнением (5.2.1). Каждое направление круговой поляризации в волноводе целесообразно рассматривать как отдельное плечо.

Входной сигнал a_1 выходит из нижнего соединения (фиг. 8.5.3) в виде волн b_2 и b_4 , которые в сумме образуют волну с круговой поляризацией определенного знака. При отражении направление поляризации сохраняется, но теперь входная волна a_3 в основном отражается обратно (b_4), а небольшая ее доля просачивается в плечо 2 (b_2). В плечо 1 сигнал не возвращается, и оно все время остается согласованным со стороны входа.

Путь, проходимый волной внутри резонатора (туда и обратно), равен удвоенной его длине, и, следовательно, угол φ (см. фиг. 8.5.1) совпадает теперь с электрической длиной резонатора.

Не упуская из виду перечисленные выше особенности, можно утверждать, что направленный фильтр с круговой поляризацией действует по тому же принципу, что и резонатор бегущей волны, показанный на фиг. 8.5.1. В частности, все выведенные ранее формулы непосредственно применимы и к данному случаю.

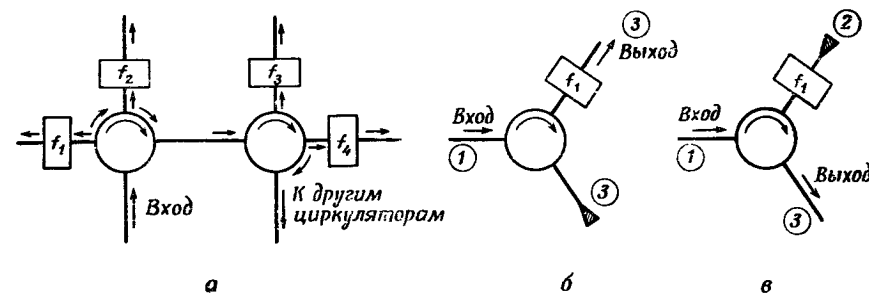
Известны и другие разновидности таких элементов связи [32], но все они непременно содержат *направленные ответвители*. Ответвление с помощью простого тройника на входе привело бы к образованию стоячей волны, так как сигнал, выходящий из объемного



Ф и г. 8.5.3. Направленный фильтр с круговой поляризацией.

резонатора, распределялся бы между плечами 1 и 2. В выходном ответвителе происходило бы точно такое же распределение сигнала между плечами 3 и 4, а значит, уравнение (8.5.8) утратило бы силу.

в. Разделение частот с помощью циркуляторов и полосковых фильтров. Разделение частот по каналам можно осуществить

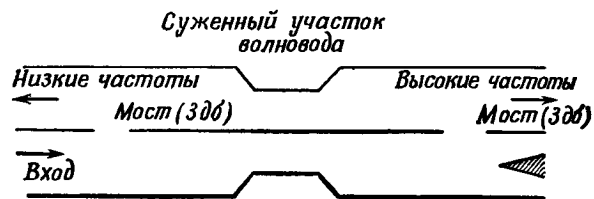


Ф и г. 8.5.4. Разделители частот и фильтры с использованием циркуляторов.

с помощью устройства, показанного на фиг. 8.5.4, а. Из сложного входного сигнала выделяются частоты $f_1, f_2, f_3, f_4, \dots$ и направляются по соответствующим каналам. В частности, если необходимо

выделить только одну частоту, то к плечу 2 циркулятора присоединяют фильтр, а к плечу 3 — согласованную нагрузку (фиг. 8.5.4, б). На выход (плечо 2) приходит сигнал, определяемый характеристикой фильтра, тогда как вход всегда согласован. С другой стороны, к фильтру в плече 2 можно подсоединить согласованную нагрузку, что позволит исключить из плеча 3 составляющую с частотой f_1 (фиг. 8.5.4, в).

г. **Фильтры с использованием мостовых соединений.** В данном частотном диапазоне верхние частоты можно отделить от нижних с помощью устройства, показанного на фиг. 8.5.5, если, конечно,



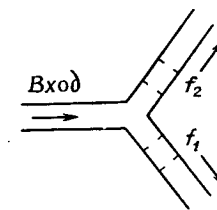
Ф и г. 8.5.5. Фильтр, разделяющий диапазоны частот.

применяемое в нем мостовое соединение удовлетворительно работает на всех рассматриваемых частотах. Граница разделения частот определяется размером широкой стенки суженного участка волновода и может регулироваться произвольно. Выделенные интервалы частот можно подвергнуть дальнейшему разделению и использовать по назначению.

Суженные участки волновода, показанные на фиг. 8.5.5, можно заменить проходными резонаторами или фильтрами. В результате этой замены получится полосовой пропускающий фильтр, согласованный во всем диапазоне частот, или полосовой заградительный фильтр, если вывод энергии производится через нижний волновод. Эти два устройства во многом напоминают циркуляторы, показанные на фиг. 8.5.4, б и в.

д. **Тройниковые разделители частот.** В некоторых случаях разделение частот можно осуществлять с помощью обычных тройников [5] и соответствующих полосовых фильтров (фиг. 8.5.6). Плоскость эффективного короткого замыкания фильтра должна располагаться таким образом, чтобы вдали от резонанса достигалась беспрепятственная передача сигнала между остальными плечами. Для проведения количественных расчетов можно воспользоваться уравнениями § 3.4—3.6. Отметим, в частности, что если волноводное соединение не обладает аксиальной симметрией или по крайней мере не выглядит электрически симметричным, то может оказаться, что

плоскость эффективного короткого замыкания можно расположить указанным выше образом только в каком-то одном плече.



Ф и г. 8.5.6. Тройниковый разделитель частот.

е. **Резонаторный фильтр с двумя перпендикулярно поляризованными волнами.** Резонаторный фильтр с двумя перпендикулярно поляризованными волнами очень похож на резонаторный дискриминатор с раздвоенным резонансом, показанный на фиг. 8.2.5. Различие этих устройств состоит только в том, что ввод и вывод энергии производятся через два перпендикулярно направленных волновода, связанных с волнами в резонаторе, плоскости поляризации которых взаимно перпендикулярны (волновод с детектором 1 может, например, являться входным, а волновод с детектором 2 — выходным). Таким образом, входной сигнал возбуждает в резонаторе вид колебаний TE_{1p} с определенной пространственной ориентацией.

Если ввести в резонатор симметричную неоднородность, благодаря которой возбуждается вид колебаний с перпендикулярно направленной плоскостью поляризации, связанный с выходным волноводом, то рассматриваемая система будет действовать подобно двум резонаторам с непосредственной связью (см. § 6.2). В частности, если связь между двумя перпендикулярно поляризованными видами колебаний доведена до критической, то характеристика передачи (без учета потерь) будет описываться выражением (6.1.25). Преимущество такого устройства заключается в том, что настройка обоих видов колебаний производится одним и тем же элементом. По простоте настройки такой фильтр эквивалентен одному резонатору, а по своей характеристике передачи он равноценен двум связанным резонаторам.

ж. **Подавление гармоник.** Подавление гармоник в волноводе можно осуществить путем вывода их во вспомогательные волноводы уменьшенного сечения через большое количество щелей связи. В этих вспомогательных волноводах находятся поглотители, в которых рассеиваются гармонические составляющие. Хотя каждая отдельно взятая щель обеспечивает довольно слабую связь, можно достигнуть любой степени подавления гармоник, применяя доста-

Эти матрицы можно рассматривать как квадратные, имеющие $(n-1)$ столбцов из нулей. Однако более целесообразно рассматривать их как особые матрицы, называемые векторами, так как они имеют совершенно иной физический смысл, чем матрицы $[z]$, $[y]$ и $[S]$.

Матрицы-столбцы (векторы) v, i являются либо входными, либо выходными величинами; матрицы $[z]$, $[y]$ и $[S]$ определяют те преобразования, которые осуществляются многополосником над векторами.

Основные определения и алгебраические действия

а. Равенство двух матриц $[A]=[B]$ имеет место тогда и только тогда, когда $A_{ij}=B_{ij}$ ¹⁾.

б. Сложение и вычитание матриц: если $[A] \pm [B]=[C]$, то $C_{ij}=A_{ij} \pm B_{ij}$.

Замечания: 1. Сложение коммутативно, т. е. $[A]+[B]=[B]+[A]$.

2. Сложение ассоциативно: $[A]+[B]+[C]=([A]+[B])+[C]$.

в. Умножение матрицы $[A]$ на скаляр m : если $m[A]=[C]$, то $C_{ij}=mA_{ij}$.

г. Умножение квадратных матриц: если $[A][B]=[C]$, то $C_{ij}=\sum_{p=1}^n A_{ip}B_{pj}$, т. е. элемент C_{ij} произведения матриц $[A]$ и $[B]$ равен сумме произведений элементов i -й строки матрицы $[A]$ на элементы j -го столбца матрицы $[B]$.

Замечания: 1. Умножение ассоциативно: $[A]([B][C])=([A][B])[C]$.

2. Умножение дистрибутивно: $[A]([B]+[C])=[A][B]+[A][C]$.

3. Умножение в общем случае не коммутативно: $[A][B] \neq [B][A]$ ²⁾.

д. Умножение квадратной матрицы на матрицу-столбец: если $[A]a=b$, то b представляет собой матрицу-столбец, у которой $b_i=\sum_{p=1}^n A_{ip}a_p$ ³⁾.

¹⁾ Коэффициент A_{ij} представляет собой элемент матрицы $[A]$, расположенный в i -й строке и j -м столбце.

²⁾ Чтобы две матрицы были коммутативными, они должны обладать специальными свойствами (например, иметь один и тот же собственный вектор, см. § 3.1).

³⁾ a можно рассматривать как квадратную матрицу, имеющую $(n-1)$ столбцов из нулей; в этом случае можно применить правило п. «г».

е. Умножение матрицы-строки a^T на квадратную матрицу $[A]$: если $a^T[A]=b^T$, то b^T — матрица-строка и $b_j=\sum_{q=1}^n A_{qj}a_q$ ¹⁾.

ж. Умножение векторов: $a^T \cdot b = \sum_{i=1}^n a_i b_i$ есть число.

Замечания: 1. $a^T \cdot b = b^T \cdot a$.

2. Произведения $a \cdot b$ и $a \cdot b^T$ не рассматриваются.

з. Понятия деления матриц (за исключением деления на число) не существует. Однако может быть использована обратная матрица $[A]^{-1}$, определение которой дано ниже.

и. Детерминант матрицы $\det[A]$ представляет собой число, равное сумме $n!$ слагаемых типа $\pm A_{i_1} \cdot A_{2j_2} \cdot A_{3k_3} \cdot \dots \cdot A_{ns}$, где i, j, k, \dots, s соответствуют $n!$ перестановкам из чисел $1, 2, 3, \dots, n$. Знак «+» или «-» перед каждым слагаемым определяется числом инверсий в каждой перестановке; если число инверсий четное, то берется знак «+», в противном случае знак «-».

к. Минором A_{ij} называется детерминант матрицы, полученной вычеркиванием i -й строки и j -го столбца матрицы $[A]$.

л. Алгебраическим дополнением \mathcal{A}_{ij} минора A_{ij} называется минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$.

м. Транспонированная матрица $[A]^T$ получается из исходной матрицы $[A]$ путем замены строк на столбцы. Диагональные элементы при этом не меняются.

н. Симметричной матрицей называется матрица, у которой $A_{ij}=A_{ji}$. Симметричная матрица равна своей транспонированной матрице.

о. Диагональной матрицей называется матрица, все элементы которой, кроме диагональных ($A_{11}, A_{22}, A_{33}, \dots, A_{nn}$), равны нулю.

п. Диагональная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, называется единичной.

р. Матрицей, присоединенной для $[A]$, $\text{adj}[A]$, называется матрица, полученная транспонированием матрицы $[A]$ и заменой элементов этой матрицы A_{ij} на соответствующие алгебраические дополнения \mathcal{A}_{ij} .

с. Матрица $[A]^{-1}$ называется обратной к матрице $[A]$, если $[A][A]^{-1}=[A]^{-1}[A]=[I]$ ²⁾

$$[A]^{-1} = \frac{\text{adj}[A]}{\det[A]}$$

¹⁾ a^T — матрица, полученная транспонированием матрицы-столбца a (элементы столбцов матрицы a перенесены в строки матрицы b). Транспонированная матрица a^T может рассматриваться как квадратная матрица, имеющая $(n-1)$ строк из нулей; в этом случае может быть использовано правило п. «г». Отметим, что в настоящей книге произведение $a[A]$ не рассматривается.

²⁾ Доказательство того, что матрица $[A]^{-1}$ коммутативна с матрицей $[A]$, приведено в § 3.2, п. «з».

г. Если матрица $[B]$ — комплексно сопряженная к заданной $[A]$ ($[A]^* = [B]$), то $B_{ij} = A_{ij}^*$.

у. Если матрица $[B]$ — эрмитово сопряженная к матрице $[A]$ ($[A]^H = [B]$), то $B_{ij} = A_{ji}^*$, при этом

$$[A]^H = ([A]^T)^* = ([A]^*)^T.$$

ф. Если матрица $[A]$ ортогональна¹⁾, то $[A]^T [A] = [I]$. Но из пункта «с» следует, что если $[A]^T [A] = [I]$, то $[A]^T = [A]^{-1}$.

х. Унитарной называется такая матрица, для которой $[A]^H [A] = [I]$. Отметим, что если $[A]$ является действительной и унитарной матрицей, то она ортогональна. Если матрица $[A]$ симметрична, то она унитарна, когда $[A]^* [A] = [I]$.

ц. Два вектора \mathbf{a} и \mathbf{b} ортогональны, если

$$\mathbf{a}^H \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^n a_i^* b_i = 0.$$

ч. Модуль вектора \mathbf{a} равен $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$.

ш. Если матрица $[A]'$ является производной матрицы $[A]$ по ω , то $A'_{ij} = dA_{ij}/d\omega$.

щ. О собственных значениях матриц см. § 3.2.

Теоремы

I. $([A][B])^* = [A]^* [B]^*$.

Доказательство. $[C] = ([A][B])^*$, где

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^n (A_{ip} B_{pj})^* = \sum_{p=1}^n A_{ip}^* B_{pj}^*.$$

II. $([A][B])^T = [B]^T [A]^T$.

Доказательство. $[C] = ([A][B])^T$, где $C_{ij} = \sum_{p=1}^n A_{jp} B_{pi}$,

$$[C'] = [B]^T [A]^T, \text{ где } C'_{ij} = \sum_{p=1}^n B_{pi} A_{jp},$$

следовательно, $C_{ij} = C'_{ij}$.

III. $([A][B])^{-1} = [B]^{-1} [A]^{-1}$.

¹⁾ Иногда такую матрицу называют ортонормальной; при этом ортогональной называют матрицу $[A]$, для которой $[A][A]^T = m[I]$.

Доказательство. Умножим обе части равенства на $([A][B])$

$$([A][B])([A][B])^{-1} \stackrel{?}{=} ([A][B])[B]^{-1}[A]^{-1},$$

$$[I] = [A]([B][B]^{-1})[A]^{-1} = [A][A]^{-1} = [I].$$

IV. Если столбцы матрицы $[A]$ или ее строки являются ортогональными векторами, равными по модулю 1, то эта матрица ортогональна.

Доказательство. Положим, что столбцы матрицы $[A]$ ортогональны. Тогда

$$[A]^T [A] = [C] = [I],$$

так как

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^n A_{pi} A_{pj} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ 1 & \text{при } i = j. \end{cases}$$

Поскольку $[A]^T = [A]^{-1}$ и $[A]^{-1}$ коммутативна с матрицей $[A]$, то

$$[A]^T [A] = [A][A]^T = [I].$$

Приложение II

ТЕОРЕМА ФОСТЕРА

Рассмотрим двухполосник без потерь. Запишем уравнения Максвелла (1.1.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= j\omega\epsilon\mathbf{E}. \end{aligned} \quad (\text{II.1})$$

Возьмем комплексно сопряженную величину от второго уравнения. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^* &= -j\omega\epsilon\mathbf{E}^*. \end{aligned} \quad (\text{II.2})$$

Пусть круговая частота ω изменится на малую величину $d\omega$, что приведет к соответствующим изменениям \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{H}^* на $d\mathbf{E}$, $d\mathbf{H}$ и $d\mathbf{H}^*$. Уравнения (II.2) в этом случае примут вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} (\mathbf{E} + d\mathbf{E}) &= -j(\omega + d\omega)\mu(\mathbf{H} + d\mathbf{H}), \\ \operatorname{rot} (\mathbf{H}^* + d\mathbf{H}^*) &= -j(\omega + d\omega)\epsilon(\mathbf{E}^* + d\mathbf{E}^*). \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

Вычитая уравнения (II.2) из уравнений (II.3) и пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} d\mathbf{E} &= -j\omega\mu d\mathbf{H} - j\omega\mu\mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} d\mathbf{H}^* &= -j\omega\epsilon d\mathbf{E}^* - j\omega\epsilon\mathbf{E}^*. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Запишем следующее тождество:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{[\mathbf{E} d\mathbf{H}^*] - [d\mathbf{E} \mathbf{H}^*]\} &= \\ = (d\mathbf{H}^* \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} d\mathbf{H}^*) - (\mathbf{H}^* \operatorname{rot} d\mathbf{E} - d\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}^*). \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

После подстановки в него уравнений (II.2) и (II.4) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \{[\mathbf{E} d\mathbf{H}^*] + [d\mathbf{E} \mathbf{H}^*]\} &= (-j\omega\mu\mathbf{H} d\mathbf{H}^* + j\omega\epsilon\mathbf{E} d\mathbf{E}^* + \\ &+ j\omega\epsilon\mathbf{E}^* d\mathbf{E}) - (-j\omega\mu\mathbf{H}^* d\mathbf{H} - j\omega\mu\mathbf{H}\mathbf{H}^* + \\ &+ j\omega\epsilon\mathbf{E}^* d\mathbf{E}) = j\omega(\epsilon|E|^2 + \mu|H|^2). \end{aligned} \quad (\text{II.6})$$

Интегрируя уравнение (II.6) по объему двухполосника и применяя теорему Остроградского—Гаусса, получаем

$$\int_S \{[\mathbf{E} d\mathbf{H}^*] - [d\mathbf{E} \mathbf{H}^*]\} da = j\omega \int_V (\mu|H|^2 + \epsilon|E|^2) dv, \quad (\text{II.7})$$

где интеграл в левой части берется только по поперечному сечению плоскости отсчета (§ 1.5).

Обозначим

$$\int_S [\mathbf{E} d\mathbf{H}^*] da \quad \text{через} \quad -v di^* \quad [\text{уравнение (1.4.3)}]^1),$$

$$\int_S [d\mathbf{E} \mathbf{H}^*] da \quad \text{через} \quad -dvi^* \quad [\text{уравнение (1.4.3)}],$$

$$\int_V \epsilon|E|^2 dv \quad \text{через} \quad 4U_E \quad [\text{уравнение (1.1.11)}],$$

$$\int_V \mu|H|^2 dv \quad \text{через} \quad 4U_H \quad [\text{уравнение (1.1.12)}].$$

Подстановка этих обозначений в уравнение (II.7) дает

$$v di^* - dvi^* = -4j d\omega (U_E + U_H), \quad (\text{II.8})$$

где v и i определяются в квадратурах.

По определению

$$v = \bar{z}i, \quad (\text{II.9})$$

$$dv = d\bar{z}i + \bar{z} di.$$

С учетом уравнений (II.9) уравнение (II.8) преобразуется к виду

$$\bar{z}i di^* - d\bar{z}i^* - \bar{z}i^* di = -4j d\omega (U_E + U_H),$$

или

$$|i|^2 d\bar{z} = 4j d\omega (U_E + U_H), \quad (\text{II.10})$$

так как $i di^* = i^* di$.

Если потери в двухполоснике отсутствуют, то $\bar{z} = j\bar{x}$ является чисто реактивным сопротивлением, т. е. x — действительная величина. Запишем теперь уравнение (II.10) в виде

$$\frac{d\bar{x}}{d\omega} = \frac{4(U_E + U_H)}{|i|^2}. \quad (\text{II.11})$$

Так как величины U_E , U_H и $|i|^2$ являются действительными и больше нуля, то

$$\frac{d\bar{x}}{d\omega} \geq 0, \quad (\text{II.12})$$

т. е. наклон кривой зависимости реактивного сопротивления от частоты всегда положителен.

¹⁾ Относительно знака «—» см. сноску на стр. 43.

Аналогичные рассуждения можно провести относительно проводимости \bar{y} двухполюсника без потерь: $\bar{y} = j\bar{b}$, где \bar{b} — действительная величина.

Подставляя

$$i^* = \bar{y}^* v^* \quad (II.13)$$

и

$$di^* = d\bar{y}^* v^* + \bar{y}^* dv^*$$

в уравнение (II.8), получаем

$$v(d\bar{y}^* v^* + \bar{y}^* dv^*) - \bar{y}^* v^* dv = -4j d\omega (U_E + U_H),$$

или, так как $v dv^* = v^* dv$,

$$|v|^2 d\bar{y}^* = -4j d\omega (U_E + U_H). \quad (II.14)$$

Поскольку $d\bar{y}^* = -j d\bar{b}$, уравнение (II.14) дает

$$\frac{d\bar{b}}{d\omega} = \frac{4(U_E + U_H)}{|v|^2} \geq 0. \quad (II.15)$$

Таким образом, кривая зависимости реактивной проводимости от частоты также имеет положительный наклон.

Полученные результаты легко можно обобщить на многополюсник. В этом случае уравнение (II.7) запишется в виде

$$\int_{S_1 + S_2 + \dots + S_n} \{[E dH^*] - [dEH^*]\} da = 4j d\omega (U_E + U_H), \quad (II.16)$$

где поверхностный интеграл берется по площади всех плоскостей отсчета.

Выразим уравнение (II.16) через v_p и i_p

$$\sum_{p=1}^n (v_p di_p^* - dv_p i_p^*) = -4j d\omega (U_E + U_H). \quad (II.17)$$

Так как

$$v_p = \sum_{q=1}^n \bar{z}_{pq} i_q, \quad (1.4.18)$$

то можно записать, что

$$dv_p = \sum_{q=1}^n (d\bar{z}_{pq} i_q + \bar{z}_{pq} di_q), \quad (II.18)$$

и уравнение (II.17) тогда преобразуется к виду

$$\sum_{p=1}^n \left[\left(\sum_{q=1}^n \bar{z}_{pq} i_q \right) di_p^* - \left\{ \sum_{q=1}^n (d\bar{z}_{pq} i_q + \bar{z}_{pq} di_q) \right\} i_p^* \right] = -4j d\omega (U_E + U_H).$$

Если, как и раньше, $\bar{z}_{pq} = j\bar{x}_{pq}$, то последнее уравнение упрощается

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n i_q i_p^* d\bar{z}_{pq} = 4j d\omega (U_E + U_H) \quad (II.19)$$

или

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n i_q i_p^* \frac{d\bar{x}_{pq}}{d\omega} = 4(U_E + U_H) \geq 0. \quad (II.20)$$

Можно показать с помощью правил, приведенных в приложении I, что

$$\sum_{p=1}^n \sum_{q=1}^n i_q i_p^* \bar{x}'_{pq} = \frac{i_1^* i_2^* i_3^* \dots i_n^*}{\begin{vmatrix} \bar{x}'_{11} & \bar{x}'_{12} & \dots & \bar{x}'_{1n} \\ \bar{x}'_{21} & \bar{x}'_{22} & \dots & \bar{x}'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{x}'_{n1} & \bar{x}'_{n2} & \dots & \bar{x}'_{nn} \end{vmatrix}} \begin{vmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \dots \\ i_n \end{vmatrix} = 4(U_E + U_H) \geq 0, \quad (II.21)$$

где вместо $d\bar{x}_{pq}/d\omega$ стоит \bar{x}'_{pq} , или в сокращенной форме

$$i^H [\bar{x}'] i = 4(U_E + U_H) \geq 0. \quad (II.21')$$

Можно показать, что из уравнения (II.21') следует [33]

$$\det [\bar{x}'] \geq 0. \quad (II.22)$$

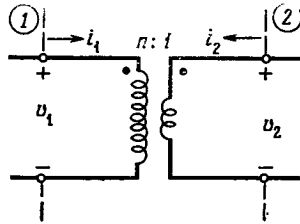
Приложение III



МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ПРОСТЕЙШИХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

1. Идеальный трансформатор

Рассмотрим идеальный трансформатор (фиг. III.1) с отношением витков $n:1$. Выходные величины напряжения и тока v_2 и i_2 можно



Ф и г. III.1. Идеальный трансформатор.

выразить через входные величины v_1 и i_1 следующим образом:

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{1}{n} v_1, \\ i_2 &= -n i_1, \end{aligned} \tag{III.1}$$

или, используя a и b из уравнений (2.2.1) и (2.2.2),

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &= \frac{1}{n} (a_1 + b_1), \\ a_2 - b_2 &= -n (a_1 - b_1). \end{aligned} \tag{III.2}$$

Если на вход 1 подается волна a_1 , а вход 2 согласован ($a_2 = 0$), то

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= n b_2, \\ a_1 - b_1 &= \frac{1}{n} b_2, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{aligned} b_2 &= \frac{2n}{1+n^2} a_1 \\ b_1 &= \frac{n^2-1}{n^2+1} a_1 \end{aligned} \right\}_{a_2=0}$$

Аналогично, если на вход 2 подается волна a_2 , а вход 1 согласован ($a_1 = 0$), то

$$\begin{aligned} a_2 + b_2 &= \frac{1}{n} b_1, \\ a_2 - b_2 &= n b_1, \end{aligned}$$

отсюда

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= \frac{2n}{1+n^2} a_2 \\ b_2 &= \frac{1-n^2}{1+n^2} a_2 \end{aligned} \right\}_{a_1=0}$$

Таким образом, матрица рассеяния идеального трансформатора запишется в виде

$$[S] = \frac{1}{1+n^2} \begin{vmatrix} -(1-n^2) & 2n \\ 2n & (1-n^2) \end{vmatrix} \tag{III.3}$$

Элементы матрицы рассеяния оказываются равными

$$s_{11} = -s_{22} = \frac{n^2-1}{1+n^2}, \tag{III.4}$$

$$s_{12} = \frac{2n}{1+n^2},$$

откуда

$$n^2 = \frac{1+s_{11}}{1-s_{11}} = \frac{1-s_{22}}{1+s_{22}}. \tag{III.5}$$

Отметим здесь, что, поскольку все элементы матрицы рассеяния — действительные величины, представление СВЧ-устройства в виде идеального трансформатора возможно только в том случае, если устройство не имеет потерь, а плоскости отсчета расположены в максимуме или минимуме стоячей волны при согласованном противоположном входе. При $n > 1$ плоскость отсчета 1 будет находиться в максимуме ($s_{11} > 0$), а плоскость отсчета 2 — в минимуме ($s_{22} < 0$) стоячей волны.

Соответственно этому четырехполюсник без потерь и с произвольно расположенными плоскостями отсчета можно представить идеальным трансформатором и отрезками передающей линии.

Пусть матрица рассеяния устройства имеет вид

$$[S] = \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{vmatrix}$$

Передвинем плоскость отсчета 1 на электрический угол θ_1 в точку 1', а плоскость отсчета 2 на угол θ_2 в точку 2'.

θ_1 и θ_2 выберем так, чтобы получить действительные значения элементов матрицы рассеяния, причем элемент s_{11} должен быть положительным, а s_{22} — отрицательным.

На основании уравнения (2.3.9) матрица $[S]$ переходит в $[S']$

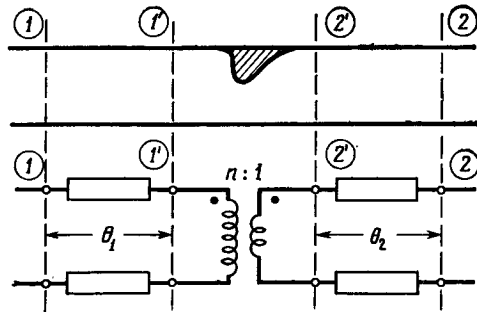
$$[S'] = \begin{bmatrix} s'_{11} & s'_{12} \\ s'_{21} & s'_{22} \end{bmatrix}$$

где элементы

$$s'_{11} = s_{11}e^{j(\theta_1 + \theta_1)} \text{ — действительный, положительный,}^1$$

$$s'_{22} = s_{22}e^{j(\theta_2 + \theta_2)} \text{ — действительный, отрицательный.}$$

Кроме того, $s'_{12} = s_{12}e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ автоматически окажется действительной величиной, если рассматривается система без потерь. Действ-



Ф и г. III.2. Четырехполюсник и его эквивалентная схема.

вительно, в силу свойства унитарности элемент матрицы $[s'] [s']^*$, стоящий на пересечении 1-го ряда и 2-го столбца, равен нулю

$$s'_{11}s'_{12}^* + s'_{12}s'_{22}^* = 0.$$

Но $s'_{22} = s'_{22}^*$, поэтому

$$s'_{12} = -s'_{12}^* \left(\frac{s'_{11}}{s'_{22}} \right).$$

Так как $s'_{11}/s'_{22} = -1$ ¹⁾, то $s'_{12} = s'_{12}^*$, т. е. элемент s'_{12} — действительный.

Эквивалентная схема четырехполюсника показана на фиг. III.2 ($n > 1$), где $n = \sqrt{(1 + s'_{11})/(1 - s'_{11})}$.

Если $n < 1$, то θ_1 и θ_2 следует изменить так, чтобы элемент s'_{11} был отрицательным, а $s'_{22} = -s'_{11}$ — положительным.

¹⁾ На основании свойства унитарности $s'_{11}^2 + |s'_{12}|^2 = [1]$ и $s'_{22}^2 + |s'_{12}|^2 = [1]$. Следовательно, $s'_{11}^2 = s'_{22}^2$ или $s'_{11} = \pm s'_{22}$. Так как $s'_{11} > 0$, а $s'_{22} < 0$, то $s'_{11} = -s'_{22}$.

Одним из преимуществ представления эквивалентной схемы СВЧ-устройства в виде идеального трансформатора является простота трансформации полных сопротивлений.

Пусть \bar{z}'_2 есть нормированное полное сопротивление в плече 2' (фиг. III.2). Тогда из уравнения (III.1) и определения \bar{z}'_2 имеем

$$\bar{z}'_2 = \frac{v'_2}{-i'_2} = \frac{v'_1}{n^2 i'_1} = \frac{1}{n^2} \bar{z}'_1, \quad (\text{III.6})$$

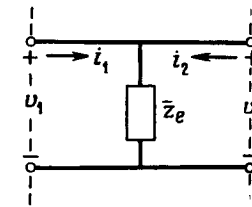
где \bar{z}'_1 — нормированное полное сопротивление в плоскости 1. И, наоборот,

$$\bar{z}'_1 = n^2 \bar{z}'_2. \quad (\text{III.7})$$

2. Параллельное сопротивление

Рассмотрим шунтирующее сопротивление, изображенное на фиг. III.3. Уравнения для напряжений записываются в виде

$$\begin{aligned} v_1 &= \bar{z}_e i_1 + \bar{z}_e i_2, \\ v_2 &= \bar{z}_e i_1 + \bar{z}_e i_2. \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$



Ф и г. III.3. Параллельное сопротивление.

Поэтому матрица сопротивлений $[\bar{z}]$ имеет вид

$$[\bar{z}] = \begin{bmatrix} \bar{z}_e & \bar{z}_e \\ \bar{z}_e & \bar{z}_e \end{bmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Матрицу рассеяния $[S]$ можно определить из уравнения (2.2.5)

$$[S] = [\bar{z} - I][\bar{z} + I]^{-1} = [I] - 2[\bar{z} + I]^{-1}.$$

Пользуясь правилами матричной алгебры, найдем

$$[S] = \frac{1}{1 + 2\bar{z}_e} \begin{bmatrix} -1 & 2\bar{z}_e \\ 2\bar{z}_e & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

т. е.

$$s_{11} = s_{22} = \frac{-1}{1 + 2\bar{z}_e}, \quad (III.10')$$

$$s_{12} = \frac{2\bar{z}_e}{1 + 2\bar{z}_e}.$$

Заметим, что при любой величине параллельного сопротивления

$$s_{11} - s_{12} = -1. \quad (III.11)$$

И обратно, если выполняется условие (III.11), то эквивалентная схема устройства может быть представлена в виде параллельного сопротивления (фиг. III.3).

Из уравнения (III.10') можно выразить \bar{z}_e через s_{11} и s_{12}

$$\bar{z}_e = -\frac{s_{12}}{2s_{11}}. \quad (III.12)$$

Используя собственные значения матрицы [S] (§ 3.3), перепишем уравнение (III.11) в виде

$$s^2 = -1, \quad (III.11')$$

а уравнение (III.12) в виде

$$\bar{z}_e = \frac{1 + s^1}{2(1 - s^1)}. \quad (III.12')$$

Следовательно, условие (III.11') является необходимым и достаточным для представления устройства в виде эквивалентной схемы, изображенной на фиг. III.3.

Из уравнения (III.12') видно, что для устройства без потерь ($|s^1| = 1$) \bar{z}_e — чисто мнимая величина.

3. Последовательная проводимость

Рассмотрим последовательную проводимость, изображенную на фиг. III.4. Запишем уравнения для токов

$$i_1 = \bar{y}_e v_1 - \bar{y}_e v_2, \quad (III.13)$$

$$i_2 = -\bar{y}_e v_1 + \bar{y}_e v_2.$$

Отсюда матрица проводимостей имеет вид

$$[\bar{y}_e] = \begin{vmatrix} \bar{y}_e & -\bar{y}_e \\ -\bar{y}_e & \bar{y}_e \end{vmatrix} \quad (III.14)$$

Матрицу рассеяния определим из уравнения (2.2.6)

$$[S] = [I - \bar{y}_e] [I + \bar{y}_e]^{-1}.$$

Воспользовавшись правилами матричной алгебры, получим

$$[S] = \frac{1}{1 + 2\bar{y}_e} \begin{vmatrix} 1 & 2\bar{y}_e \\ 2\bar{y}_e & 1 \end{vmatrix} \quad (III.15)$$

т. е.

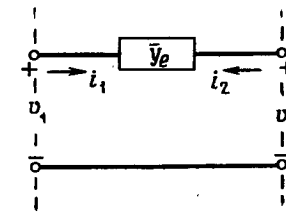
$$s_{11} = s_{22} = \frac{1}{1 + 2\bar{y}_e}, \quad (III.15')$$

$$s_{12} = \frac{2\bar{y}_e}{1 + 2\bar{y}_e}.$$

Заметим, что для последовательной проводимости

$$s_{11} + s_{12} = 1. \quad (III.16)$$

Наоборот, если выполнено условие (III.16), то эквивалентная схема устройства имеет вид, изображенный на фиг. III.4. Из урав-



Ф и г. III.4. Последовательная проводимость.

нения (III.15') можно найти величину \bar{y}_e , выразив ее через s_{11} и s_{12} ,

$$\bar{y}_e = \frac{s_{12}}{2s_{11}}. \quad (III.17)$$

Используя собственные значения матрицы [S] (§ 3.3), запишем уравнение (III.6) в виде

$$s^1 = 1, \quad (III.16')$$

а уравнение (III.17) в виде

$$\bar{y}_e = \frac{1 - s^2}{2(1 + s^2)}. \quad (III.17')$$

Следовательно, выполнение условия (III.16') является необходимым и достаточным для представления СВЧ-устройства в виде эквивалентной схемы, изображенной на фиг. III.4. Как отмечалось в § 3.3, симметричную неоднородность можно представить в виде последовательной проводимости только в плоскости отсчета. Положение последней зависит от размера неоднородности (даже если неоднородность тонкая). По этой причине такая эквивалентная схема применяется редко.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКА МЕТОДОМ ДЕШАНА И МЕТОДОМ S-КРИВОЙ

Как уже указывалось в § 2.4, если в плече 2 четырехполосника движется короткозамыкающий поршень, то вектор Γ_1 описывает окружность

$$\Gamma_1 = s_{11} - \frac{s_{12}^2 e^{j2\theta_2}}{1 + s_{22} e^{j2\theta_2}} \quad (2.4.9)$$

Докажем это. Перепишем уравнение (2.4.9) в виде

$$\Gamma_1 = s_{11} - s_{12}^2 \left(\frac{1}{s_{22} + e^{-j2\theta_2}} \right) \quad (IV.1)$$

и рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{22} + e^{-j2\theta_2}} &= \frac{1}{|s_{22}| e^{j\theta_{22}} + e^{-j2\theta_2}} = \\ &= \frac{e^{-j\theta_{22}}}{|s_{22}| + e^{-j(2\theta_2 + \theta_{22})}} = \frac{e^{-j\theta_{22}}}{|s_{22}|} \frac{1 + \frac{1}{|s_{22}|} e^{j2\varphi}}{1 - \frac{1}{|s_{22}|^2}}, \end{aligned} \quad (IV.2)$$

где

$$s_{22} = |s_{22}| e^{j\theta_{22}}$$

Последнее преобразование требует некоторых пояснений. Угол 2φ является функцией не только суммы двух углов $2\theta_2 + \theta_{22}$, но также и $|s_{22}|$. Последнее равенство справедливо тогда и только тогда, когда

$$1 - \frac{1}{|s_{22}|^2} = \left(1 + \frac{1}{|s_{22}|} e^{j2\varphi} \right) \left(1 + \frac{1}{|s_{22}|} e^{-j(2\theta_2 + \theta_{22})} \right),$$

т. е.

$$(e^{-j(2\theta_2 + \theta_{22})} + e^{j2\varphi}) = \frac{-1}{|s_{22}|} (1 + e^{j(2\varphi - 2\theta_2 - \theta_{22})})$$

или

$$\begin{aligned} \frac{1}{|s_{22}|} &= - \frac{e^{-j(2\theta_2 + \theta_{22})} + e^{j2\varphi}}{1 + e^{j(2\varphi - 2\theta_2 - \theta_{22})}} = \\ &= - e^{-j(2\theta_2 + \theta_{22})} \frac{(1 + e^{j(2\varphi + 2\theta_2 + \theta_{22})})}{(1 + e^{j(2\varphi - 2\theta_2 - \theta_{22})})}. \end{aligned}$$

После простых тригонометрических преобразований приходим к равенству

$$\frac{1}{|s_{22}|} = \frac{\cos \frac{1}{2} (2\varphi + 2\theta_2 + \theta_{22})}{\cos \frac{1}{2} (2\varphi - 2\theta_2 - \theta_{22})} \quad (IV.3)$$

Уравнение (IV.3) связывает угол 2φ с фазой вектора Γ_2 , $2\theta_2$ и с $|s_{22}|$.

После подстановки уравнения (IV.2) в уравнение (2.4.9) получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= s_{11} - \frac{s_{12}^2 e^{-j\theta_{22}}}{|s_{22}|} \frac{1 + \frac{1}{|s_{22}|} e^{j2\varphi}}{1 - \frac{1}{|s_{22}|^2}} = \\ &= s_{11} + \frac{s_{12}^2 s_{22}^*}{1 - |s_{22}|^2} + \frac{s_{12}^2 e^{j(2\varphi - \theta_{22})}}{1 - |s_{22}|^2}, \end{aligned}$$

так как

$$|s_{22}| e^{-j\theta_{22}} = s_{22}^*$$

При увеличении угла φ вектор Γ_1 описывает окружность

$$\begin{aligned} \text{с центром } OC &= s_{11} + \frac{s_{12}^2 s_{22}^*}{1 - |s_{22}|^2} \\ \text{и радиусом } CP &= \frac{s_{12}^2 e^{j(2\varphi - \theta_{22})}}{1 - |s_{22}|^2} \end{aligned} \quad (IV.4)$$

При экспериментальном определении матрицы рассеяния четырехполосника необходимо провести следующие измерения:

1. К входу 2 подключить согласованную нагрузку и измерить s_{11} непосредственно на входе 1 [см. уравнение (2.4.4')]. На фиг. IV.1

$$s_{11} = OO', \quad (IV.5)$$

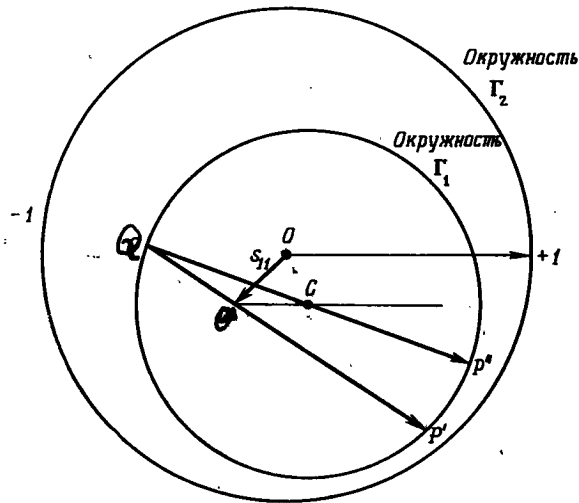
точка O' называется «иконоцентром».

2. После этого следует поместить в плечо 2 подвижный короткозамыкающий поршень и, меняя угол θ_2 , получить на диаграмме окружность Γ_1 . Найти центр C этой окружности.

3. Поместить короткозамыкающий поршень на расстоянии $\lambda_B/4$ ст входного сечения 2 ($\theta_2 = \pi/2$) и определить соответствующую величину Γ_1 . Найти на диаграмме точку P' , соответствующую Γ_1 .

Геометрические построения на круговой диаграмме состоят в следующем: провести отрезок $P'Q$ через точку O' ; затем про-

вести отрезок QP'' через точку C . Фазовый угол вектора CP'' равен $2\theta_{12}$, причем θ_{12} является фазой коэффициента s_{12} . Доказа-



Ф и г. IV.1. Диаграмма Дешана.

тельство состоит в следующем:

$$\begin{aligned} O'P' &= OP' - OO' = \Gamma_1 - s_{11} = \\ &= \frac{s_{12}^2 |s_{22}|}{1 - |s_{22}|^2} e^{-j\theta_{22}} \left(1 + \frac{e^{j2\varphi'}}{|s_{22}|} \right), \\ \angle O'P' &= 2\theta_{12} - \theta_{22} + \angle \left(1 + \frac{e^{j2\varphi'}}{|s_{22}|} \right). \end{aligned}$$

Но из уравнения (IV.3) при $\theta_2 = \pi/2$ имеем

$$\frac{1}{|s_{22}|} = -\frac{e^{-j\theta_{22}} + e^{j2\varphi'}}{1 - e^{j(2\varphi' - \theta_{22})}},$$

таким образом,

$$\begin{aligned} \angle \left(1 + \frac{e^{j2\varphi'}}{|s_{22}|} \right) &= \angle \left(1 - e^{j2\varphi'} \frac{e^{j2\varphi'} - e^{-j\theta_{22}}}{1 - e^{j(2\varphi' - \theta_{22})}} \right) = \\ &= \angle \frac{1 - e^{j4\varphi'}}{1 - e^{j(2\varphi' - \theta_{22})}} = \left(2\varphi' - \frac{\pi}{2} \right) - \left(\varphi' - \frac{\theta_{22}}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \varphi' + \frac{\theta_{22}}{2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\angle O'P' = 2\theta_{12} + \varphi' - \frac{\theta_{22}}{2}.$$

Фазовый угол вектора CP' , соответствующего $\theta_2 = \pi/2$, находится из уравнения (IV.4)

$$\angle CP' = 2\theta_{12} + 2\varphi' - \theta_{22}.$$

Угол

$$\widehat{CP'O'} = \widehat{O'QC} = \angle CP' - \angle O'P',$$

в то время как угол

$$\begin{aligned} \widehat{BCQ} &= \angle O'P' - \widehat{O'QC} = \\ &= 2\angle O'P' - \angle CP' = 2\theta_{12}. \end{aligned}$$

Но этот угол равен фазе вектора CP'' . Следовательно,

$$2\theta_{12} = \angle CP''.$$

Фазу коэффициента s_{22} , равную θ_{22} , определим из следующих соотношений:

$$O'C = OC - OO' = \frac{s_{12}^2 s_{22}^*}{1 - |s_{22}|^2},$$

так что

$$\angle O'C = 2\theta_{12} - \theta_{22}.$$

Поскольку

$$\angle CP'' = 2\theta_{12},$$

то

$$\angle CP'' - \angle O'C = 2\theta_{22}.$$

Окончательно из уравнений (IV.4), (IV.5) и фиг. IV.2 имеем

$$s_{11} = OO',$$

$$s_{22}^* = \frac{O'C}{CP''},$$

$$|s_{12}|^2 = \text{Радиус} \times (1 - |s_{22}|^2),$$

$$2\theta_{12} = \angle CP''.$$

(IV.6)

Случай, когда потери равны нулю, заслуживает специального рассмотрения. Так как матрица рассеяния в этом случае унитарна, можно записать

$$\begin{vmatrix} s_{11}^* & s_{12}^* \\ s_{12}^* & s_{22}^* \end{vmatrix} \begin{vmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{12} & s_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

график называется S-кривой (или кривой Вайсфлоха). Как показано ниже, из него можно определить $|s_{22}|$, а также $\lambda_{в2}$. Этот метод прост и удобен, особенно в тех случаях, когда трудно подобрать согласованную нагрузку в плече 2 или нет возможности точно измерить коэффициент стоячей волны.

Если потерями в четырехполюснике можно пренебречь, то из уравнения (IV.7) следует, что

$$\begin{aligned} |s_{22}| &= |s_{11}|, \\ |s_{12}| &= \sqrt{1 - |s_{11}|^2}. \end{aligned} \quad (IV.7')$$

Таким образом, если $|s_{22}|$ известен, то модули остальных коэффициентов можно легко подсчитать.

Дробь $(1 + |s_{22}|)/(1 - |s_{22}|)$ из уравнения (IV.10') можно также рассматривать как n^2 — квадрат коэффициента трансформации идеального трансформатора (приложение III). Таким образом, параметры идеального трансформатора можно легко определить путем измерений.

Коэффициент $n^2 = (1 + |s_{22}|)/(1 - |s_{22}|)$ равен максимальной крутизне кривой зависимости $\theta_1(\theta_2)$. Для доказательства продифференцируем уравнение (IV.10') по θ_2

$$\sec^2(\theta_1 + \theta_{01}) \frac{d\theta_1}{d\theta_2} = n^2 \sec^2(\theta_2 + \theta_{02})$$

или

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_2} = n^2 \frac{\sec^2(\theta_2 + \theta_{02})}{\sec^2(\theta_1 + \theta_{01})} = n^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02})}{1 + n^4 \operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02})}. \quad (IV.11)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} n^2 = \frac{1 + |s_{22}|}{1 - |s_{22}|} &\geq 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02}) \geq 0, \\ \left. \frac{d\theta_1}{d\theta_2} \right|_{\max} &= \frac{1 + |s_{22}|}{1 - |s_{22}|} = n^2, \end{aligned} \quad (IV.12)$$

если

$$\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02}) = 0 \quad \text{или} \quad \theta_2 + \frac{\theta_{22}}{2} + \frac{\pi}{2} = 0.$$

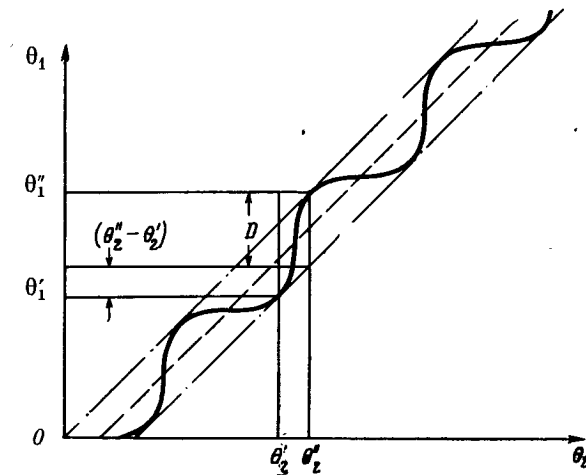
Коэффициент $n^2 = (1 + |s_{22}|)/(1 - |s_{22}|)$ можно определить и другим способом. Для этого необходимо измерить D — расстояние по вертикали между крайними касательными (огibaющими) к кривой $\theta_1(\theta_2)$, как показано на фиг. IV.3¹⁾.

¹⁾ Следует отметить, что на фиг. IV.3 приведена кривая зависимости $\theta_1(\theta_2)$, а не $d_1(d_2)$. Графики этих зависимостей в случае, когда $\lambda_{в1} \neq \lambda_{в2}$, будут отличаться по форме и по средней крутизне. Длина волны $\lambda_{в2}$ может быть определена по графику зависимости $d_1(d_2)$.

Соотношение между n^2 и D определяется равенством

$$\frac{1 - |s_{22}|}{1 + |s_{22}|} = \frac{1}{n^2} = \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{D}{4}\right). \quad (IV.13)$$

Средняя крутизна кривой $\theta_1(\theta_2)$, очевидно, равна единице, так как при изменении угла θ_2 на 2π рад угол θ_1 также изменится



Ф и г. IV.3. S-кривая.

на 2π . Координаты точек кривой, в которых огibaющие касательны к ней, можно определить из соотношения

$$\frac{d\theta_1}{d\theta_2} = 1 = n^2 \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02})}{1 + n^4 \operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02})}. \quad (IV.11')$$

Решив это уравнение относительно $\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02})$, получим

$$\operatorname{tg}^2(\theta_2 + \theta_{02}) = \frac{1}{n^2}. \quad (IV.14)$$

Уравнение (IV.14) имеет два решения¹⁾

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_2' + \theta_{02}) &= \frac{1}{n}, \\ \operatorname{tg}(\theta_2'' + \theta_{02}) &= -\frac{1}{n}, \end{aligned} \quad (IV.15)$$

откуда

$$(\theta_2'' + \theta_{02}) - \left(n2\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) = \left(n2\pi \pm \frac{\pi}{4}\right) - (\theta_2' + \theta_{02})$$

¹⁾ При $\theta_2'' > \theta_2'$ данный выбор знаков обосновывается тем, что полюс функции $\operatorname{tg}(\theta_2 + \theta_{22})$ лежит между θ_2' и θ_2'' .

или

$$(\theta_2'' + \theta_{02}) = n4\pi \pm \frac{\pi}{2} - (\theta_2' + \theta_{01}). \quad (IV.16)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta_1' + \theta_{01}) &= n, \\ \operatorname{tg}(\theta_1'' + \theta_{01}) &= -n, \end{aligned} \quad (IV.17)$$

откуда

$$(\theta_1'' + \theta_{01}) = n4\pi \pm \frac{\pi}{2} - (\theta_1' + \theta_{01}). \quad (IV.18)$$

Из уравнений (IV.15) и (IV.17) имеем

$$\begin{aligned} (\theta_2' + \theta_{02}) &= \frac{\pi}{2} - (\theta_1' + \theta_{01}), \\ (\theta_2'' + \theta_{02}) &= \frac{\pi}{2} - (\theta_1'' + \theta_{01}). \end{aligned} \quad (IV.19)$$

Из фиг. IV.3 видно, что

$$D = (\theta_1'' - \theta_1') - (\theta_2'' - \theta_2'). \quad (IV.20)$$

Подставив соотношения (IV.18) и (IV.16) в (IV.20), получим

$$D = 2[(\theta_1' + \theta_{01}) - (\theta_2' + \theta_{02})]. \quad (IV.20')$$

Подставив в него первое из уравнений (IV.19), запишем

$$D = 2 \left[\frac{\pi}{2} - 2(\theta_2' + \theta_{02}) \right] = \pi - 4(\theta_2' + \theta_{02}). \quad (IV.21)$$

Наконец, подставив значение $(\theta_2' + \theta_{02})$ из уравнения (IV.21) в первое из уравнений (IV.15), получим

$$\operatorname{tg}(\theta_2' + \theta_{02}) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{D}{4} \right) = \frac{1}{n},$$

или

$$\frac{1 - |s_{22}|}{1 + |s_{22}|} = \frac{1}{n^2} = \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{D}{4} \right). \quad (IV.13)$$

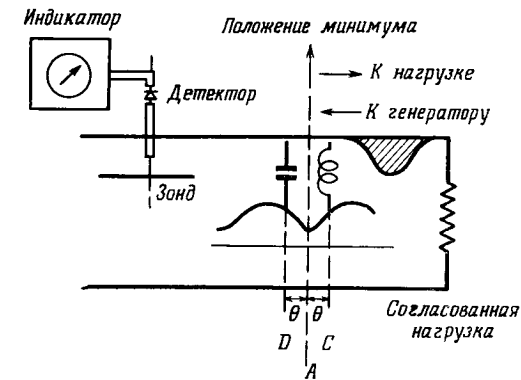
Приложение V



СОГЛАСОВАНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ЧИСТО РЕАКТИВНОЙ ШУНТИРУЮЩЕЙ ПРОВОДИМОСТИ

Если в волноводе имеется неоднородность, то с помощью измерительной линии (или какого-либо другого эквивалентного измерительного прибора), детектора и стрелочного индикатора можно определить КСВН и положение минимума стоячей волны (фиг. V.1). Затем необходимо согласовать эту неоднородность.

Прежде всего отметим, что в плоскости минимума стоячей волны величина Γ действительна, отрицательна и на круговой диаграмме



Ф и г. V.1. Неоднородность и стоячая волна.

в полярных координатах изображается точкой A (пересечение окружности постоянного КСВН с отрицательной действительной осью). Сопротивление в плоскости A , равное \bar{z}_A , можно отсчитать по круговой диаграмме. Проводимость в этой плоскости \bar{y}_A также можно определить по круговой диаграмме (в точке A' пересечения окружности постоянного КСВН с положительной действительной осью).

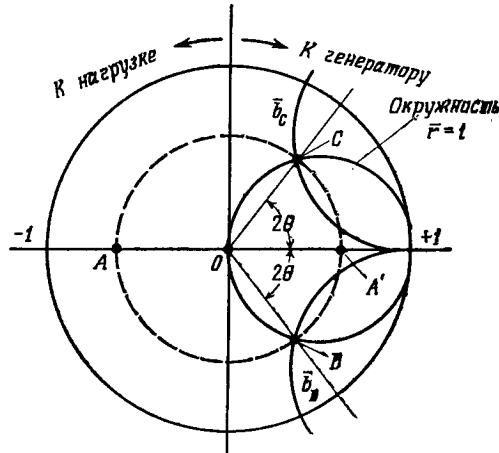
Для согласования неоднородности можно переместиться, если это физически возможно, по круговой диаграмме на угол 2θ к нагрузке (в реальной линии на расстояние, равное $(\theta/2\pi)\lambda_v$) в точку

С, в которой пересекается окружность постоянного КСВН с окружностью $r = 1$. Полная проводимость в этом сечении равна $y_C = 1 + j\bar{b}_C$. Если в это сечение поместить индуктивную проводимость, равную $-j\bar{b}_C$, то суммарная проводимость будет равна

$$\bar{y} = (1 + j\bar{b}_C) - j\bar{b}_C = 1,$$

т. е. вход согласован.

Эту же задачу можно решить и другим путем. Для этого необходимо переместиться на круговой диаграмме на угол 2θ к генератору



Ф и г. V.2. Построения на круговой диаграмме.

(в реальной линии на расстояние $(\theta/2\pi)\lambda_B$) в точку D. Проводимость в этом сечении равна $\bar{y}_D = 1 - j\bar{b}_D$. Если в это сечение поместить емкостную проводимость, равную $j\bar{b}_D$, то суммарная проводимость будет равна

$$\bar{y} = (1 - j\bar{b}_D) + j\bar{b}_D = 1,$$

т. е. вход согласован. Из фиг. V.2 видно, что $\bar{b}_C = b_D$.

Описанные построения на круговой диаграмме по существу являются графическим решением уравнения

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}_A \cos \theta - j \sin \theta}{\cos \theta - j \bar{y}_A \sin \theta} = 1 \pm j\bar{b} \quad (1.3.25)$$

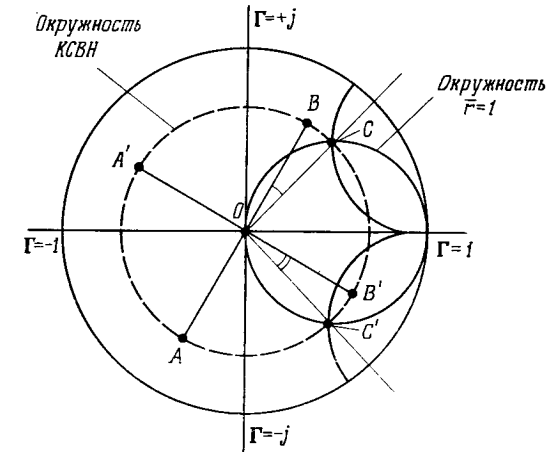
относительно θ и \bar{b} .

Приложение VI



ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СХЕМЫ НЕОДНОРОДНОСТИ В ВОЛНОВОДЕ

Рассмотрим неоднородность, показанную на фиг. 3.3.3, а, и ее эквивалентную схему, изображенную на фиг. 3.3.3, б.



Ф и г. VI.1. Построения на круговой диаграмме.

Пусть

$$\bar{y}_e = \frac{1}{z_e} = j\bar{b}. \quad (VI.1)$$

Полная проводимость в плоскости отсчета ($z = -d$) равна

$$\bar{y}_{-d} = 1 + j\bar{b}, \quad (VI.2)$$

а сопротивление

$$\bar{z}_{-d} = \frac{1}{1 + j\bar{b}}. \quad (VI.3)$$

Коэффициент отражения для рассматриваемого случая

$$\Gamma = \frac{\bar{z}_{-d} - 1}{\bar{z}_{-d} + 1} = \frac{-j\bar{b}}{2 + j\bar{b}}. \quad (VI.4)$$

Найдем из последнего равенства эквивалентную реактивную проводимость

$$j\bar{b} = -\frac{2\Gamma}{1+\Gamma}. \quad (\text{VI.5})$$

Для графических построений на круговой диаграмме необходимо измерить величину КСВН и провести окружность с радиусом, соответствующим измеренному КСВН (фиг. VI.1). Затем определяется коэффициент отражения в плоскости симметрии (точки A или A' в зависимости от знака \bar{b}).

Точки B или B' соответствуют полной проводимости в плоскости симметрии. Для выполнения равенства (VI.2) повернем точки B и B' по окружности измеренного КСВН до пересечения с окружностью $\bar{r} = 1$. Искомая проводимость находится в точках пересечения C или C' , а расстояние d (см. фиг. 3.3.2, а) определяется по величине угла BOC или угла $B'OC'$.

Приложение VII



КРУГОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ

Волну, поляризованную по кругу, можно представить в виде суммы двух пространственных ортогональных векторов, изменяющихся во времени по синусоидальному закону. На комплексной плоскости векторы имеют одинаковую длину и расположены под углом 90° друг к другу.

Таким образом, вектор

$$C = a_x A + a_y B \quad (\text{VII.1})$$

описывает волну, поляризованную по кругу, если

$$\begin{aligned} A &= A_0 \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi) = A_0 \operatorname{Re} e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi)}, \\ B &= A_0 \cos(\omega t \mp \gamma z + \varphi \pm \pi/2) = A_0 \operatorname{Re} e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi \pm \pi/2)}, \end{aligned} \quad (\text{VII.2})$$

что легко проверить, воспользовавшись фиг. VII.1.

Необходимо отметить, что результирующий вектор C вращается в пространстве с угловой скоростью ω . При $t = 0$ и $z = 0$ начальный пространственный угол (угол между вектором C и осью x) равен φ (с точностью до знака); этот же угол φ является начальной фазой A . В этом смысле начальный пространственный угол и начальная фаза эквивалентны, и изменение одной величины вызывает изменение другой.

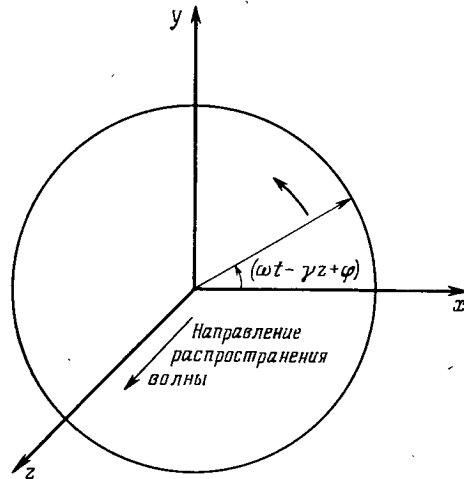
Уравнение (VII.1) можно записать в параметрической форме

$$C^- = \begin{Bmatrix} a \\ ja \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad C^+ = \begin{Bmatrix} a \\ -ja \end{Bmatrix}, \quad (\text{VII.1}')$$

где $a = A_0 e^{j(\omega t - \gamma z + \varphi)}$ для волны, распространяющейся вдоль оси z в положительном направлении. В первой строке записана составляющая вектора C по оси x , а во второй — по оси y . Если ось x соответствует одному плечу, а ось y — другому, то форма записи уравнения (VII.1') удобна для операций с матрицами рассеяния.

Если смотреть на плоскость фиг. VII.1 сверху вниз, то вектор C^- вращается по часовой стрелке. Но наблюдателю, смотрящему с обратной стороны, будет казаться, что вектор C^- вращается против часовой стрелки. Эту неопределенность можно исключить, если рассматривать «направленность» волны. Так, если волна рас-

пространяется вдоль положительного направления оси z в правовинтовой системе координат, то вектор \mathbf{C}^- описывает левополяризованную по кругу волну. Если же волна распространяется вдоль отрицательного направления оси или система координат левовинтовая, или y -составляющая отстает по фазе от x -составляющей,



Ф и г. VII.1. Правополяризованная по кругу волна.

то волна является правополяризованной по кругу. Заметим, что при одновременном изменении любого четного числа условий «направленность» волны не меняется, а при изменении нечетного числа условий меняется. Из параметрической записи уравнения (VII.1') можно сделать следующие выводы:

1. Векторная сумма двух ортогональных в пространстве векторов, равных по величине, но сдвинутых по фазе на 90° , представляет собой поляризованную по кругу волну. Если выполнены не все вышеупомянутые условия, то волна будет эллиптически поляризована (или, в частном случае, когда фазы векторов одинаковы, линейно поляризована).

2. Векторная сумма двух одинаковых по амплитуде поляризованных по кругу волн, вращающихся в противоположных направлениях, представляет линейно поляризованную волну.

Пусть

$$\mathbf{C}^- = \begin{cases} a \\ ja \end{cases}, \quad \text{где } a = A_0 e^{j(\omega t - \gamma z + \varphi)},$$

$$\mathbf{D}^+ = \begin{cases} b \\ -jb \end{cases}, \quad \text{где } b = A_0 e^{j(\omega t - \gamma z + \psi)}.$$

Тогда векторная сумма

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^- + \mathbf{D}^+ &= a_x A_0 [\cos(\omega t - \gamma z + \varphi) + \cos(\omega t - \gamma z + \psi)] + \\ &+ a_y A_0 \left[\cos\left(\omega t - \gamma z + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\omega t - \gamma z + \psi - \frac{\pi}{2}\right) \right] = \\ &= a_x A_0 \left[2 \cos\left(\omega t - \gamma z + \frac{\psi + \varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) \right] + \\ &+ a_y A_0 \left[2 \cos\left(\omega t - \gamma z + \frac{\psi + \varphi}{2}\right) \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right) \right] \end{aligned} \quad (\text{VII.3})$$

линейно поляризована, так как обе составляющие имеют одинаковую фазу. Начальная фаза равна $(\psi + \varphi)/2$, а начальный пространственный угол равен $(\psi - \varphi)/2$. Отметим еще раз, что пространственный угол изменяется при изменении начальных фаз поляризованных по кругу волн.

Из рассмотренного второго положения очевидны следствия: а) векторная сумма двух неодинаковых по амплитуде поляризованных по кругу волн, вращающихся в противоположных направлениях, является волной, поляризованной эллиптически; б) векторная сумма любых двух поляризованных по кругу волн, вращающихся в одну сторону, является также поляризованной по кругу волной.

Читатель может сам легко проверить справедливость этих следствий с помощью временных диаграмм или несложных преобразований, аналогичных (VII.3).

3. При отражении от изотропной поверхности волна с круговой поляризацией продолжает вращаться в том же направлении, но «направленность» ее меняется.

Рассмотрим волну, распространяющуюся в положительном направлении оси z . Пусть отражающая плоскость помещена в точку $z = 0$. Падающая волна в этой плоскости запишется в виде

$$\mathbf{C}_0^- = \begin{cases} a_0 \\ ja_0 \end{cases}, \quad \text{где } a_0 = A_0 e^{j(\omega t + \varphi)},$$

а отраженная

$$\mathbf{C}_0^+ = \begin{cases} \Gamma_0 a_0 \\ j\Gamma_0 a_0 \end{cases}.$$

В любой плоскости z отраженную волну можно представить в виде

$$\mathbf{C}^+ = \begin{cases} \Gamma_0 a_0 e^{j\gamma z}, \\ j\Gamma_0 a_0 e^{j\gamma z}. \end{cases} \quad (\text{VII.4})$$

Отсюда видно, что направление вращения не изменилось, а «направленность» изменилась на противоположную, так как для того же направления вращения изменилось направление распространения волны.

Приложение VIII

ТРЕХПЛЕЧЕВОЙ ЦИРКУЛЯТОР

Рассмотрим циркулятор, матрица рассеяния которого равна

$$[S]_{\text{ц}} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{VIII.1})$$

Передача сигнала происходит из плеча 1 в плечо 2, из плеча 2 в плечо 3, из плеча 3 в плечо 1 (фиг. VIII.1). Поэтому

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 \\ a_1 \\ a_2 \end{vmatrix} \quad (\text{VIII.1}')$$

У-Тройники в плоскости H рассматривались в § 3.5, где было показано, что независимо от того, изотропно заполнение тройника или нет, векторы

$$\mathbf{a}^1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi/3} \\ e^{j2\pi/3} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{a}^3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{vmatrix} 1 \\ e^{j2\pi/3} \\ e^{-j2\pi/3} \end{vmatrix} \quad (\text{3.5.4})$$

являются собственными векторами матрицы $[S]$. В частности, \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 являются собственными векторами матрицы $[S]_{\text{ц}}$.

В соответствии с гл. III, § 5

$$[S]_{\text{ц}} = [G]_J, \quad (\text{VIII.2})$$

где $[G]_J$ — симметрический оператор.

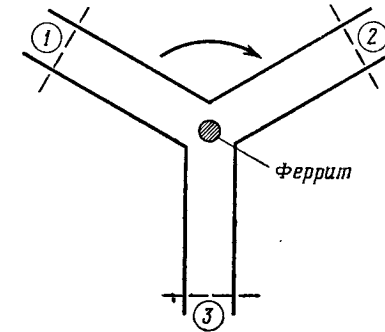
Поэтому

$$s^1 = 1, \quad s^2 = e^{j2\pi/3}, \quad s^3 = e^{-j2\pi/3} \quad (\text{VIII.3})$$

являются собственными значениями не только оператора $[G]_J$, но и матрицы $[S]_{\text{ц}}$ при определенном выборе симметричных плоскостей отсчета. Напомним, что для У-тройника с изотропным заполнением

$$s^2 = s^3. \quad (\text{3.5.7})$$

Интересно исследовать векторы \mathbf{a}^1 , \mathbf{a}^2 и \mathbf{a}^3 на оси симметрии, однако более полезным для понимания является изучение магнитных полей, связанных с этими собственными векторами. Расположение векторов магнитных полей в пространстве показано на фиг. VIII.2, а. На фиг. VIII.2, б графически показано, как суммарное поле \mathbf{H}^2 на оси симметрии J может оказаться поляризованным по кругу с направлением вращения по часовой стрелке, а на фиг. VIII.2, в — как поле \mathbf{H}^3 может оказаться поляризованным по кругу с направлением вращения против часовой стрелки.



Ф и г. VIII.1. У-циркулятор в плоскости H .

Что касается поля \mathbf{H}^1 , то очевидно, что все три составляющие в этом случае складываются в фазе, но в силу их пространственного расположения векторная сумма их равна нулю.

Электрическое поле \mathbf{E}^1 максимально на оси J , поэтому

$$s^1 = 1. \quad (\text{VIII.4})$$

Отсюда следует, что соотношения (VIII.3) выполняются на оси симметрии J циркулятора.

Теперь рассмотрим магнитное поле отраженных волн. Поле \mathbf{H}^1 отраженной волны равно нулю на оси J , так как падающие волны, складываясь, в сумме дают нуль. Отраженная волна \mathbf{H}^2 является поляризованной по кругу с направлением вращения по часовой стрелке. Относительная начальная фаза этой волны определяется из соотношения

$$-s^2 = -e^{j2\pi/3} = e^{-j\pi/3}. \quad (\text{VIII.4}')$$

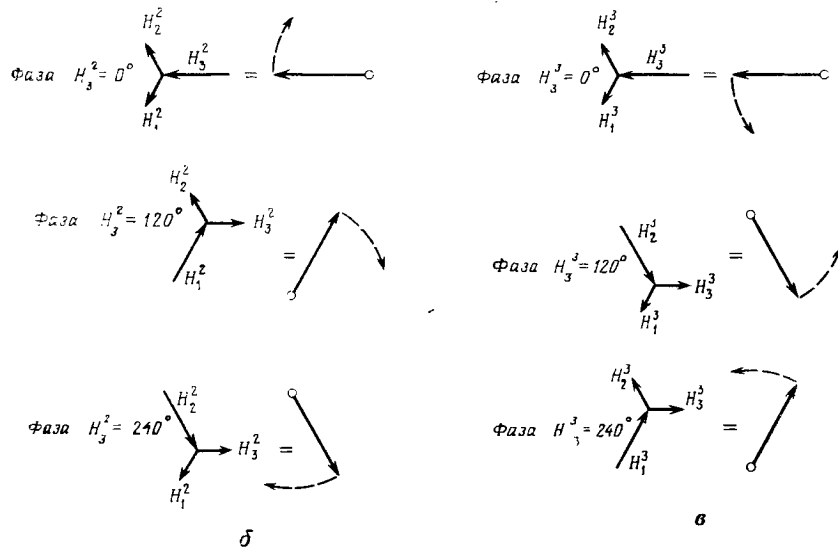
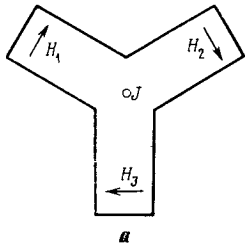
Отраженная волна \mathbf{H}^3 также поляризована по кругу и имеет направление вращения против часовой стрелки, причем ее начальная фаза определяется из соотношения

$$-s^3 = -e^{-j2\pi/3} = e^{j\pi/3}. \quad (\text{VIII.4}'')$$

Если среда изотропна (т. е. отсутствует феррит в постоянном магнитном поле), то уравнения (VIII.4') и (VIII.4'') выполняются не могут и

$$s^2 = s^3, \quad (3.5.7)$$

так как \mathbf{H}^2 и \mathbf{H}^3 идентичны (за исключением направления вращения) и не существует условий, в силу которых можно выделить



Ф и г. VIII.2. Магнитные поля на оси симметрии Y-циркулятора.

один из собственных векторов. Поэтому такая система не является циркулятором. Однако при введении ферритового стержня и наложении постоянного магнитного поля, направленного по оси J , s^2 и s^3 могут удовлетворять условиям (VIII.4') и (VIII.4''), так как

подмагниченный феррит проявляет различные свойства в зависимости от направления круговой поляризации.

Если бы ферритовый стержень окружала металлическая труба, расположенная вдоль оси J , то качественное объяснение принципа работы циркулятора можно было бы дать на основе фарадеевского вращения плоскости поляризации, как в случае циркулятора турникетного типа (§ 4.9). В действительности труба не нужна для работы циркулятора, поэтому объяснение работы последнего несколько сложнее. Однако работу циркулятора можно объяснить, если рассматривать реальный циркулятор как предельный случай системы с очень короткой трубой. Другое объяснение основано на том факте, что эффективная магнитная проницаемость в ферритовой среде имеет разное значение в зависимости от направления вращения вектора магнитного поля.

Циркулятор, показанный на фиг. VIII.1, можно выполнить на полосковых линиях. Циркуляторы можно, кроме того, изготовить на тройниках в плоскости H (с ферритом, смещенным от центра), где отсутствие полной симметрии компенсируется другими несимметричными возмущениями (§ 3.4, п. «г»).

Все изложенное в настоящем приложении применимо не только к трехплечевым циркуляторам, но и к циркуляторам с любым числом плеч (4, 5 и более). Однако трудности при настройке таких циркуляторов на практике ограничивают их применение.

Циркуляторы можно изготовить на тройниках в плоскости E только в том случае, если вместо гиромангнитного феррита использовать гироэлектрический материал.



КОЭФФИЦИЕНТ ОТРАЖЕНИЯ КАСКАДНОГО СОЕДИНЕНИЯ

Рассмотрим каскадное соединение двух устройств с коэффициентами отражения Γ_1 и Γ_2 . Определим суммарный коэффициент отражения Γ_T на входе соединения.

При наличии потерь в соединении определение Γ_T затруднительно. Если же устройства не имеют потерь и определены плоскости отсчета, то задачу можно решить, зная угол φ , характеризующий электрическое расстояние между плоскостями отсчета. В том случае когда плоскости отсчета координаты (или фазы) не определены, можно найти только максимальную и минимальную величины Γ_T .

Коэффициенты отражения Γ_1 и Γ_2 представляют собой элементы матриц рассеяния, равные соответственно s_{11} и s'_{11} . Для устройств без потерь плоскости отсчета можно выбрать так, что

$$\begin{aligned} s_{11} = s_{22} = \Gamma_1 \quad (\text{действительные величины}), \\ s'_{11} = s'_{22} = \Gamma_2 \quad (\text{действительные величины}) \end{aligned} \quad (\text{IX.1})$$

и

$$\begin{aligned} s_{12} = \pm j\sqrt{1-\Gamma_1^2}, \\ s'_{12} = \pm j\sqrt{1-\Gamma_2^2} \end{aligned} \quad (\text{IX.2})$$

(см. § 3.3).

Схема соединения показана на фиг. IX.1. Для нее можно записать два совместных уравнения

$$\begin{vmatrix} \Gamma_1 & s_{12} \\ s_{12} & \Gamma_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 e^{-j\varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \end{vmatrix} \quad (\text{IX.3})$$

$$\begin{vmatrix} \Gamma_2 & s'_{12} \\ s'_{12} & \Gamma_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_2 e^{-j\varphi} \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b'_1 \\ b'_2 \end{vmatrix} \quad (\text{IX.4})$$

Исключим из этих выражений b_2 и b'_1 и разрешим их относительно $\Gamma_T = b_1/a_1$.

Из уравнения (IX.3) получим

$$\begin{aligned} b_1 &= \Gamma_1 a_1 + s_{12} b'_1 e^{-j\varphi}, \\ b_2 &= s_{12} a_1 + \Gamma_1 b'_1 e^{-j\varphi}, \end{aligned} \quad (\text{IX.3}')$$

а из уравнения (IX.4)

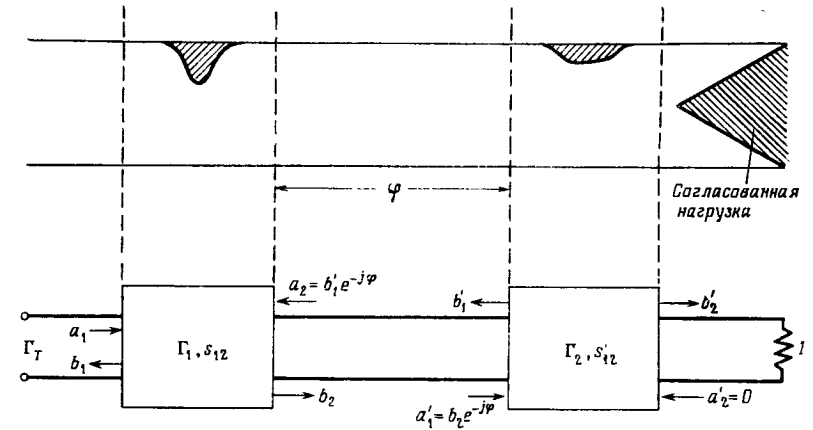
$$b'_1 = \Gamma_2 b_2 e^{-j\varphi}. \quad (\text{IX.4}')$$

Из этих соотношений имеем

$$\begin{aligned} b_1 &= \Gamma_1 a_1 + s_{12} \Gamma_2 b_2 e^{-j2\varphi}, \\ b_2 &= s_{12} a_1 + \Gamma_1 \Gamma_2 b_2 e^{-j2\varphi} \end{aligned} \quad (\text{IX.5})$$

или

$$\begin{aligned} b_2 &= \frac{s_{12} a_1}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-j2\varphi}}, \\ b_1 &= \left[\Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 (s_{12})^2 e^{-j2\varphi}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-j2\varphi}} \right] a_1. \end{aligned} \quad (\text{IX.6})$$



Ф и г. IX.1. Каскадное соединение четырехполюсников.

Отсюда можно определить суммарный коэффициент отражения на входе системы

$$\Gamma_T = \frac{b_1}{a_1} = \Gamma_1 + \frac{\Gamma_2 (s_{12})^2 e^{-j2\varphi}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-j2\varphi}} \quad (\text{IX.7})$$

или с учетом соотношений (IX.2)¹⁾

$$\Gamma_T = \Gamma_1 - \frac{\Gamma_2 (1 - \Gamma_1^2) e^{-j2\varphi}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-j2\varphi}} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2 e^{-j2\varphi}}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2 e^{-j2\varphi}}. \quad (\text{IX.7}')$$

¹⁾ Если в каскадном соединении число устройств больше двух, то для каждого отдельного устройства удобнее использовать матрицу передачи типа [A] (приложение XI). Если же как сами устройства, так и расстояния между ними одинаковы, можно воспользоваться положениями § 7.5. Другой метод состоит в применении к полученному результату (IX.7') метода математической индукции.

Коэффициент отражения на входе¹⁾ будет максимальным при $\varphi = 90^\circ$ (если Γ_1 и Γ_2 имеют одинаковые знаки), т. е.

$$\Gamma_{T \max} = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{1 + \Gamma_1 \Gamma_2}. \quad (\text{IX.8})$$

Минимальное значение коэффициента отражения получим при $\varphi = 0, \pi, 2\pi, \dots$, т. е.

$$\Gamma_{T \min} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{1 - \Gamma_1 \Gamma_2}. \quad (\text{IX.8}')$$

Если Γ_1 и Γ_2 малы по сравнению с 1, то

$$\Gamma_T \approx \Gamma_1 - \Gamma_2 e^{-j2\varphi} \begin{cases} \Gamma_1 + \Gamma_2 & (\text{максимальное значение}), \\ \Gamma_1 - \Gamma_2 & (\text{минимальное значение}). \end{cases} \quad (\text{IX.9})$$

Если, кроме того, значение Γ_2 мало по сравнению с Γ_1 , то

$$\Gamma_T \approx \Gamma_1. \quad (\text{IX.10})$$

В случае когда Γ_1 и Γ_2 одинаковы,

$$\Gamma_T = \frac{\Gamma_1(1 - e^{-j2\varphi})}{1 - \Gamma_1^2 e^{-j2\varphi}}, \quad (\text{IX.11})$$

причем при $\varphi = 0$ выражение (IX.11) обращается в нуль.

¹⁾ Для тонких неоднородностей, если величины Γ_1 и Γ_2 — действительные и положительные, плоскости отсчета расположены на расстоянии $\lambda_n/4$ от неоднородности (большое отражение) или очень близко от неоднородности (малое отражение) [см. также уравнения (5.6.1) — (5.6.3)]. Следовательно, выражение (IX.8) описывает случай, когда тонкие неоднородности расположены на расстоянии $\lambda_n/4$ (большое отражение) или $\lambda_n/2$ (малое отражение) друг от друга. Соответственно выражение (IX.8') описывает случай, когда тонкие неоднородности расположены на расстоянии $\lambda_n/2$ (большое отражение) или $\lambda_n/4$ (малое отражение) друг от друга. Те же выводы, но с других позиций, получены в § 5.9 и 7.5.

Приложение X



РАЗЛОЖЕНИЕ $\cos n\theta$ В РЯД И ПОЛИНОМЫ ЧЕБЫШЕВА

а. Из тригонометрических тождеств

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B, \quad (\text{X.1})$$

$$\cos(A-B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B \quad (\text{X.2})$$

следует, что

$$\cos(n+1)\theta = \cos n\theta \cos \theta - \sin n\theta \sin \theta, \quad (\text{X.1}')$$

$$\cos(n-1)\theta = \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta, \quad (\text{X.2}')$$

где $A = n\theta$, $B = \theta$.

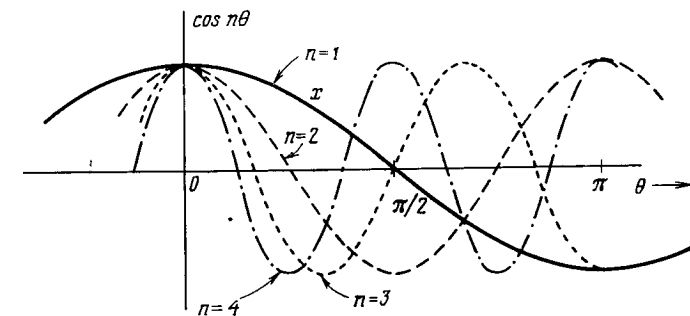
Складывая равенства (X.1') и (X.2'), получим

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta \quad (\text{X.3})$$

или

$$\cos(n+1)\theta = 2 \cos n\theta \cos \theta - \cos(n-1)\theta. \quad (\text{X.3}')$$

Уравнение (X.3') позволяет найти $\cos k\theta$ при любом k , если известны $\cos(k-1)\theta$ и $\cos(k-2)\theta$. Когда $k=0$, $\cos k\theta = 1$; когда



Фиг. X.1. Зависимости $\cos n\theta$ от θ .

$k=1$, $\cos k\theta = \cos \theta$. Исходя из этого, можно непосредственно рассчитать $\cos k\theta$ при любом k .

Пусть $\cos \theta = x$. Из уравнения (X.3') следует, что

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ \cos \theta &= x, \\ \cos 2\theta &= 2 \cos \theta \cos \theta - 1 = 2x^2 - 1, \\ \cos 3\theta &= 2(2x^2 - 1)x - x = 4x^3 - 3x, \\ \cos 4\theta &= 2(4x^3 - 3x)x - (2x^2 - 1) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ \cos 5\theta &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \\ \cos 6\theta &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 \end{aligned} \quad (\text{X.4})$$

и т. д.

б. Функция $C_n(x) \equiv \cos(n \arccos x)$ называется полиномом Чебышева n -го порядка.

Пусть и на этот раз $\cos \theta = x$. Тогда

$$C_n(x) = \cos[n \arccos(\cos \theta)] = \cos n\theta, \quad (\text{X.5})$$

поэтому, согласно соотношениям (X.4),

$$\begin{aligned} C_0(x) &= 1 = 1, \\ C_1(x) &= x = \cos \theta, \\ C_2(x) &= 2x^2 - 1 = \cos 2\theta, \\ C_3(x) &= 4x^3 - 3x = \cos 3\theta, \\ C_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 = \cos 4\theta \end{aligned} \quad (\text{X.4}')$$

и т. д.

и в соответствии с равенством (X.3')

$$C_{n+1}(x) = 2xC_n(x) - C_{n-1}(x). \quad (\text{X.3}''')$$

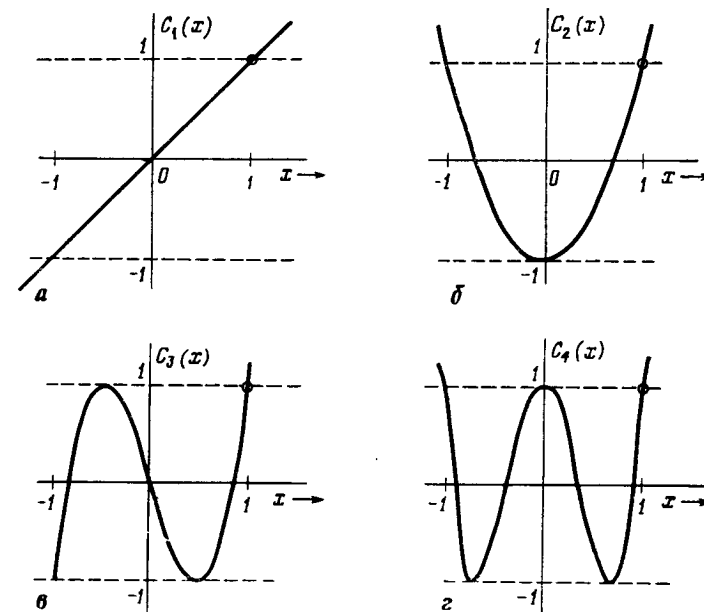
в. Если $-1 \leq x \leq 1$, то θ является вещественным числом и $|C_n(x)| \leq 1$.

Если $|x| > 1$, θ становится мнимой величиной. Однако полиномы (X.4') все равно верны. При нечетных n $C_n(x)$ — нечетная функция x , при четных n $C_n(x)$ есть четная функция x . При больших значениях x достаточно учитывать только слагаемое с наибольшим показателем степени.

В области $-1 \leq x \leq 1$ функция $C_n(x)$ описывается довольно сложной зависимостью. Ее формулу можно найти с помощью полиномов (X.4') или прибегая к следующему графическому построению: сначала изображается косинусоида $\cos \theta$. Но поскольку $x = \cos \theta$, зависимость величины $C_1(x) = \cos \theta$ от x представляет собой прямую линию с тангенсом угла наклона, равным 1. На чертеже с косинусоидой $\cos \theta$ строится косинусоида $\cos 2\theta$. Каждому значению $\cos \theta$ соответствует определенная величина $\cos 2\theta$.

График зависимости $\cos 2\theta$ от $\cos \theta$ и представляет график функции $C_2(x)$.

Аналогичное построение производится для $n=3, 4, 5$ и т. д. Графики на фиг. X.1 и X.2 служат для иллюстрации этого метода.



Фиг. X.2. Полиномы Чебышева.

Необходимо сделать несколько замечаний:

1. При $x = +1$ $C_n(x)$ всегда равна $+1$.
2. Если n — четное число, то при $x = -1$ $C_n(x)$ всегда равна $+1$ [$C_n(x)$ — четная функция].
Если же n — нечетное число, то при $x = -1$ $C_n(x)$ всегда равна -1 [$C_n(x)$ — нечетная функция].
3. В интервале $-1 < x < 1$ функция $C_n(x)$ n раз принимает нулевое значение (независимо от ее четности).
4. Если n — нечетное число, то при $x = 0$ $C_n(x) = 0$.
Если же n — четное число, то при $x = 0$ $C_n(x) = +1$, когда n кратно 4, и $C_n(x) = -1$, когда n не кратно 4.

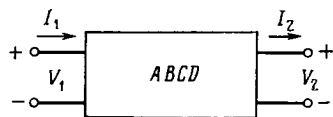
КЛАССИЧЕСКАЯ МАТРИЦА ПЕРЕДАЧИ (МАТРИЦА $ABCD$). ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЦЕПИ

1. Определения

Матрица $ABCD$ (или матрица типа $[A]$) в четырехполюснике непосредственно связывает выходные величины (V_2, I_2) с входными (V_1, I_1)

$$\begin{aligned} V_1 &= AV_2 + BI_2 \\ I_1 &= CV_2 + DI_2 \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_2 \\ I_2 \end{vmatrix} \quad (\text{XI.1})$$

Заметим, что направления токов выбраны одинаковые (фиг. XI.1). Отметим также, что матрица $ABCD$ имеет конкретный смысл лишь



Ф и г. XI.1. Классическая матрица передачи $[A]$.

в том случае, когда величины V_1, V_2, I_1, I_2 являются истинными (а не нормированными) напряжениями и токами и, следовательно, непрерывны на стыках между четырехполюсниками¹⁾. В этом случае выходные зажимы одного четырехполюсника могут являться входными зажимами следующего, что при каскадном соединении четырехполюсников позволяет эффективно использовать аппарат матриц передачи.

2. Связь между матрицами $[A]$, $[Z]$ и $[Y]$

Из уравнений (XI.1) находим

$$\begin{aligned} V_1 &= \left(\frac{A}{C}\right) I_1 + \left(B - \frac{AD}{C}\right) I_2, \\ V_2 &= \left(\frac{1}{C}\right) I_1 - \left(\frac{D}{C}\right) I_2. \end{aligned} \quad (\text{XI.2})$$

¹⁾ Благодаря этому условию матрица типа $[A]$, строго говоря, применима только к волнам типа TEM . Тем не менее ее можно использовать и для расчета волноводных систем, если только поперечное сечение волновода не претерпевает скачков в плоскостях отсчета или если удастся ввести эквивалентные напряжения и токи (см. § 1.6).

Но, с другой стороны, воспользовавшись коэффициентами матрицы сопротивлений, можно записать

$$\begin{aligned} V_1 &= Z_{11}I_1 - Z_{12}I_2, \\ V_2 &= Z_{21}I_1 - Z_{22}I_2. \end{aligned} \quad (\text{XI.3})$$

Сравнивая выражения (XI.2) и (XI.3), получаем

$$\begin{aligned} Z_{11} &= \frac{A}{C}, & Z_{22} &= \frac{D}{C}, \\ Z_{12} &= \frac{AD}{C} - B, & Z_{21} &= \frac{1}{C} \end{aligned} \quad (\text{XI.4})$$

или, с другой стороны,

$$\begin{aligned} A &= \frac{Z_{11}}{Z_{21}}, & C &= \frac{1}{Z_{21}}, \\ B &= \frac{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}{Z_{21}}, & D &= \frac{Z_{22}}{Z_{21}}. \end{aligned} \quad (\text{XI.5})$$

Если четырехполюсник является обратимым ($Z_{12} = Z_{21}$), то

$$AD - BC = 1, \quad (\text{XI.6})$$

если же он симметричен, то должно соблюдаться условие

$$A = D. \quad (\text{XI.6}')$$

Аналогичные соотношения можно вывести для коэффициентов матрицы проводимостей

$$\begin{aligned} Y_{11} &= \frac{D}{B} = \frac{Z_{22}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}, \\ Y_{22} &= \frac{A}{B} = \frac{Z_{11}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}, \\ Y_{12} &= -\frac{1}{B} = \frac{-Z_{21}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}, \\ Y_{21} &= C - \frac{AD}{2} = \frac{-Z_{12}}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}Z_{21}}. \end{aligned} \quad (\text{XI.7})$$

3. Связь между матрицами типов $[A]$ и $[S]$.

Поскольку V и I — истинные значения напряжения и тока, а a и b — нормированные амплитуды падающей и отраженной волн, то связь между матрицами $[A]$ и $[S]$ должна осуществляться через характеристические сопротивления (или проводимости).

Напомним, что v и i — нормированные значения напряжений и тока, удовлетворяющие соотношениям

$$\frac{v}{i} = \bar{z}, \quad (1.4.4)$$

$$P_{\text{компл}} = \frac{1}{2} \frac{|v|^2}{z^*} = \frac{1}{2} \bar{z} |i|^2. \quad (1.4.5)$$

Величины V и I как истинные значения напряжения и тока удовлетворяют соотношениям

$$\frac{V}{I} = Z = \bar{z} Z_0, \quad (XI.8)$$

$$P_{\text{компл}} = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{Z^*} = \frac{1}{2} \frac{|V|^2}{z^* Z_0} = \frac{1}{2} \bar{z} Z_0 |I|^2. \quad (XI.9)$$

Из этих выражений следует, что

$$V = \sqrt{Z_0} v = \sqrt{Z_0} (a + b), \quad (XI.10)$$

$$I = \frac{i}{\sqrt{Z_0}} = \frac{1}{\sqrt{Z_0}} (a - b). \quad (XI.11)$$

Теперь соотношения (XI.1) принимают вид

$$\begin{aligned} \sqrt{Z_{01}} (a_1 + b_1) &= A \sqrt{Z_{02}} (a_2 + b_2) + B \frac{1}{\sqrt{Z_{02}}} (a_2 - b_2), \\ \frac{1}{\sqrt{Z_{01}}} (a_1 - b_1) &= C \sqrt{Z_{02}} (a_2 + b_2) + D \frac{1}{\sqrt{Z_{02}}} (a_2 - b_2) \end{aligned} \quad (XI.12)$$

или

$$\begin{aligned} (a_1 + b_1) &= A \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}} (a_2 + b_2) + \frac{B}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}} (a_2 - b_2), \\ (a_1 - b_1) &= C \sqrt{Z_{01} Z_{02}} (a_2 + b_2) + D \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} (a_2 - b_2). \end{aligned} \quad (XI.12')$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A \sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{01}}}, & \bar{B} &= \frac{B}{\sqrt{Z_{01} Z_{02}}}, \\ \bar{C} &= C \sqrt{Z_{01} Z_{02}}, & \bar{D} &= \sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}}. \end{aligned} \quad (XI.13)$$

Тогда соотношения (XI.12') примут вид

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 &= \bar{A} (a_2 + b_2) + \bar{B} (a_2 - b_2), \\ a_1 - b_1 &= \bar{C} (a_2 + b_2) + \bar{D} (a_2 - b_2). \end{aligned} \quad (XI.14)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} b_1 &= s_{11} a_1 + s_{12} a_2, \\ b_2 &= s_{21} a_1 + s_{22} a_2. \end{aligned} \quad (2.1.16')$$

Путем несложных алгебраических преобразований можно исключить a_1 , a_2 , b_1 и b_2 из уравнений (XI.14) и (2.1.16'). В результате получим

$$s_{11} = \frac{\bar{A} + \bar{B} - \bar{C} - \bar{D}}{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}}, \quad s_{22} = \frac{-\bar{A} + \bar{B} - \bar{C} + \bar{D}}{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}}, \quad (XI.15)$$

$$s_{12} = \frac{2(\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C})}{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}}, \quad s_{21} = \frac{2}{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}},$$

$$\begin{aligned} \bar{A} &= \frac{s_{12} s_{21} + (1 + s_{11})(1 - s_{22})}{2s_{21}}, & \bar{C} &= \frac{-s_{12} s_{21} + (1 - s_{11})(1 - s_{22})}{2s_{21}}, \\ \bar{B} &= \frac{-s_{12} s_{21} + (1 + s_{11})(1 + s_{22})}{2s_{21}}, & \bar{D} &= \frac{s_{12} s_{21} + (1 - s_{11})(1 + s_{22})}{2s_{21}}. \end{aligned} \quad (XI.16)$$

Если цепь обратима (взаимна), то

$$\bar{A}\bar{D} - \bar{B}\bar{C} = \frac{s_{12}}{s_{21}} = 1 \quad (XI.5')$$

и

$$s_{12} = s_{21} = \frac{2}{\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} + \bar{D}}. \quad (XI.17)$$

Если она симметрична ($\bar{A} = \bar{D}$), то

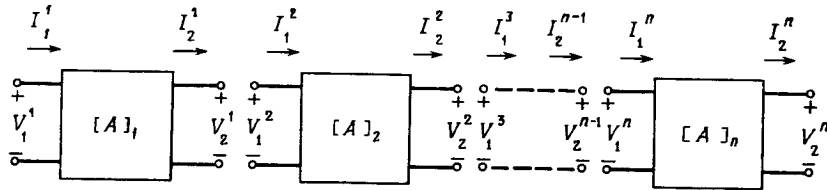
$$s_{11} = s_{22} = \frac{\bar{B} - \bar{C}}{2\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}}. \quad (XI.18)$$

4. Каскадное соединение четырехполюсников

Напряжение и ток, входные для второго четырехполюсника, являются выходными для первого; напряжение и ток, входные для третьего четырехполюсника, являются выходными для второго и т. д. Проследив справа налево всю цепочку, можно записать

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} V_{n-1} \\ I_{n-1} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_n \\ I_n \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} V_{n-2} \\ I_{n-2} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_{n-1} \\ I_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A_{n-1} & B_{n-1} \\ C_{n-1} & D_{n-1} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_n \\ I_n \end{vmatrix} \\ &\dots \dots \dots \\ \begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} &= [A]_1 [A]_2 [A]_3 \dots [A]_{n-1} [A]_n \begin{vmatrix} V_n \\ I_n \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} V_1 \\ I_1 \end{vmatrix} &= [A]_{\text{полн}} \begin{vmatrix} V_n \\ I_n \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (XI.19)$$

Следовательно, входные и выходные величины для n четырехполюсников, соединенных каскадно, связываются с помощью матри-



Ф и г. XI.2. Каскадное включение четырехполюсников.

цы $[A]_{\text{полн}}$, которая следующим образом выражается через матрицы передачи $[A]_i$ отдельных элементов:

$$[A]_{\text{полн}} = [A]_1 [A]_2 \dots [A]_n. \quad (\text{XI.20})$$

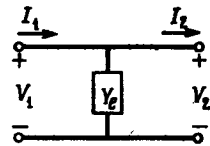
Если все четырехполюсники одинаковы, то равенство (XI.20) принимает вид

$$[A]_{\text{полн}} = [A]^n. \quad (\text{XI.20}')$$

Следует отметить, что при большом числе каскадно соединенных звеньев оперировать выражением (XI.20') сложнее, чем соотношениями, полученными в гл. 7. Но если звенья различны или каждое из них в свою очередь состоит из нескольких других звеньев, уравнение (XI.20) приобретает большое практическое значение.

Примеры

Параллельное звено. $V_1 = V_2$, а поэтому в уравнениях (XI.1) $A = 1$ и $B = 0$. Кроме того, $(I_1 - I_2)/Y_e = V_2$, и поэтому $D = 1$



Ф и г. XI.3. Параллельное звено.

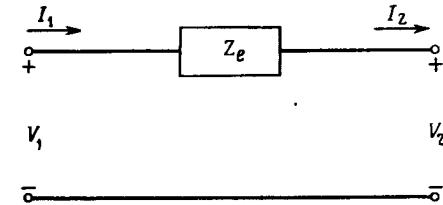
и $C = Y_e$. Матрица передачи для параллельного звена имеет вид

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y_e & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{XI.21})$$

Последовательное звено. $I_1 = I_2$, поэтому в уравнениях (XI.1) $C = 0$ и $D = 1$. Кроме того, $V_1 = V_2 + I_2(Z_e)$, и поэтому $A = 1$, $B = Z_e$.

Таким образом,

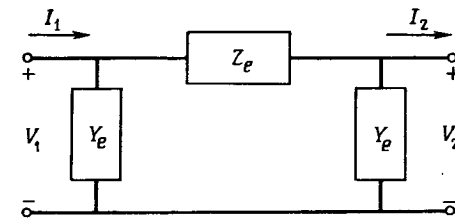
$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & Z_e \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{XI.22})$$



Ф и г. XI.4. Последовательное звено.

Симметричный П-образный четырехполюсник. Согласно выражениям (XI.20) — (XI.22),

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y_e & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & Z_e \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y_e & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 + Y_e Z_e) & Z_e \\ Y_e (2 + Y_e Z_e) & (1 + Y_e Z_e) \end{vmatrix} \quad (\text{XI.23})$$



Ф и г. XI.5. Симметричное П-образное звено.

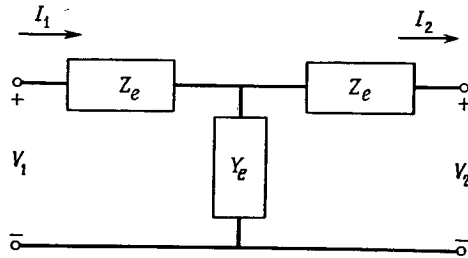
Симметричный Т-образный четырехполюсник. Согласно выражениям (XI.20) — (XI.22),

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & Z_e \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Y_e & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & Z_e \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (1 + Y_e Z_e) & Z_e (2 + Y_e Z_e) \\ Y_e & (1 + Y_e Z_e) \end{vmatrix} \quad (\text{XI.24})$$

Распределенная линия длиной d . В соответствии с уравнениями (7.4.14)

$$Z_{11} = Z_{22} = -jZ_0 \operatorname{ctg} \frac{2\pi d}{\lambda},$$

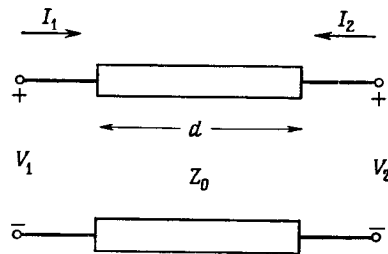
$$Z_{12} = Z_{21} = -jZ_0 \operatorname{cosec} \frac{2\pi d}{\lambda}.$$



Ф и г. XI.6. Симметричное Т-образное звено.

Поэтому на основании уравнений (XI.5) имеем

$$[A] = \begin{vmatrix} \cos \frac{2\pi d}{\lambda} & jZ_0 \sin \frac{2\pi d}{\lambda} \\ j \frac{1}{Z_0} \sin \frac{2\pi d}{\lambda} & \cos \frac{2\pi d}{\lambda} \end{vmatrix} \quad (\text{XI.25})$$



Ф и г. XI.7. Линия передачи длиной d .

В частном случае, когда $d = \lambda/4$,

$$[A] = \begin{vmatrix} 0 & jZ_0 \\ j/Z_0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{XI.25}')$$

Схема, изображенная на фиг. 4.4.10, а. Разомкнутый на конце отрезок линии длиной $\lambda/8$ и с характеристической проводимостью Y_{0B} имеет входную проводимость Y_e . Согласно равенству (1.3.25)

запишем

$$Y_e = jY_{0B} \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = jY_{0B}, \quad (\text{XI.26})$$

а в соответствии с выражением (XI.21)

$$[A]_1 = [A]_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ jY_{0B} & 1 \end{vmatrix}$$

Выше было показано [см. выражение (XI.25)], что в случае четвертьволновой линии матрица передачи равна

$$[A]_2 = \begin{vmatrix} 0 & j/Y_{0A} \\ jY_{0A} & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{XI.27})$$

Таким образом, на основании уравнения (XI.20) матрица $[A]$ полной цепи записывается в виде

$$[A]_e = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ jY_{0B} & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & j/Y_{0A} \\ jY_{0A} & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ jY_{0B} & 1 \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} -Y_{0B}/Y_{0A} & j/Y_{0A} \\ j(Y_{0A} - Y_{0B}^2/Y_{0A}) & -Y_{0B}/Y_{0A} \end{vmatrix} \quad (4.4.27a)$$

где в соответствии с (XI.13)

$$\bar{A} = -Y_{0B}/Y_{0A}, \quad \bar{B} = jY_0/Y_{0A},$$

$$\bar{C} = \frac{j}{Y_0} \left(Y_{0A} - \frac{Y_{0B}^2}{Y_{0A}} \right), \quad \bar{D} = -Y_{0B}/Y_{0A},$$

так как $Y_{01} = Y_{02} = Y_0$.

5. Использование матрицы типа $[A]$ для определения фазового сдвига

В гл. 7 было показано, что фазовый сдвиг в четырехполюснике, характеризуемом матрицей $[Z]$, можно найти из уравнения (7.2.7)

$$\cos \varphi = \frac{Z_{11} + Z_{22}}{2Z_{12}}. \quad (\text{XI.28})$$

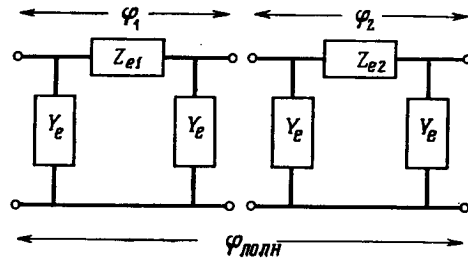
Таким образом, на основании уравнений (XI.4) имеем

$$\cos \varphi = \frac{A + D}{2}. \quad (\text{XI.28}')$$

Если сложный четырехполюсник состоит из нескольких одинаковых звеньев, то уравнение (XI.28) оказывается более простым и удобным, так как Z_{11} , Z_{22} и Z_{12} легко вычисляются по уравне-

ниям (7.4.12). Но если звенья различны, то предпочтение следует отдать уравнению (XI.28).

Например, полный фазовый сдвиг в двух П-образных звеньях, изображенных на фиг. XI.8 (параллельные элементы одинаковы,



Ф и г. XI.8. Каскадное включение двух П-образных звеньев с различными значениями Z_e .

а последовательные различны), равен

$$\cos \varphi_{\text{полн}} = 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - 1. \quad (\text{XI.29})$$

Это выражение получено путем вычисления матрицы $[A]_{\text{полн}}$ по уравнениям (XI.20) и (XI.23) с последующей подстановкой величин A и D в уравнение (XI.28').

Приложение XII

КРУГОВАЯ ПОЛЯРИЗАЦИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ ДЛЯ ВОЛНЫ ТИПА TE_{10} В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ВОЛНОВОДЕ

Согласно уравнениям (1.2.1'), составляющие магнитного поля основной волны TE_{10} в прямоугольном волноводе равны

$$H_x = \pm A \pm \frac{\pi}{a} \sin \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi \pm)}, \quad (\text{XII.1})$$

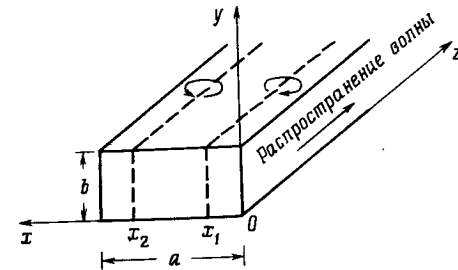
$$H_z = -jA \pm \frac{k_c^2}{\gamma} \cos \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi \pm)}. \quad (\text{XII.2})$$

Если амплитуду составляющей H_z произвольно принять равной единице, то

$$H_x = \pm j \frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda_{\text{в}}} \sin \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi \pm)}, \quad (\text{XII.3})$$

$$H_z = \cos \frac{\pi x}{a} e^{j(\omega t \mp \gamma z + \varphi \pm)}. \quad (\text{XII.4})$$

Существуют две симметричные плоскости x_1 и x_2 , в которых $H_z = |H_x|$ и, следовательно, поле H имеет круговую поляризацию



Ф и г. XII.1. Плоскости круговой поляризации магнитного поля.

(приложение VII). Положение этих плоскостей можно найти, приравняв амплитуды составляющих (XII.3) и (XII.4)

$$\frac{\lambda_{\text{кр}}}{\lambda_{\text{в}}} \sin \frac{\pi x}{a} = \cos \frac{\pi x}{a} \quad (\text{XII.5})$$

и находя корни полученного уравнения

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{a}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_B}{2a}, \\ x_2 &= a - x_1. \end{aligned} \quad (\text{XII.6})$$

Вектор \mathbf{H} имеет следующие направления круговой поляризации, если смотреть в положительном направлении вдоль оси y :

$x_1 \longrightarrow$	{	левая поляризация	{	правая поляризация
падающая волна		отраженная волна		левая поляризация
$x_2 \longrightarrow$	{	правая поляризация	{	левая поляризация

Таким образом, в данной плоскости каждому направлению распространения волны соответствует определенное направление круговой поляризации. С другой стороны, каждому направлению поляризации соответствует определенное направление распространения волны.

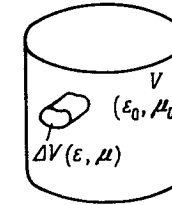
Приложение XIII



ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕЗОНАТОРОВ И ВОЛНОВОДОВ

1. Возмущающая неоднородность внутри полого резонатора

Рассмотрим полый резонатор с вакуумным наполнением, имеющий резонансную частоту ω_0 и объем V , в котором отсутствуют источники возмущений и в каждой точке которого определены поля



Ф и г. XIII.1. Резонатор с возмущающей неоднородностью.

\mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 . Диэлектрическая и магнитная проницаемости равны соответственно ϵ_0 и μ_0 .

Заполним небольшой объем ΔV внутри резонатора средой с параметрами ϵ и μ . Резонансная частота изменяется до величины ω . Поля в каждой точке усложнившейся системы обозначим через \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Для любой точки внутри невозмущенного резонатора уравнения Максвелла записываются следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = j\omega_0 \epsilon_0 \mathbf{E}_0, \quad (\text{XIII.1})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = -j\omega_0 \mu_0 \mathbf{H}_0. \quad (\text{XIII.2})$$

При наличии источника возмущений они принимают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E} \quad \text{вне } \Delta V, \quad (\text{XIII.3})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega \epsilon \mathbf{E} \quad \text{внутри } \Delta V, \quad (\text{XIII.3'})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H} \quad \text{вне } \Delta V, \quad (\text{XIII.4})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} \quad \text{внутри } \Delta V. \quad (\text{XIII.4'})$$

Согласно уравнениям (XIII.3) и (XIII.3'), имеем

$$\mathbf{E}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} \quad \text{вне } \Delta V, \quad (\text{XIII.5})$$

$$\mathbf{E}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{H} = j\omega \varepsilon \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} \quad \text{внутри } \Delta V. \quad (\text{XIII.5}')$$

Согласно уравнениям (XIII.4) и (XIII.4'),

$$\mathbf{H}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}_0^* \mathbf{H} \quad \text{вне } \Delta V, \quad (\text{XIII.6})$$

$$\mathbf{H}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}_0^* \mathbf{H} \quad \text{внутри } \Delta V. \quad (\text{XIII.6}')$$

Для невозмущенного резонатора в соответствии с уравнениями (XIII.1) и (XIII.2) имеем

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^* = -j\omega_0 \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^* \mathbf{E}, \quad (\text{XIII.7})$$

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^* = j\omega_0 \mu_0 \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}. \quad (\text{XIII.7}')$$

Вычисляя разность $\{\mathbf{E}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^*\} - \{\mathbf{H}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^*\}$ и интегрируя ее по объему V , получаем

$$\begin{aligned} & \int_V \{[\mathbf{E}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{H} + \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}_0^*] - [\mathbf{H}_0^* \operatorname{rot} \mathbf{E} + \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0^*]\} dv = \\ & = \int_V [j(\omega - \omega_0) \varepsilon_0 \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + j(\omega - \omega_0) \mu_0 \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}] dv + \\ & + \int_{\Delta V} [j\omega(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + j\omega(\mu - \mu_0) \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}] dv. \quad (\text{XIII.8}) \end{aligned}$$

Но из векторного тождества

$$\operatorname{div} [\mathbf{A}\mathbf{B}] \equiv \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}$$

и теоремы Остроградского — Гаусса следует, что левая часть равенства (XIII.8) равна

$$-\int_V \{\operatorname{div} [\mathbf{E}_0^* \mathbf{H}] + \operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}_0^*]\} dv = -\int_S \{[\mathbf{E}_0^* \mathbf{H}] + [\mathbf{E} \mathbf{H}_0^*]\} da. \quad (\text{XIII.9})$$

Интеграл по поверхности равен нулю, так как вектор \mathbf{E} (или \mathbf{E}_0) параллелен da (нормали к проводящей поверхности). Следовательно, уравнение (XIII.8) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} 0 &= j(\omega - \omega_0) \int_V [\varepsilon_0 \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}] dv + \\ &+ j\omega \int_{\Delta V} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}] dv, \quad (\text{XIII.8}') \end{aligned}$$

откуда находим

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{\int_{\Delta V} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}] dv}{\int_V (\varepsilon_0 \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}) dv}. \quad (\text{XIII.10})$$

Поскольку до сих пор мы не накладывали никаких ограничений, уравнение (XIII.10) дает *точное решение*. Но если допустить, что объем ΔV возмущающей неоднородности мал и что вне этого объема влиянием неоднородности можно пренебречь, т. е. $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ вне ΔV , то интеграл $\int_V (\varepsilon_0 \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + \mu_0 \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}) dv$ приближенно равен выражению $\int_V (\varepsilon_0 |\mathbf{E}_0|^2 + \mu_0 |\mathbf{H}_0|^2) dv$, т. е. учетверенной средней накопленной энергии [уравнения (1.1.11) и (1.1.12)].

В этом случае уравнение (XIII.10) принимает следующий вид:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{\int_{\Delta V} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_0^* \mathbf{E} + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}] dv}{4U_{\text{полн}}}. \quad (\text{XIII.11})$$

Источник возмущения обычно вводится в область, где очень мало либо магнитное поле, и тогда

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{\int_{\Delta V} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}_0^* \mathbf{E}] dv}{4U_{\text{полн}}}, \quad (\text{XIII.11}')$$

либо электрическое поле, и тогда

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = -\frac{\int_{\Delta V} [(\mu - \mu_0) \mathbf{H}_0^* \mathbf{H}] dv}{4U_{\text{полн}}}. \quad (\text{XIII.11}'')$$

Интеграл в выражениях (XIII.11') или (XIII.11'') нетрудно вычислить, если границы возмущающей неоднородности имеют простую форму, при которой вектор \mathbf{E} либо параллелен основной границе, и тогда

$$\mathbf{E}_0 = \mathbf{E},$$

либо ей перпендикулярен, и тогда

$$\mathbf{D}_0 = \mathbf{D}$$

или

$$\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \varepsilon \mathbf{E}.$$

Аналогичные условия относятся и к вектору \mathbf{H} .

Возмущающая неоднородность может представлять собой диэлектрик (или ферромагнетик) с потерями. При этом уравнение (XIII.11') остается справедливым, но проницаемость ε теперь уже будет комплексной величиной

$$\varepsilon = \varepsilon_0 (\varepsilon' - j\varepsilon''). \quad (\text{XIII.12})$$

Как указывалось в § 5.4, п. «в», комплексную резонансную частоту резонатора с потерями (но с высокой собственной добротностью Q_0) можно следующим образом выразить через Q_0 :

$$\omega_{\text{компл}} = \omega_{\text{рез}} + j \frac{\omega_{\text{рез}}}{2Q_0}, \quad (\text{XIII.13})$$

где $\omega_{\text{рез}}$ — частота, соответствующая резонансу (т. е. частота, на которой полное сопротивление резонатора в плоскости эквивалентного представления является вещественной величиной). Если тот же метод применить к ω и ω_0 , то уравнение (XIII.11') примет следующий вид:

$$\frac{\omega + j \frac{\omega}{2Q} - \omega_0 - j \frac{\omega_0}{2Q_0}}{\omega + j \frac{\omega}{2Q}} = - \frac{\epsilon_0 (\epsilon' - 1 - j\epsilon'') \int_{\Delta V} [\mathbf{E}_0^* \mathbf{E}] dv}{4U_{\text{полн}}} \quad (\text{XIII.14})$$

при условии, что диэлектрическая проницаемость во всем объеме ΔV одинакова.

Равенство (XIII.14) можно разбить на вещественную и мнимую части, пренебрегая при этом величиной $j\omega/2Q$ в знаменателе по сравнению с ω

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = - \epsilon_0 (\epsilon' - 1) \frac{\int_{\Delta V} [\mathbf{E}_0^* \mathbf{E}] dv}{4U_{\text{полн}}}, \quad (\text{XIII.15})$$

$$\frac{1}{Q} - \frac{1}{Q_0} = \epsilon_0 \epsilon'' \frac{\int_{\Delta V} [\mathbf{E}_0^* \mathbf{E}] dv}{2U_{\text{полн}}}. \quad (\text{XIII.15}')$$

Таким образом, измеряя сдвиг резонансной частоты и изменение добротности Q_0 , можно определить ϵ' и ϵ'' . Аналогичный расчет можно произвести для величин μ' и μ'' .

2. Возмущение в волноводе

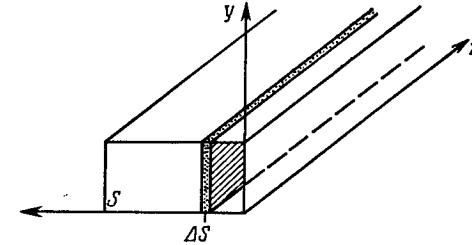
Предположим, что в волноводе появилось малое возмущение, вызванное образцом материала с поперечным сечением ΔS . Волновод и образец однородны в направлении оси z . Пусть постоянные распространения в волноводе при отсутствии и при наличии источника возмущения равны γ_0 и γ соответственно. Обозначим через \mathbf{E}_0 и \mathbf{H}_0 поля в каждой точке невозмущенного волновода, имеющего вакуумное наполнение (ϵ_0, μ_0). Для возмущенного волновода обозначим поля через \mathbf{E} и \mathbf{H} , а возмущение будем характеризовать параметрами ϵ и μ .

Запишем \mathbf{E} и \mathbf{H} в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' e^{j(\omega t - \gamma z)}, \quad (\text{XIII.16})$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' e^{j(\omega t - \gamma z)}, \quad (\text{XIII.17})$$

где \mathbf{E}' и \mathbf{H}' являются функциями только поперечных координат.



Ф и г. XIII.2. Волиовод с возмущающим образцом.

В возмущенном волноводе уравнения Максвелла принимают следующий вид:

$$\text{rot } \mathbf{H}_0 = \text{rot} (\mathbf{H}'_0 e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}) = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}'_0 e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}, \quad (\text{XIII.18})$$

$$\text{rot } \mathbf{E}_0 = \text{rot} (\mathbf{E}'_0 e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}) = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}'_0 e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}. \quad (\text{XIII.19})$$

Но, используя векторное тождество

$$[\nabla (m\mathbf{A})] = m [\nabla \mathbf{A}] + [(\nabla m) \mathbf{A}],$$

получим

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H}'_0 e^{j(\omega t - \gamma_0 z)} &= e^{j(\omega t - \gamma_0 z)} \text{rot } \mathbf{H}'_0 + [(\nabla e^{j(\omega t - \gamma_0 z)}) \mathbf{H}'_0] = \\ &= e^{j(\omega t - \gamma_0 z)} \{ \text{rot } \mathbf{H}'_0 - [a_z j \gamma_0 \mathbf{H}'_0] \}. \end{aligned} \quad (\text{XIII.20})$$

Уравнения (XIII.18) и (XIII.19) приобретают вид

$$\text{rot } \mathbf{H}'_0 - [a_z j \gamma_0 \mathbf{H}'_0] = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}'_0, \quad (\text{XIII.21})$$

$$\text{rot } \mathbf{E}'_0 - [a_z j \gamma_0 \mathbf{E}'_0] = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}'_0, \quad (\text{XIII.22})$$

а для волновода с источником возмущения

$$\text{rot } \mathbf{H}' - [a_z j \gamma \mathbf{H}'] = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}' \quad \text{вне } \Delta S, \quad (\text{XIII.23})$$

$$= j\omega \epsilon \mathbf{E}' \quad \text{внутри } \Delta S, \quad (\text{XIII.23}')$$

$$\text{rot } \mathbf{E}' - [a_z j \gamma \mathbf{E}'] = -j\omega \mu_0 \mathbf{H}' \quad \text{вне } \Delta S, \quad (\text{XIII.24})$$

$$= -j\omega \mu \mathbf{H}' \quad \text{внутри } \Delta S. \quad (\text{XIII.24}')$$

Из уравнений (XIII.23) и (XIII.23') следует, что

$$\mathbf{E}'_0^* \text{rot } \mathbf{H}' - \mathbf{E}'_0^* [a_z j \gamma \mathbf{H}'] = j\omega \epsilon_0 \mathbf{E}'_0^* \mathbf{E}' \quad \text{вне } \Delta S, \quad (\text{XIII.25})$$

$$= j\omega \epsilon \mathbf{E}'_0^* \mathbf{E}' \quad \text{внутри } \Delta S. \quad (\text{XIII.25}')$$

Из уравнений (XIII.24) и (XIII.24') следует, что

$$\mathbf{H}'_0 \text{ rot } \mathbf{E}' - \mathbf{H}'_0 [a_z j \gamma \mathbf{E}'] = -j \omega \mu_0 \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}' \quad \text{вне } \Delta S, \quad (\text{XIII.26})$$

$$= -j \omega \mu \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}' \quad \text{внутри } \Delta S. \quad (\text{XIII.26}')$$

Для невозмущенного волновода в соответствии с уравнениями (XIII.21) и (XIII.22) имеем

$$\mathbf{E}' \text{ rot } \mathbf{H}'_0 + \mathbf{E}' [a_z j \gamma_0 \mathbf{H}'_0] = -j \omega \varepsilon_0 \mathbf{E}'_0 \mathbf{E}', \quad (\text{XIII.27})$$

$$\mathbf{H}' \text{ rot } \mathbf{E}'_0 + \mathbf{H}' [a_z j \gamma_0 \mathbf{E}'_0] = j \omega \mu_0 \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}'. \quad (\text{XIII.27}')$$

Сложив уравнения (XIII.25) и (XIII.27), вычтя уравнения (XIII.26) и (XIII.27') и проинтегрировав результат по объему, получим

$$\begin{aligned} \int_V \{(\mathbf{E}'_0 \text{ rot } \mathbf{H}' + \mathbf{E}' \text{ rot } \mathbf{H}'_0) - (\mathbf{H}'_0 \text{ rot } \mathbf{E}' + \mathbf{H}' \text{ rot } \mathbf{E}'_0)\} dv - \\ - j(\gamma - \gamma_0) \int_V \{\mathbf{E}'_0 [a_z \mathbf{H}'] - \mathbf{H}'_0 [a_z \mathbf{E}']\} dv = \\ = j \omega \int_{\Delta V} \{(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}'_0 \mathbf{E}' + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}'\} dv. \quad (\text{XIII.28}) \end{aligned}$$

Первый интеграл аналогичен выражению (XIII.9) и поэтому равен нулю. Равенство (XIII.28) без этого интеграла должно соблюдаться при любой длине волновода, и поэтому интегрирование по объему можно заменить интегрированием по поперечному сечению

$$\begin{aligned} j(\gamma - \gamma_0) \int_S \{[\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'] - [\mathbf{H}'_0 \mathbf{E}']\} da = \\ = j \omega \int_{\Delta S} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}'_0 \mathbf{E}' + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}'] da \quad (\text{XIII.29}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \gamma - \gamma_0 = \frac{\omega \int_{\Delta S} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}'_0 \mathbf{E}' + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}'] da}{2 \int_S [\mathbf{E}'_0 \mathbf{H}'] da} = \\ = \frac{\omega \int_{\Delta S} [(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}'_0 \mathbf{E}' + (\mu - \mu_0) \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}'] da}{4P}, \quad (\text{XIII.30}) \end{aligned}$$

если принять, что влияние возмущения является локализованным, т. е. что $\Delta S \ll S$ и что вне возмущающего объема $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$.

Если ε (или μ) — комплексная величина, то γ — также комплексная величина

$$\gamma = \beta - j\alpha, \quad (\text{XIII.31})$$

где β — фазовая постоянная, а α — декремент затухания.

Выражение (XIII.30) принимает вид

$$\beta - j\alpha - \beta_0 = \omega \varepsilon_0 (\varepsilon' - 1 - j\varepsilon'') \frac{\int_{\Delta S} [\mathbf{E}'_0 \mathbf{E}'] da}{4P} \quad (\text{XIII.30}')$$

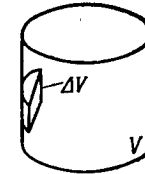
и может быть расчленено на действительную и мнимую составляющие

$$\beta - \beta_0 = \varepsilon_0 (\varepsilon' - 1) \frac{\omega \int_{\Delta S} [\mathbf{E}'_0 \mathbf{E}'] da}{4P}, \quad (\text{XIII.32})$$

$$\alpha = \varepsilon_0 \varepsilon'' \frac{\omega \int_{\Delta S} [\mathbf{E}'_0 \mathbf{E}'] da}{4P}. \quad (\text{XIII.33})$$

3. Возмущение стенки резонатора

Рассмотрим резонатор, изображенный на фиг. XIII.3, в котором имеется инородное включение малого объема ΔV . Это включение (с параметрами ε , μ) примыкает к стенке резонатора.



Ф и г. XIII.3. Возмущение стенки резонатора.

Уравнение (XIII.11) справедливо и для этого случая

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = - \frac{\int_{\Delta V} [\varepsilon_0 (\varepsilon' - 1) \mathbf{E}'_0 \mathbf{E} + \mu_0 (\mu' - 1) \mathbf{H}'_0 \mathbf{H}] dv}{4U_{\text{полн}}}. \quad (\text{XIII.11})$$

Поскольку вектор электрического поля перпендикулярен к стенке, а вектор магнитного поля параллелен ей, соотношения между \mathbf{E}_0 и \mathbf{E} , а также между \mathbf{H}_0 и \mathbf{H} имеют следующий вид:

$$\varepsilon_0 \mathbf{E}_0 = \varepsilon \mathbf{E}$$

или

$$\mathbf{E}_0 = \varepsilon' \mathbf{E}$$

(на границе диэлектрика нормальная составляющая электрической индукции непрерывна) и

$$H_0 = H$$

(тангенциальная составляющая напряженности магнитного поля на границе магнитоэлектрика непрерывна).

В этом случае уравнение (XIII.11) запишется так:

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = \frac{\int_{\Delta V} \left[\epsilon_0 \left(\frac{\epsilon' - 1}{\epsilon'} \right) |E_0|^2 + \mu_0 (\mu' - 1) |H_0|^2 \right] dv}{4U_{\text{полн}}}. \quad (\text{XIII.34})$$

В частном случае, когда $\epsilon' \rightarrow \infty$ и $\mu' \rightarrow 0$, т. е. когда в образце не накоплено энергии, справедливо уравнение¹⁾

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} = - \frac{\int_{\Delta V} (\epsilon_0 |E_0|^2 - \mu_0 |H_0|^2) dv}{4U_{\text{полн}}}. \quad (\text{XIII.35})$$

Но в этом случае внесение образца, имеющего объем ΔV , эквивалентно деформации стенки резонатора. Из уравнения (XIII.35) следует, что деформация стенки внутрь резонатора приводит соответственно к понижению или повышению резонансной частоты в зависимости от того, какое поле преобладает в области деформации — электрическое или магнитное. Если при деформации стенки убывают одинаковые количества электрической и магнитной энергий, то резонансная частота остается неизменной.

¹⁾ Другой вывод в сущности такого же уравнения приводится в [25], где уравнение (7.1) в наших обозначениях имеет следующий вид:

$$\frac{\omega^2 - \omega_0^2}{\omega_0^2} = \int_{\Delta V} \frac{(\mu_0 |H_0|^2 - \epsilon_0 |E_0|^2) dv}{2U_{\text{полн}}}.$$

Приложение XIV



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ СЕКЦИЯ

Рассмотрим произвольную дифференциальную секцию, относительный фазовый сдвиг в которой составляет $(\pi + \delta)$ рад.

На основании изложенного в § 4.7 [уравнения (4.7.10) и (4.7.11)] имеем

$$\begin{aligned} a_1^\perp &= a_1 \sin \theta, \\ a_1^\parallel &= a_1 \cos \theta \end{aligned} \quad (\text{XIV.1})$$

и

$$\begin{aligned} a_{1\text{ВЫХ}}^\perp &= a_1 \sin \theta e^{-j\varphi_2}, \\ a_{1\text{ВЫХ}}^\parallel &= a_1 \cos \theta e^{-j(\varphi_2 + \pi + \delta)} = -a_1 \cos \theta e^{-j\varphi_2} e^{-j\delta}. \end{aligned} \quad (\text{XIV.2})$$

В плече 3 получим

$$\begin{aligned} b_3 &= a_{1\text{ВЫХ}}^\perp \sin \theta + a_{1\text{ВЫХ}}^\parallel \cos \theta = \\ &= a_1 e^{-j\varphi_2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta e^{-j\delta}) = \\ &= a_1 e^{-j\varphi_2} \left[\frac{2 - (e^{j2\theta} + e^{-j2\theta})}{4} - \frac{2 + (e^{j2\theta} + e^{-j2\theta})}{4} e^{-j\delta} \right] = \\ &= a_1 e^{-j\varphi_2} (\alpha - \beta \cos 2\theta), \end{aligned} \quad (\text{XIV.3})$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (1 - e^{-j\delta}), \\ \beta &= \frac{1}{2} (1 + e^{-j\delta}). \end{aligned} \quad (\text{XIV.4})$$

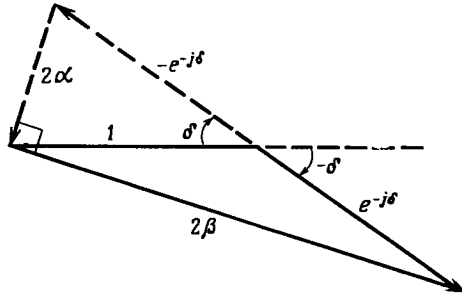
Отметим, что если $\delta \rightarrow 0$, то $\alpha \rightarrow 0$, а $\beta \rightarrow 1$ (фиг. XIV.1). В плече 4 получим

$$\begin{aligned} b_4 &= -a_{1\text{ВЫХ}}^\perp \cos \theta + a_{1\text{ВЫХ}}^\parallel \sin \theta = \\ &= -a_1 (\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta e^{-j\delta}) e^{-j\varphi_2} = \\ &= a_1 e^{-j\varphi_2} (-\beta \sin 2\theta). \end{aligned} \quad (\text{XIV.5})$$

Аналогично сигнал a_2 , поданный в плечо 2, приведет к появлению волн b_3 и b_4

$$\begin{aligned} b_3 &= a_2 e^{-j\varphi_2} (-\beta \sin 2\theta), \\ b_4 &= a_2 e^{-j\varphi_2} (\alpha + \beta \cos 2\theta). \end{aligned} \quad (\text{XIV.6})$$

Матрица рассеяния для произвольной дифференциальной секции



Ф и г. XIV.1. Соотношение между α , β и δ в произвольной дифференциальной секции.

запишется в виде

$$\begin{aligned} [S]_{\Delta(180^\circ+\delta)} &= \\ &= e^{-j\varphi_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & (\alpha - \beta \cos 2\theta) & (-\beta \sin 2\theta) \\ 0 & 0 & (-\beta \sin 2\theta) & (\alpha + \beta \cos 2\theta) \\ (\alpha - \beta \cos 2\theta) & (-\beta \sin 2\theta) & 0 & 0 \\ (-\beta \sin 2\theta) & (\alpha + \beta \cos 2\theta) & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{XIV.7})$$

Если угол δ мал, то матрица (XIV.7) описывает случай неидеальной полуволновой пластины. Ее воздействие на правополяризованную по кругу волну приведет к тому, что на выходе получим

$$\mathbf{b} = a e^{-j(\varphi_2 - \varphi_0)} \left\{ \alpha \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} - \beta e^{-j2\theta} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ j \end{vmatrix} \right\} \quad (\text{XIV.8})$$

т. е. имеем сумму двух волн: правополяризованной, фаза которой не зависит от θ , и левополяризованной, фаза которой изменяется на угол -2θ .

Если $\delta = -\pi/2$, так что

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (1 - j), \\ \beta &= \frac{1}{2} (1 + j), \end{aligned}$$

то выражение (XIV.7) описывает случай дифференциальной 90° -секции, ориентированной под произвольным углом θ . Матрица рассеяния такой секции имеет вид

$$\begin{aligned} [S]_{\Delta 90^\circ} &= e^{-j\varphi_1} \times \\ &\times \begin{vmatrix} 0 & 0 & (\sin^2 \theta - j \cos^2 \theta) & -(1+j) \sin \theta \cos \theta \\ 0 & 0 & -(1+j) \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - j \sin^2 \theta) \\ (\sin^2 \theta - j \cos^2 \theta) & -(1+j) \sin \theta \cos \theta & 0 & 0 \\ -(1+j) \sin \theta \cos \theta & (\cos^2 \theta - j \sin^2 \theta) & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{XIV.9})$$

Можно проверить, что при $\theta = 90^\circ$ выражение (XIV.9) превращается в (4.7.5).

Представляет интерес также неидеальная четвертьволновая пластина, дифференциальный фазовый сдвиг которой равен $90^\circ + \delta'$. Из матрицы (XIV.7), где теперь

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} (1 - j e^{-j\delta'}), \\ \beta &= \frac{1}{2} (1 + j e^{-j\delta'}), \end{aligned}$$

получим матрицу рассеяния такой пластины

$$[S]_{\Delta(90^\circ+\delta')} = e^{-j\varphi_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -j e^{-j\delta'} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -j e^{-j\delta'} & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{XIV.10})$$

Воздействие неидеальной четвертьволновой пластины на линейно поляризованную волну, которая вводится в плечо 1 под углом 45° к нему, приведет к появлению на выходе волны

$$\mathbf{b} = a e^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -j e^{-j\delta'} \end{vmatrix} \approx a e^{-j(\varphi_1 + \frac{\delta'}{2} - \varphi_0)} \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -j \end{vmatrix} + \frac{\delta'}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ j \\ -1 \end{vmatrix} \right\} \quad (\text{XIV.11})$$

которая является суммой правополяризованной по кругу волны и очень малой по величине левополяризованной волны. Если же на вход подать поляризованную по кругу волну, то на выходе получим

$$\mathbf{b} = e^{-j\varphi_1} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -je^{-j\delta'} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -je^{-j\delta'} & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{j\varphi_0} \begin{vmatrix} a \\ \pm ja \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} =$$

$$= ae^{-j(\varphi_1 - \varphi_0)} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm e^{-j\delta'} \end{vmatrix} = ae^{-j(\varphi_1 + \frac{\delta'}{2} - \varphi_0)} \left\{ \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm 1 \end{vmatrix} + \frac{j\delta'}{2} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \pm 1 \end{vmatrix} \right\}. \quad (\text{XIV.12})$$

т. е. сумму двух линейно поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях волн. Одна из них — та, которую хотят получить на выходе, а вторая (малая по величине) — паразитная.

Приложение XV

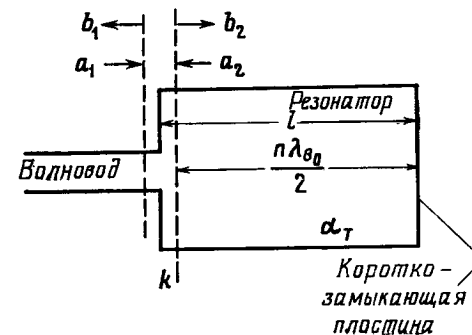


ДОБРОТНОСТЬ И ПЕРЕХОДНЫЙ ПРОЦЕСС В РЕЗОНАТОРЕ С ОДНИМ ЭЛЕМЕНТОМ СВЯЗИ

По определению добротности

$$Q = 2\pi \frac{\text{Энергия, накопленная в резонаторе}}{\text{Энергия, рассеиваемая за период}} \Big|_{\text{при } f=f_0} \quad (\text{5.4.1})$$

С другой стороны, падающие и отраженные волны внутри и вне резонатора (фиг. XV.1) на основании уравнений (5.1.5'),



Ф и г. XV.1. Резонатор с одним входом.

(5.1.6') и (5.1.3) на резонансной частоте записываются в виде

$$b_1 = - \left(\sqrt{1-k^2} - \frac{k^2 e^{-\alpha_T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} \right) a_1, \quad (\text{5.1.5}')$$

$$a_2 = -b_2 e^{-\alpha_T}, \quad (\text{5.1.3}')$$

$$b_2 = \frac{jk}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}} a_1. \quad (\text{5.1.6}')$$

Энергию, накопленную в резонаторе, получим из выражения¹⁾

$$U_{\text{нак}} = \frac{2Pl}{v_{\text{гр}}}, \quad (\text{XV.1})$$

¹⁾ Энергию бегущей волны, проходящую через поперечное сечение волновода в 1 сек, обозначим через P . Эта величина есть не что иное, как энергия, накопленная на длине волновода, равной $v_{\text{гр}}$. Следовательно, энергия, накопленная на единице длины, равна $P/v_{\text{гр}}$.

где P — мощность бегущей волны¹⁾; $v_{гр}$ — групповая скорость; l — длина резонатора.

За один период на резонансной частоте в резонаторе рассеивается энергия

$$U_{расс} = \frac{2\alpha_T P}{\omega_0} 2\pi. \quad (XV.2)$$

Отсюда получаем выражение для ненагруженной добротности

$$Q_0 = 2\pi \frac{2Pl}{v_{гр}} / 2\pi \frac{2P\alpha_T}{\omega_0} = \left(\frac{2l}{\alpha_T} \right) \frac{\pi\lambda_B}{\lambda^2}, \quad (XV.3)$$

так как

$$v_{гр} = \frac{\omega\lambda}{2\pi} \frac{\lambda}{\lambda_B}.$$

Вводя среднюю постоянную затухания (в неперах на метр)

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_T}{2l},$$

которая включает и потери в торцовых стенках резонатора, получим

$$Q_0 = \frac{\pi}{\bar{\alpha}} \frac{\lambda_B}{\lambda^2}. \quad (XV.3')$$

Потери мощности за период во внешней цепи определяются уравнением

$$\frac{2\pi}{2} \frac{|ka_2|^2}{\omega_0} \approx 2\pi \frac{Pk^2}{\omega_0}. \quad (XV.4)$$

Следовательно, внешняя добротность равна

$$Q_{вн} = 2\pi \frac{2Pl}{v_{гр}} / \frac{2\pi Pk^2}{\omega_0} = \left(\frac{2l}{k^2} \right) \frac{2\pi\lambda_B}{\lambda^2} \quad (XV.5)$$

или

$$Q_{вн} = \frac{2\pi}{\bar{k}^2} \frac{\lambda_B}{\lambda^2}, \quad (XV.5')$$

где $\bar{k}^2 = k^2/2l$ — коэффициент связи, который характеризует не только собственно связь, но и влияние длины резонатора l на внешнюю добротность.

¹⁾ Эта мощность изменяется по длине волновода, так как волна b_2 затухает при прохождении резонатора. Однако для малых значений α_T изменения P малы по сравнению с величиной P . Поэтому в (XV.1) и в дальнейшем изложении величина P рассматривается как средняя мощность.

При критической связи $Q_0 = Q_{вн}$, поэтому

$$\bar{k}^2 = 2\bar{\alpha}^2. \quad (XV.6)$$

На основании уравнения (5.4.32) получим выражение для нагруженной добротности

$$\frac{1}{Q_H} = \frac{1}{Q_0} + \frac{1}{Q_{вн}} = (\bar{k}^2 + 2\bar{\alpha}) \left(\frac{\lambda^2}{2\pi\lambda_B} \right). \quad (XV.7)$$

Все вышеизложенное можно непосредственно применить к резонатору типа бегущей волны, если принять, что длина окружности последнего равна $2l$.

Пусть в момент времени $t = 0^+$ сигнал на входе резонатора мгновенно уменьшается до нуля. Тогда величина b_1 описывается уравнением

$$b_1|_{t=0} = \frac{k^2 e^{-\alpha_T}}{1 - \sqrt{1 - k^2} e^{-\alpha_T}} a_1 = B_1. \quad (XV.8)$$

Величина b_1 характеризует отраженную волну во входном волноводе и является частью волны, многократно проходящей взад и вперед по резонатору. Амплитуда волны b_1 остается постоянной в течение времени T , которое необходимо, чтобы волна прошла расстояние $2l$,

$$T = \frac{2l}{v_{гр}}. \quad (XV.9)$$

В момент времени $t = T$ b_1 уменьшается пропорционально величине $\sqrt{1 - k^2} e^{-\alpha_T}$, так как потери в резонаторе больше не восполняются. Через последовательные промежутки времени T амплитуда волны b_1 будет уменьшаться. Величина уменьшения определяется коэффициентом $\sqrt{1 - k^2} e^{-\alpha_T}$. Убывание амплитуды по геометрической прогрессии приведет к тому, что огибающая b_1 будет иметь вид «лестницы эскалатора» (фиг. XV.2). Строго говоря, такая функция сильно отличается от функции, полученной на основе уравнения (5.4.30) (спадающая экспоненциальная функция с постоянной времени, равной $2Q_H/\omega_0$). Однако, как будет показано ниже, время, необходимое для достижения величины $e^{-1} b_1|_{t=0} = e^{-1} B_1$, в обоих случаях одинаково, если коэффициенты k и α_T малы.

¹⁾ Выражение аналогично (5.1.9) при условии, что α_T и k настолько малы, что

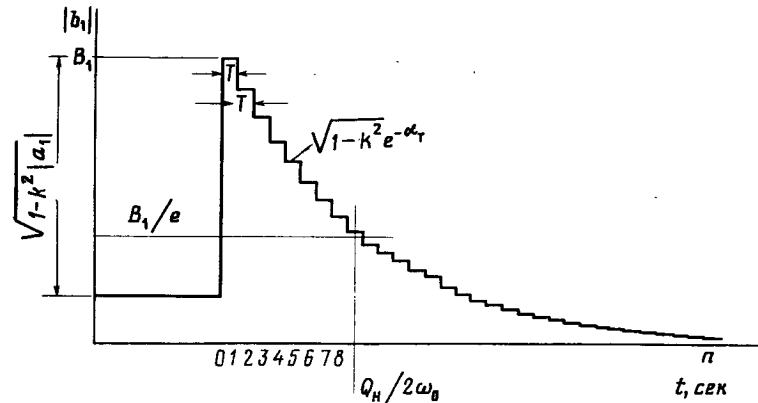
$$\sqrt{1 - k^2} \approx 1 - \frac{1}{2} k^2, \\ e^{-\alpha_T} \approx 1 - \alpha_T.$$

Запишем ступенчатую функцию аналитически

$$b_1 = B_1 (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T})^n, \quad (\text{XV.10})$$

где n — целое число ($n=0, 1, 2, \dots$).

Теперь положим $t=xT$. Если в уравнение (XV.10) подставить x вместо n , то получим плавную кривую, значения которой совпадают со значениями ступенчатой функции, когда x принимает целые значения. Заметим, что величина T в большинстве



Ф и г. XV.2. Переходный процесс при выключении генератора.

практических случаев чрезвычайно мала, поэтому даже для нецелочисленных значений x аппроксимация остается хорошей.

Перепишем уравнение (XV.10) таким образом

$$b_1 = B_1 (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T})^{t/T}. \quad (\text{XV.10}')$$

В какой-то промежуток времени $t=\tau$ величина b_1 стала равной $e^{-1}B_1$. Этот момент времени определяется из равенства

$$e = (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T})^{-\tau/T}. \quad (\text{XV.11})$$

Прологарифмируем обе части этого равенства

$$\begin{aligned} \ln e = 1 &= -\frac{\tau}{T} \ln (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha_T}) = \\ &= -\frac{\tau}{T} [\ln \sqrt{1-k^2} - \alpha_T]. \end{aligned} \quad (\text{XV.12})$$

Для небольших значений k

$$\ln \sqrt{1-k^2} \approx -\frac{k^2}{2}.$$

Поэтому уравнение (XV.12) можно записать в виде

$$\tau = \frac{T}{\frac{k^2}{2} + \alpha_T}. \quad (\text{XV.13})$$

Подставив в последнее выражение T из уравнения (XV.9) и используя определения $\bar{\alpha}$ и \bar{k}^2 , получим

$$\tau = \frac{2}{v_{\text{ГР}} (\bar{k}^2 + 2\bar{\alpha}_T)}. \quad (\text{XV.13}')$$

Наконец, воспользовавшись уравнением (XV.7), можно записать

$$\tau = \frac{2\pi\lambda_B}{\omega_0\lambda^2} \frac{2}{(\bar{k}^2 + 2\bar{\alpha}_T)} = \frac{2Q_H}{\omega_0}. \quad (\text{XV.13}''')$$

Таким образом, реальный переходный процесс в резонаторах, имеющий место, например, когда входная мощность выключается, почти аналогичен переходному процессу в эквивалентной схеме резонатора с сосредоточенными параметрами. Хотя огибающая переходного процесса в первом случае имеет форму «лестницы эскалатора» (в отличие от экспоненты во втором случае), однако постоянная времени одна и та же.

Важное практическое значение представляет тот факт, что действительная часть частоты не изменяется во время переходного процесса, хотя в соответствии с уравнением (5.5.1) частота меняется. Распространение по-прежнему происходит в соответствии с волновым уравнением, а затухание и потери не изменяют частоту¹⁾.

Величина B_1 , которая представляет собой значение b_1 в момент времени $t=0^+$ [уравнение (XV.8)], может быть либо меньше a_1 , если $Q_{\text{вн}} > Q_0$, либо больше a_1 , если $Q_{\text{вн}} < Q_0$. В предельном случае, когда $Q_{\text{вн}} \leq Q_0$ (величина α_T пренебрежимо мала),

$$B_1 \approx \frac{k^2}{1 - \sqrt{1-k^2}} a_1 \approx 2a_1, \quad (\text{XV.14})$$

т. е. в момент выключения подводимой к резонатору мощности отраженная мощность оказывается в четыре раза больше падающей.

Переходная характеристика функции типа «ступенька» (включение мощности) несколько сложнее, но подчиняется тем же принципам.

В момент времени $t=0^+$

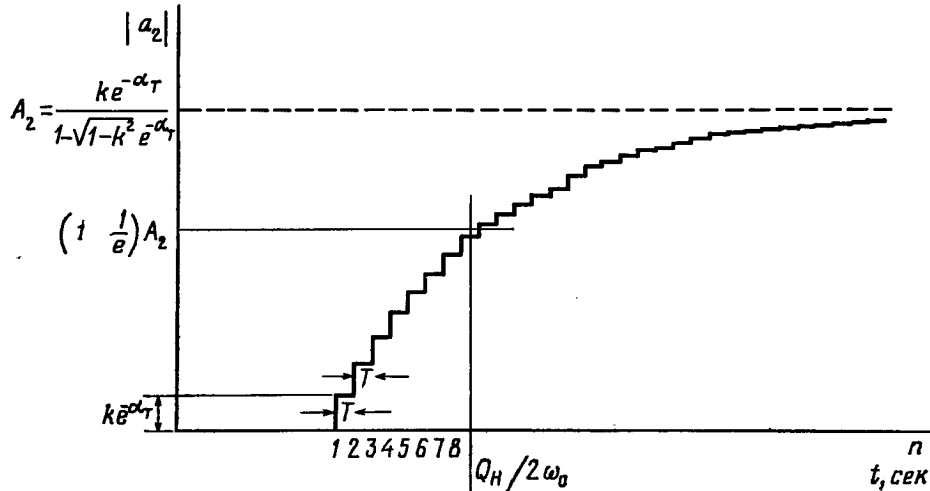
$$b_1|_{t=0} = -\sqrt{1-k^2} a_1, \quad (\text{XV.15})$$

т. е. практически $b_1|_{t=0} = -a_1$ для малых значений k . Эта величина не меняется в течение времени, равного T , а затем уменьшается

¹⁾ Частота будет изменяться только в случае, когда среда, в которой происходит распространение, обладает меняющимися во времени свойствами.

на величину $k^2 e^{-\alpha t} a_1$. С течением времени в резонаторе накапливается энергия (при этом увеличивается утечка и уменьшается b_1 ¹⁾) до тех пор, пока не будет достигнуто равновесное состояние, характеризующееся выражением (5.1.5).

Рассмотрим изменение a_2 во времени (фиг. XV.3). В промежуток времени между $t=0$ и $t=T$ $a_2=0$, поскольку фронт



Ф и г. XV.3. Нарастание амплитуды $|a_2|$ после включения генератора.

ступенчатой функции еще не достиг плеча 2. В момент $t=T$ величина a_2 скачком увеличивается до значения $(-jke^{-\alpha t} a_1)$. Этот уровень, за который ответствен непосредственно источник сигнала, не изменяется, пока последний работает. Доля волны, подошедшей к плечу 2, характеризуемая коэффициентом $\sqrt{1-k^2}$, отражается к закорачивающей стенке, вновь отражается от последней и, ослабленная по закону $e^{-\alpha t}$, возвращается к плечу 2. При $t=2T$ она складывается с первой волной, и полученная сумма уже не меняется, пока работает источник мощности. В момент времени $t=3T$ к первым двум слагаемым добавляется еще часть второй ступеньки (коэффициент уменьшения также $\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha t}$). Для

¹⁾ Если резонатор пересвязан, $b_1 = 0$ в какой-то момент времени в течение переходного процесса.

момента времени $t=nT$ получим геометрическую прогрессию

$$\begin{aligned} |a_2| &= ke^{-\alpha T} [1 + (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T}) + (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T})^2 + \dots \\ &\dots + (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T})^{n-1}] |a_1| = \\ &= ke^{-\alpha T} \left[\frac{1 - (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T})^n}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T}} \right] |a_1|. \end{aligned} \quad (\text{XV.16})$$

Заметим, что когда $n \rightarrow \infty$, уравнение (XV.16) похоже на (5.1.6').

При замене n на переменную t/T получим плавную аппроксимацию рассматриваемой переходной функции

$$|a_2| = \tilde{k} e^{-\alpha t} \left[\frac{1 - (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha t})^{t/T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T}} \right] |a_1|. \quad (\text{XV.17})$$

На основании ранее приведенных соображений [уравнения (XV.10)–(XV.13)] очевидно, что постоянная времени для этого случая также равна $2Q_H/\omega_0$. В момент времени $t=T$

$$|a_2| = \left(1 - \frac{1}{e}\right) |a_2|_{\text{стац.}}$$

Как функция времени b_1 запишется [25]

$$b_1 = \left\{ -\sqrt{1-k^2} + k^2 e^{-\alpha t} \left[\frac{1 - (\sqrt{1-k^2} e^{-\alpha t})^{t/T}}{1 - \sqrt{1-k^2} e^{-\alpha T}} \right] \right\} a_1. \quad (\text{XV.18})$$

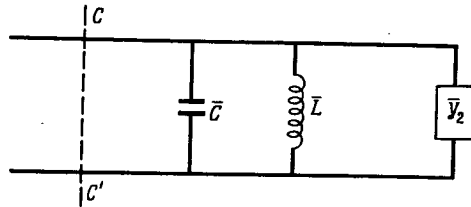
Приложение XVI

КАСКАДНОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ ДВУХ РЕЗОНАТОРОВ. СВЯЗИ, БЛИЗКИЕ К ПОЛУВОЛНОВОЙ И ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВОЙ

1. Связь, близкая к полуволновой

Полуволновая связь ($d=0$) рассмотрена в § 6.1. В данном приложении будем считать, что d — небольшая положительная или отрицательная величина, либо (если пренебречь зависимостью электрической длины линии связи от частоты) величина, близкая к $\lambda_B/2$.

Будем рассматривать наиболее важный для практики случай одинаковых симметричных резонаторов без потерь. На фиг. XVI.1



Ф и г. XVI.1. Эквивалентная схема (связь, близкая к полуволновой).

показана нормированная эквивалентная схема, на которой \bar{y}_2 представляет нормированную полную проводимость резонатора 2 с его нагрузкой \bar{y}_L , пересчитанной по уравнению (1.3.25) с учетом длины линии связи d ,

$$\bar{y}_2 = \frac{\bar{y}_L \cos \frac{2\pi d}{\lambda_B} + j \sin \frac{2\pi d}{\lambda_B}}{\cos \frac{2\pi d}{\lambda_B} + j \bar{y}_L \sin \frac{2\pi d}{\lambda_B}} \quad (\text{XVI.1})$$

Поскольку мы приняли, что d мало по сравнению с длиной волны в волноводе λ_B , выражение (XVI.1) упрощается

$$\bar{y}_2 \approx \frac{\bar{y}_L + j\theta}{1 + j\bar{y}_L\theta}, \quad (\text{XVI.1}')$$

где

$$\theta = 2\pi d/\lambda_B.$$

Но, согласно уравнению (5.7.14),

$$\bar{y}_L = 1 + j\bar{b}, \quad (\text{XVI.2})$$

так что равенство (XVI.1') принимает вид

$$\bar{y}_2 \approx \frac{1 + j(\bar{b} + \theta)}{1 + j\theta(1 + j\bar{b})}. \quad (\text{XVI.3})$$

Таким образом, полная входная проводимость в плоскости CC' будет определяться соотношением

$$\bar{y}_{CC'} = j\bar{b} + \bar{y}_2 = \frac{(1 - \theta\bar{b}) + j(2\bar{b} + \theta - \theta\bar{b}^2)}{(1 - \theta\bar{b}) + j\theta}. \quad (\text{XVI.4})$$

При $\bar{y}_{CC'} = 1$ отражений на входе нет, и, поскольку потери также отсутствуют, вся мощность передается в согласованную нагрузку. Величина

$$(\bar{y}_{CC'} - 1) = \frac{j(2\bar{b} - \theta\bar{b}^2)}{(1 - \theta\bar{b}) + j\theta}$$

обращается в нуль при

$$\theta\bar{b}^2 - 2\bar{b} = 0, \quad (\text{XVI.5})$$

т. е. когда

$$\bar{b} = 2x_{01} = 0 \quad (\text{XVI.6a})$$

или

$$\bar{b} = 2x_{02} = \frac{2}{\theta} = 2 \frac{\lambda_B}{2\pi d}. \quad (\text{XVI.6b})$$

Из уравнения (XVI.6a) следует, что одна из двух частот, на которых вся энергия передается в согласованную нагрузку, всегда равна

$$\omega_{01} = \omega_0, \quad (\text{XVI.7a})$$

а из уравнения (XVI.6b) можно найти вторую из этих двух частот

$$\omega_{02} = \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2Q_H} \frac{\lambda_B}{2\pi d} \right), \quad (\text{XVI.7b})$$

так как $x = Q_H 2d\omega/\omega_0$.

Если d положительно (плоскости отсчета параметров резонаторов не перекрываются), ω_{02} стремится к $+\infty$ при $d \rightarrow 0$.

Когда d отрицательно (плоскости отсчета перекрываются), при уменьшении d частота ω_0 проходит через нуль, а затем стремится к $-\infty$ при $d \rightarrow 0$.

2. Связь, близкая к четвертьволновой

Если резонаторы одинаковы, симметричны и не обладают потерями, то можно воспользоваться уже применявшейся эквивалентной схемой, изображенной на фиг. XVI.1.

Нормированная полная проводимость \bar{y}_2 определяется выражением

$$\bar{y}_2 = \frac{\bar{y}_L \cos(\theta + \pi/2) + j \sin(\theta + \pi/2)}{\cos(\theta + \pi/2) + j \bar{y}_L \sin(\theta + \pi/2)} = \frac{-\bar{y}_L \sin \theta + j \cos \theta}{-\sin \theta + j \bar{y}_L \cos \theta}, \quad (\text{XVI.8})$$

в котором \bar{y}_L определяется тем же равенством

$$\bar{y}_L = 1 + j\bar{b}, \quad (\text{XVI.2})$$

а θ представляет разность (положительную или отрицательную) между величинами d и $\lambda_B/4$.

Поскольку нами принято, что θ мало, уравнение (XVI.8) упрощается

$$\bar{y}_2 \approx \frac{-\bar{y}_L \theta + j}{-\theta + j \bar{y}_L}. \quad (\text{XVI.8}')$$

Полная входная проводимость в плоскости CC' равна

$$\bar{y}_{CC'} = j\bar{b} + \frac{-(1 + j\bar{b})\theta + j}{-\theta + j(1 + j\bar{b})} = \frac{(1 - 2\theta\bar{b} - \bar{b}^2) + j(\bar{b} + \theta)}{1 + j(\theta + \bar{b})}. \quad (\text{XVI.9})$$

Как и в предыдущем случае, при $\bar{y}_{CC'} = 1$ отражений на входе нет, и, поскольку потери также отсутствуют, вся мощность передается в согласованную нагрузку. Величина

$$(\bar{y}_{CC'} - 1) = -\frac{2\theta\bar{b} + \bar{b}^2}{1 + j(\theta + \bar{b})}$$

обращается в нуль при

$$\bar{b}^2 + 2\theta\bar{b} = 0,$$

т. е. при

$$\bar{b} = 2x_{01} = 0 \quad (\text{XVI.10a})$$

или

$$\bar{b} = 2x_{02} = -2\theta. \quad (\text{XVI.10b})$$

Из уравнения (XVI.10a) следует, что одна из двух частот, на которых вся энергия передается в согласованную нагрузку, всегда равна

$$\omega_{01} = \omega_0, \quad (\text{XVI.11a})$$

а из уравнения (XVI.10b) можно найти вторую из этих двух частот

$$\omega_{02} = \omega_0 \left[1 - \frac{\pi}{Q_H} \left(\frac{d}{\lambda_B} - \frac{1}{4} \right) \right]. \quad (\text{XVI.11b})$$

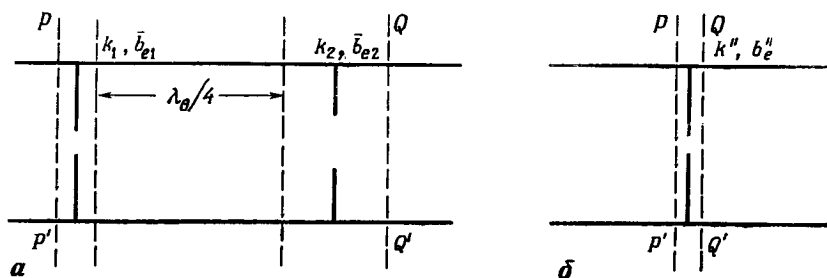
При $d < \lambda_B/4$ эта частота превышает ω_0 , а при $d > \lambda_B/4$ оказывается меньше этой величины. В обоих случаях характеристика соответствует связи выше критической. Если $d \rightarrow \lambda_B/4$, то $\omega_{02} \rightarrow \omega_{01}$ (критическая связь).

Заметим, что для одинаковых симметричных резонаторов без потерь изменением d нельзя имитировать связь меньше критической, так как при любом значении d частота ω_0 всегда будет резонансной.

Приложение XVII

ДИАФРАГМА, ЭКВИВАЛЕНТНАЯ ДВУМ НЕОДИНАКОВЫМ ДИАФРАГМАМ, СВЯЗАННЫМ ЧЕТВЕРТЬВОЛНОВОЙ ЛИНИЕЙ

Рассмотрим диафрагму 1, связанную с диафрагмой 2 четвертьволновой линией, длина которой совпадает с расстоянием между



Ф и г. XVII.1. Две диафрагмы с четвертьволновой связью и эквивалентная им одиночная диафрагма.

плоскостями отсчета (при этом величины $s_{11} = s_{22}$ вещественны и отрицательны), как показано на фиг. XVII.1, а.

Из уравнения (6.2.9) следует, что

$$[A]_{\text{общ}} = \begin{vmatrix} 0 & \bar{B}_1 \\ \bar{C}_1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & j \\ j & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & \bar{B}_2 \\ \bar{C}_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & j\bar{B}_1\bar{B}_2 \\ j\bar{C}_1\bar{C}_2 & 0 \end{vmatrix} \quad (\text{XVII.1})$$

где

$$\bar{B}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - k_1^2}}{jk_1}, \quad \bar{B}_2 = \frac{1 - \sqrt{1 - k_2^2}}{jk_2},$$

$$\bar{C}_1 = \frac{1 + \sqrt{1 - k_1^2}}{jk_1}, \quad \bar{C}_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - k_2^2}}{jk_2}.$$

Матрица рассеяния $[S]$, соответствующая матрице передачи $[A]_{\text{общ}}$, записывается в виде

$$[S]'' = \begin{vmatrix} s_{11}'' & s_{12}'' \\ s_{12}'' & s_{11}'' \end{vmatrix} \quad (\text{XVII.2})$$

где, согласно уравнениям (XI.17) и (XI.18),

$$s_{11}'' = \frac{\bar{B}_{\text{общ}} - \bar{C}_{\text{общ}}}{\bar{B}_{\text{общ}} + \bar{C}_{\text{общ}}} = \frac{(\bar{B}_1\bar{B}_2) - (\bar{C}_1\bar{C}_2)}{(\bar{B}_1\bar{B}_2) + (\bar{C}_1\bar{C}_2)},$$

$$s_{12}'' = \frac{-2j}{\bar{B}_{\text{общ}} + \bar{C}_{\text{общ}}} = \frac{-2j}{(\bar{B}_1\bar{B}_2) + (\bar{C}_1\bar{C}_2)}.$$

После подстановки выражений $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{C}_1, \bar{C}_2$ из соотношений (XVII.1) получим

$$s_{11}'' = \frac{-(\sqrt{1 - k_1^2} + \sqrt{1 - k_2^2})}{2 + 2\sqrt{1 - k_1^2}\sqrt{1 - k_2^2}}, \quad (\text{XVII.3})$$

$$s_{12}'' = \frac{jk_1k_2}{1 + \sqrt{1 - k_1^2}\sqrt{1 - k_2^2}}. \quad (\text{XVII.4})$$

Но в соответствии с выражением (5.6.4) матрица рассеяния для эквивалентной диафрагмы с реактивной проводимостью b_e'' имеет вид

$$[S]'' = \frac{1}{\sqrt{b_e''^2 + 4}} \begin{vmatrix} -|b_e''| & \pm 2j \\ \pm 2j & -|b_e''| \end{vmatrix} \quad (\text{XVII.5})$$

Следовательно,

$$\frac{2}{\sqrt{b_e''^2 + 4}} = \frac{k_1k_2}{1 + \sqrt{1 - k_1^2}\sqrt{1 - k_2^2}}, \quad (\text{XVII.6})$$

что после подстановки величин

$$k_1 = \frac{\pm 2}{\sqrt{4 + b_{e1}^2}}, \quad k_2 = \frac{\pm 2}{\sqrt{4 + b_{e2}^2}} \quad (\text{5.6.5})$$

дает

$$\frac{2}{\sqrt{b_e''^2 + 4}} = \frac{4}{\sqrt{4 + b_{e1}^2}\sqrt{4 + b_{e2}^2}} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{4 + b_{e1}^2}}\sqrt{1 - \frac{4}{4 + b_{e2}^2}}} =$$

$$= \frac{4}{\bar{b}_{e1}\bar{b}_{e2} + \sqrt{4 + b_{e1}^2}\sqrt{4 + b_{e2}^2}}. \quad (\text{XVII.6'})$$

Решая уравнение (XVII.6') относительно \bar{b}_e'' , найдем

$$\bar{b}_e'' = \frac{\bar{b}_{e1}\sqrt{4 + b_{e2}^2} + \bar{b}_{e2}\sqrt{4 + b_{e1}^2}}{2}. \quad (\text{XVII.7})$$

Решение (XVII.7) можно записать в приближенном виде

$$\bar{b}_e'' \approx \bar{b}_{e1}\bar{b}_{e2}, \quad (\text{XVII.7'})$$

если \bar{b}_{e1} и \bar{b}_{e2} достаточно велики, и в виде

$$\bar{b}_e'' \approx \bar{b}_{e1} + \bar{b}_{e2}, \quad (\text{XVII.7''})$$

если \bar{b}_{e1} и \bar{b}_{e2} малы.

¹⁾ Отметим, что независимо от того, являются ли обе диафрагмы индуктивными или емкостными, их совокупность является индуктивной при четвертьволновой связи и емкостной при линии связи, длина которой составляет $3/4$ длины волны.

Приложение XVIII

ФИЛЬТР НИЖНИХ ЧАСТОТ

1. Метод Дарлингтона

В соответствии с § 1.3 коэффициент отражения на входе устройства, изображенного на фиг. XVIII.1, описывается уравнением

$$\Gamma = \frac{(Z/Z_{01}) - 1}{(Z/Z_{01}) + 1} \quad (\text{XVIII.1})$$

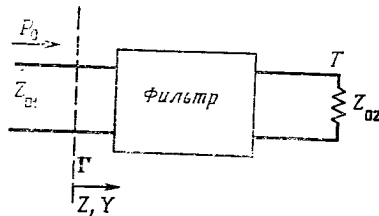
и входное сопротивление равно

$$\frac{Z}{Z_{01}} = \frac{1 + \Gamma}{1 - \Gamma} \quad (\text{XVIII.2})$$

Если фильтр чисто реактивный (без потерь), то мощность T , проходящая в нагрузку, равна

$$T = (1 - |\Gamma|^2) P_0 \quad (\text{XVIII.3})$$

Сразу же заметим, что если нет окончного сопротивления Z_{02} , входное сопротивление Z должно быть чисто реактивным. Оно может быть выражено по теореме Фостера с помощью уравнения (1.5.20)



Ф и г. XVIII.1. Фильтр с оконечной нагрузкой.

и становится нулем или бесконечностью для определенных действительных значений частот ω (нули и полюсы Z). Однако при включении сопротивления Z_{02} нули и полюсы будут иметь место при комплексных значениях частот ω_c . Переходный режим слабо нагруженного резонатора является примером комплексного полюса, как это и выражено уравнением (5.4.18). Мнимая часть ω_c должна быть положительной, в противном случае амплитуда высокочастотных колебаний в резонаторе в режиме свободных колебаний будет возрастать. Если

$$s = j\omega_c, \quad (\text{XVIII.4})$$

то

$$s = j\omega_{\text{действ}} - \alpha, \quad (\text{XVIII.4'})$$

где α — положительная величина.

Из такого поверхностного рассмотрения¹⁾ следует, что $Z(s)$ должно иметь полюсы только в левой половине s -плоскости. В правой половине s -плоскости функция $Z(s)$ описывается полиномом Гурвица.

Обозначим через $t(j\omega)$ коэффициент передачи по напряжению, определяемый из соотношения

$$T/P_0 = |t(j\omega)|^2 = t(j\omega)t^*(j\omega) = t(j\omega)t(-j\omega). \quad (\text{XVIII.5})$$

Рассматриваемый четырехполюсник не имеет потерь, и предполагается, что элементы его не зависят от частоты. Из уравнений (XVIII.3) и (XVIII.5) имеем

$$|\Gamma|^2 = \Gamma(j\omega)\Gamma(-j\omega) = 1 - t(j\omega)t(-j\omega). \quad (\text{XVIII.6})$$

Метод Дарлингтона для синтеза четырехполюсника соответственно заданной форме $T(\omega)$ состоит в получении функции $\Gamma(j\omega)$, а затем $Z(j\omega)$ с помощью уравнения (XVIII.2). Следовательно, для заданной амплитудной характеристики сигнала будет найдена форма входного сопротивления, причем некоторые сложные вопросы не будут затронуты, так как они находятся вне рассматриваемой темы.

Покажем, что функцию $|\Gamma|^2$ можно записать как отношение двух полиномов от ω^2

$$|\Gamma|^2 = \frac{A(\omega^2)}{B(\omega^2)}. \quad (\text{XVIII.7})$$

В самом деле, по уравнению (1.5.22)

$$Y = j\omega f(\omega^2) + \frac{1}{Z_{02}}, \quad (\text{XVIII.8})$$

так что

$$|\Gamma|^2 = \Gamma\Gamma^* = \left(\frac{1-Y}{1+Y}\right)\left(\frac{1-Y^*}{1+Y^*}\right) = \frac{(1-1/Z_{02})^2 + \omega^2 f^2(\omega^2)}{(1+1/Z_{02})^2 + \omega^2 f^2(\omega^2)}. \quad (\text{XVIII.7'})$$

Следовательно, $|\Gamma(-s^2)|^2$ можно записать как отношение двух полиномов от s^2

$$|\Gamma(-s^2)|^2 = \frac{A_0 + A_1 s^2 + \dots + A_n s^{2n}}{B_0 + B_1 s^2 + \dots + B_n s^{2n}} \quad (\text{XVIII.9})$$

или через корни s^2 в виде

$$|\Gamma(-s^2)|^2 = \frac{(s^2 - s_{A1}^2)(s^2 - s_{A2}^2) \dots (s^2 - s_{An}^2)}{(s^2 - s_{B1}^2)(s^2 - s_{B2}^2) \dots (s^2 - s_{Bn}^2)}, \quad (\text{XVIII.9'})$$

или как

$$|\Gamma(-s^2)|^2 = \frac{(s - s_{A1})(s - s_{A2}) \dots (s - s_{An})(s - s'_{A1}) \dots (s - s'_{An})}{(s - s_{B1})(s - s_{B2}) \dots (s - s_{Bn})(s - s'_{B1}) \dots (s - s'_{Bn})}, \quad (\text{XVIII.9''})$$

¹⁾ Более подробно см. [34].

где для ясности $s_{A1}, s_{A2}, \dots, s_{An}, s_{B1}, s_{B2}, \dots, s_{Bn}$ являются корнями, находящимися в левой полуплоскости, в то время как $s'_{A1} = -s_{A1}, s'_{A2} = -s_{A2}, \dots, s'_{B1} = -s_{B1}, \dots$ находятся в правой полуплоскости. В сокращенной форме

$$|\Gamma(-s^2)|^2 = \frac{p(s_A)}{q(s_B)} \frac{p(s'_A)}{q(s'_B)}. \quad (\text{XVIII.10})$$

Может показаться, что в выражении $\Gamma(s)$ знаменатель следовало бы выбрать состоящим либо из $q(s_B)$, либо из $q(s'_B)$. Однако требование, чтобы $Z(s)$ было полиномом Гурвица, в свою очередь требует, чтобы $\Gamma(s)$ имел свои полюса в левой полуплоскости [34]. Если $\Gamma(s)$ имел бы полюса в правой полуплоскости, то это привело бы к превышению значения единицы для определенных значений $Z(s)$ в правой полуплоскости. Но так как вся правая часть плоскости $Z(s)$ нанесена на плоскость $\Gamma(s)$ в пределах окружности единичного радиуса, то $\Gamma(s)$ должен быть также аналитичным в правой полуплоскости.

В числителе может быть выбрано либо $p(s_A)$, либо $p(s'_A)$. Кроме того, $\Gamma(s)$ может быть приписан либо знак «+», либо знак «-», но получаемые при этом два сопротивления будут различны и дуальны друг другу. Следовательно,

$$\Gamma(s) = \pm \frac{p(s)}{q(s)} \quad (\text{XVIII.11})$$

и

$$\frac{Z(s)}{Z_{01}} = \frac{q(s) \pm p(s)}{q(s) \mp p(s)}. \quad (\text{XVIII.12})$$

Во многих случаях, представляющих интерес, можно раскрыть уравнение (XVIII.12) как непрерывную дробь.

2. Характеристика Баттерворса

Характеристикой Баттерворса является выражение вида

$$T/P_0 = \frac{1}{1+x^{2n}} \quad (\text{XVIII.13})$$

с $Z_{01} = Z_{02}$, так что

$$|\Gamma(\omega^2)|^2 = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \quad (\text{XVIII.14})$$

или

$$|\Gamma(-s^2)|^2 = \frac{(-s^2)^n}{1+(-s^2)^n}. \quad (\text{XVIII.14'})$$

Рассматривая нули $(-s^2)^n$, имеем

$$p(s) = s^n. \quad (\text{XVIII.15})$$

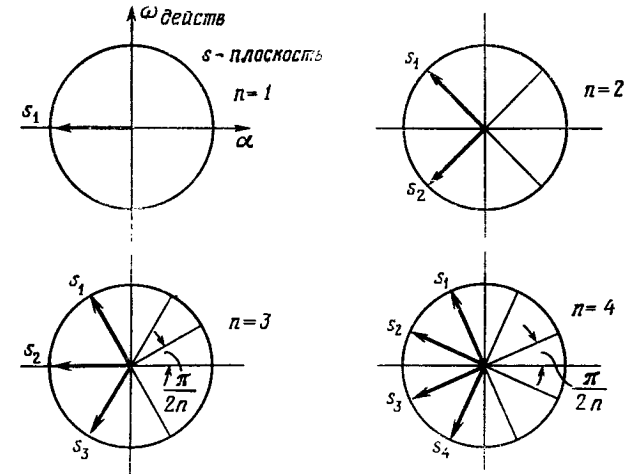
Нули левой полуплоскости $1 + (-s^2)^n$ есть

$$s_k = je^{j\left(\frac{2k-1}{2n}\right)\pi} \quad (\text{XVIII.16})$$

и лежат на окружности, как это может быть подтверждено теоремой Муавра (фиг. XVIII.2). Знаменатель $\Gamma(s)$ равен тогда

$$q(s) = (s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n). \quad (\text{XVIII.17})$$

Для того чтобы получить первый член как параллельно включенный элемент (в соответствии с выбором плоскости отсчета параметров



Фиг. XVIII.2. Корни выражения $1 + (-s^2)^n$.

резонатора как плоскости минимума при расстройке резонатора), знак $\Gamma(s)$ выбирается таким образом, что уравнение (XVIII.12) принимает вид

$$\frac{Z(s)}{Z_{01}} = \frac{q(s) - p(s)}{q(s) + p(s)} = \frac{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) - s^n}{(s-s_1)(s-s_2)\dots(s-s_n) + s^n} = \frac{a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}{2s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}, \quad (\text{XVIII.18})$$

где в соответствии с правилами алгебры

$$\begin{aligned} a_{n-1} &= -(s_1 + s_2 + \dots + s_n), \\ a_{n-2} &= (s_1s_2 + s_1s_3 + \dots + s_1s_n), \\ a_{n-3} &= -(s_1s_2s_3 + s_1s_2s_4 + \dots), \\ &\dots \dots \dots \\ a_0 &= (-1)^n s_1s_2s_3 \dots s_n. \end{aligned} \quad (\text{XVIII.19})$$

Как видно из уравнения (XVIII.2) и как установлено с помощью (XVIII.16), корни s_k взаимосвязаны. Например, s_n является сопряженным с s_1 , s_{n-1} с s_2^* и в общем виде

$$s_k = s_{n-k+1}^* \quad (\text{XVIII.20})$$

так что они могут быть разделены попарно, исключая то обстоятельство, что, когда n нечетно, средний корень равен -1 . Отсюда следуют многие упрощения уравнений (XVIII.19). В частности, поскольку

$$s_k s_k^* = s_k s_{n-k+1} = 1, \quad (\text{XVIII.21})$$

получаем

$$a_0 = 1. \quad (\text{XVIII.22})$$

Из уравнения (XVIII.16) сумма двух сопряженных корней равна

$$s_k + s_{n-k+1} = s_k + s_k^* = j e^{j \left(\frac{2k-1}{2n} \right) \pi} - j e^{-j \left(\frac{2k-1}{2n} \right) \pi} = -2 \sin(2k-1) \frac{\pi}{2n}. \quad (\text{XVIII.22'})$$

По определению, пусть

$$g_k = 2 \sin(2k-1) \frac{\pi}{2n}. \quad (\text{XVIII.23})$$

Отсюда следует, что

$$-g_k = s_k + s_{n-k+1} \quad (\text{XVIII.24})$$

и

$$g_k = g_{n-k+1}. \quad (\text{XVIII.24'})$$

К сожалению, хотя возможны многие значительные упрощения и связи такого сорта¹⁾, процедура нахождения элементов фильтра через корни чрезмерно запутана для общего случая n . Для заданного значения n может быть использована формула Беннетта

$$g_k = 2 \sin(2k-1) \frac{\pi}{2n} = -(s_k + s_k^*), \quad (\text{XVIII.23})$$

которая дает значение k -го элемента фильтра.

Рассмотрим случай $n=4$ и предположим, что получено разложение дроби

$$\frac{Z(s)}{Z_01} = \frac{1}{g_1 s + \frac{1}{g_2 s + \frac{1}{g_3 s + 1}}}, \quad (\text{XVIII.25})$$

¹⁾ Например, можно показать, что $a_{n-1} = 2/g_1$ посредством тригонометрической формулы $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin mx = \sin^2 mx / \sin x$.

так как из уравнения (XVIII.24)

$$g_1 = g_4, \quad g_2 = g_3.$$

Перегруппировывая члены, имеем

$$\frac{Z(s)}{Z_01} = \frac{g_1 g_2^3 s^3 + g_2^2 s^2 + (g_1 + g_2) s + 1}{g_1^2 g_2^3 s^4 + g_1 g_2^3 s^3 + (g_1^2 + 2g_1 g_2) s^2 + (g_1 + g_2) s + 1}. \quad (\text{XVIII.26})$$

Условия идентичности этого уравнения уравнению (XVIII.18) дают

$$2 = g_1^2 g_2^2,$$

$$a_{n-1} = g_1 g_2^2,$$

$$a_{n-2} = g_2^2 = g_1^2 + 2g_1 g_2, \quad (\text{XVIII.27})$$

$$a_{n-3} = g_1 + g_2,$$

$$a_{n-4} = 1.$$

Поскольку корни должны быть расположены через равные промежутки и симметрично относительно реальной оси, получаем

$$a_{n-1} = -[(s_1 + s_1^*) + (s_2 + s_2^*)] = g_1 + g_2 = \frac{2}{g_1},$$

$$a_{n-2} = 2 + (s_1 + s_1^*)(s_2 + s_2^*) = 2 + g_1 g_2, \quad (\text{XVIII.28})$$

$$a_{n-3} = -[(s_1 + s_1^*)(s_2 s_2^*) + (s_2 + s_2^*)(s_1 s_1^*)] = g_1 + g_2,$$

$$a_{n-4} = 1.$$

Однако только значения g_k , определяемые уравнением (XVIII.23), будут также удовлетворять условиям

$$g_1^2 g_2^2 = 2, \quad (\text{XVIII.27a})$$

$$g_2^2 = g_1^2 + 2g_1 g_2 = 2 + \sqrt{2}. \quad (\text{XVIII.27b})$$

3. Характеристика Чебышева

Характеристика Чебышева описывается выражением вида

$$T/P_0 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}. \quad (\text{XVIII.29})$$

Оконечное сопротивление Z_{02} равно Z_{01} , если n нечетно¹⁾. На практике этого случая обычно избегают, так как Z_{02} должно быть непосредственно связано с ε [см. уравнение (6.5.17)].

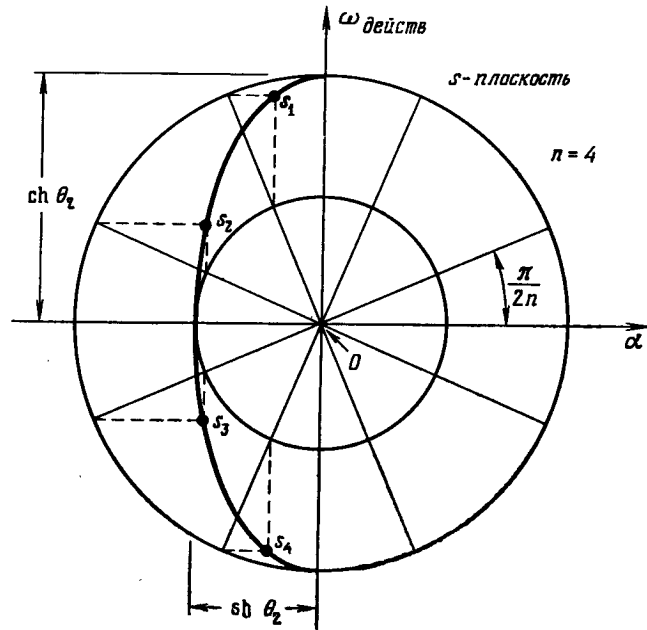
¹⁾ Для n четного при $x=0$ $T/P_0 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2}$, $|\Gamma|^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon^2}$, $|\Gamma| = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$, так что

$$\frac{Z_{02}}{Z_{01}} = \frac{\sqrt{1 + \varepsilon^2} \pm \varepsilon}{\sqrt{1 + \varepsilon^2} \mp \varepsilon}.$$

Квадрат модуля коэффициента отражения равен

$$|\Gamma(x^2)|^2 = \frac{\varepsilon^2 C_n^2(x)}{1 + \varepsilon^2 C_n^2(x)}. \quad (\text{XVIII.30})$$

Существенной задачей является нахождение в правой полуплоскости корней $1 + \varepsilon C_n^2(-s^2)$, в которых $-s^2$ заменяет x^2 . Сначала рас-



Ф и г. XVIII.3. Корни выражения $1 + \varepsilon^2 C_n^2(-s^2)$.

смотрим

$$1 + \varepsilon^2 C_n^2(-s^2) = 0, \quad (\text{XVIII.31})$$

решение которого имеет вид [34]

$$\varepsilon C_n(s) = \pm j = \varepsilon \cos n(\theta_1 + j\theta_2) = \varepsilon \cos n\theta_1 \operatorname{ch} n\theta_2 - j\varepsilon \sin n\theta_1 \operatorname{sh} n\theta_2, \quad (\text{XVIII.32})$$

где θ , определяемое уравнением (X.5), записано в комплексной форме

$$\theta = \arccos(-js) = \theta_1 + j\theta_2, \quad (\text{XVIII.33})$$

так как ω (или x) заменено на $-js$.

Действительная и мнимая части уравнения (XVIII.32) дают

$$\varepsilon \cos n\theta_1 \operatorname{ch} n\theta_2 = 0, \quad (\text{XVIII.34})$$

$$\sin n\theta_1 \operatorname{sh} n\theta_2 = \pm \frac{1}{\varepsilon}. \quad (\text{XVIII.35})$$

Уравнение (XVIII.34) удовлетворяется при

$$\theta_1 = \pm (2k-1) \frac{\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, 2n, \quad (\text{XVIII.36})$$

а уравнение (XVIII.35) — при

$$\operatorname{sh} n\theta_2 = +\frac{1}{\varepsilon}, \quad \operatorname{ch} n\theta_2 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}, \quad (\text{XVIII.37})$$

так как $\sin n\theta_1 = 1$ из уравнения (XVIII.36) и знак «+» выбирается для $n > 0$, $\theta_2 > 0$.

Для того чтобы вычислить $\operatorname{ch} \theta_2$ и $\operatorname{sh} \theta_2$, рассмотрим

$$e^{n\theta_2} = \operatorname{ch} n\theta_2 + \operatorname{sh} n\theta_2 = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon}, \quad (\text{XVIII.38})$$

из которого

$$e^{\theta_2} = \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/n}. \quad (\text{XVIII.39})$$

Величина θ_2 непосредственно связана только с величинами ε и n , и они тем больше, чем меньше ε и n . Значения $\operatorname{ch} \theta_2$ и $\operatorname{sh} \theta_2$ составляют

$$\operatorname{ch} \theta_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/n} + \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right], \quad (\text{XVIII.40})$$

$$\operatorname{sh} \theta_2 = \frac{1}{2} \left[\left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{1/n} - \left(\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1} + \frac{1}{\varepsilon} \right)^{-1/n} \right]. \quad (\text{XVIII.41})$$

Корни уравнения (XVIII.31) в s -плоскости определяются из уравнения (XVIII.33)

$$s_k = j \cos(\theta_1 + j\theta_2) = \sin \theta_1 \operatorname{sh} \theta_2 + j \cos \theta_1 \operatorname{ch} \theta_2, \quad (\text{XVIII.42})$$

где θ_1 дается уравнением (XVIII.36), $\operatorname{sh} \theta_2$ и $\operatorname{ch} \theta_2$ берутся из уравнений (XVIII.40) и (XVIII.41).

Корни левой полуплоскости имеют вид

$$s_k = -\operatorname{sh} \theta_2 \sin(2k-1) \frac{\pi}{2n} + j \operatorname{ch} \theta_2 \cos(2k-1) \frac{\pi}{2n} = -\alpha_k + j\omega_{\text{действ } k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{XVIII.43})$$

В обозначениях § 6.5 получаем

$$\beta = 2n\theta_2, \quad \gamma = \operatorname{sh} \theta_2, \quad \alpha_k = \sin(2k-1) \frac{\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{6.5.15})$$

Геометрическим местом s_k является эллипс, так как из уравнения (XVIII.43)

$$\frac{\alpha_k^2}{\operatorname{sh}^2 \theta_2} + \frac{\omega_{\text{действ } k}^2}{\operatorname{ch}^2 \theta_2} = 1, \quad (\text{XVIII.44})$$

где $\operatorname{sh} \theta_2$ есть реальная полуось, а $\operatorname{ch} \theta_2$ — мнимая полуось. Так как θ_2 делают большим [малое ε , малое n из уравнения (XVIII.39)], то эллипс приближается к окружности. Как эллипс, так и полюса могут быть получены графически в результате построения двух окружностей с радиусами $\operatorname{sh} \theta_2$ и $\operatorname{ch} \theta_2$, разделенных под углами $(2k-1)\pi/2n$, и определения мест пересечения горизонтальной (для большой окружности) и вертикальной (для малой окружности) проекций из этих точек пересечения окружностей с радиусами.

Корни $\varepsilon^2 C_n^2(-s^2) = 0$ могут быть найдены из определения корней выражения $1 + \varepsilon^2 C_n^2(-s^2)$. Так как уравнение (XVIII.35) теперь равно нулю, то $\theta_2 = 0$. Тогда из уравнения (XVIII.42)

$$s_k = j \cos(2k-1) \frac{\pi}{2n}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (\text{XVIII.45})$$

Далее должно быть составлено выражение

$$\frac{Z(s)}{Z_{01}} = \frac{q(s) - p(s)}{q(s) + p(s)}, \quad (\text{XVIII.46})$$

и его следует раскрыть как непрерывную дробь, чтобы получить коэффициенты g_k . Тот факт, что такая формула должна существовать, не является неожиданным ввиду многочисленных связей между корнями. Неожиданным фактом является относительная простота конечного результата, несмотря на чрезмерную сложность общего решения¹⁾. Как и в случае формулы Беннетта, эти уравнения могут быть легко подтверждены для любого определенного значения n .

¹⁾ В работе [35] указывается, что получение расчетной формулы связано с громоздкими тригонометрическими преобразованиями, поэтому расчет опускается.

Приложение XIX

ЧАСТОТНЫЙ ДИСКРИМИНАТОР С ПОДАВЛЕНИЕМ НЕСУЩЕЙ И ЕЕ ПОСЛЕДУЮЩИМ ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

На работу дискриминатора Паунда и дискриминатора с расщеплением резонансной характеристики (оба эти дискриминатора описаны в § 8.2, п. «б») влияет амплитудная модуляция. В рассматриваемом ниже устройстве [25] это влияние сведено к минимуму.

Возьмем дискриминатор Паунда (фиг. 8.2.3) и вместо короткозамыкающего поршня включим в плечо 2 согласованную нагрузку, настроив резонатор в резонанс и согласовав его. Тогда из уравнения (8.2.7') получим

$$\Gamma_1 = -jQ_0 \frac{d\omega}{\omega_0}, \quad (\text{XIX.1})$$

$$\Gamma_2 = 0 \quad (\text{XIX.2})$$

и, следовательно, b_4 (фиг. XIX.1) равно

$$b_4 = -\frac{j}{2} Q_0 \frac{d\omega}{\omega_0} a_3. \quad (\text{XIX.3})$$

Пусть в первое мостовое соединение поступает частотно-модулированный сигнал

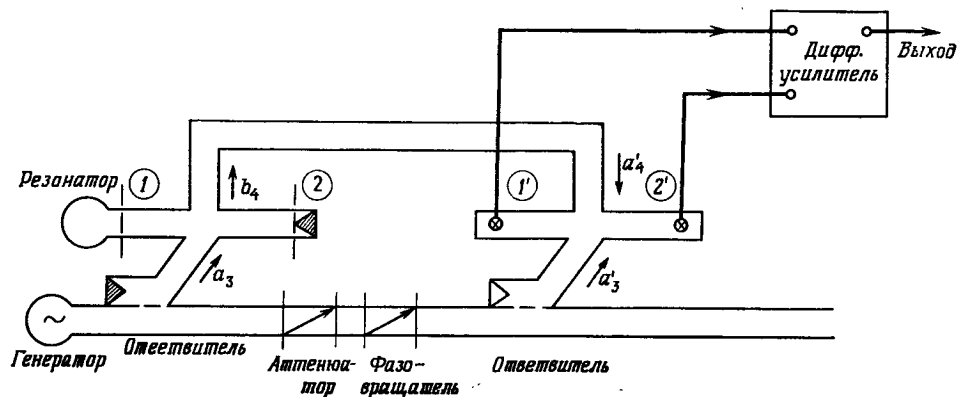
$$a_3 = A_3 \sin \left[\omega_0 t + \frac{\Omega}{\omega_m} \sin \omega_m t + \theta_0 \right], \quad (\text{XIX.4})$$

где Ω — максимальная девиация частоты, не выходящая за пределы применимости соотношения (XIX.1). Сигнал b_4 на выходе плеча 4 фактически представляет собой входной сигнал a_3 , в котором подавлена несущая, а алгебраическое значение амплитуды пропорционально мгновенному отклонению частоты (фиг. XIX.2, в). Максимальная амплитуда сигнала b_4 равна $(A_3/2) Q_0 (\Omega/\omega_0)$.

Если теперь b_4 подать в плечо 4' второго моста (т. е. $b_4 = a_4'$), а сигнал $a_3' = a_3 [1/2 Q_0 (\Omega/\omega_0)]$ — в плечо 3', то на выходе плеча 1' получим $(a_3' + a_4')$, а на выходе плеча 2' — $(a_3' - a_4')$. Сигнал a_3' поступает от того же самого генератора, а его фаза подбирается таким образом, чтобы при $\omega > \omega_0$ она совпала с фазой сигнала a_4' . Регулируемым аттенуатором амплитуду a_3' устанавливают равной максимальной амплитуде a_4' . С помощью кристаллических детекторов 1' и 2' выделяют соответствующие огибающие (фиг. XIX.2, г и д) и получают пропорциональные им напряжения, подаваемые

на дифференциальный усилитель, выходной сигнал которого меняется во времени так же, как мгновенное отклонение частоты.

Следует отметить, что одна из функций второго моста (восстановителя несущей) заключается в дискриминации знака сигнала b_4 (если бы детектировался только сигнал a'_4 , то выходное напряжение не зависело бы от знака мгновенной девиации частоты). Заметим также, что амплитуда сигнала a'_3 не обязательно должна равняться

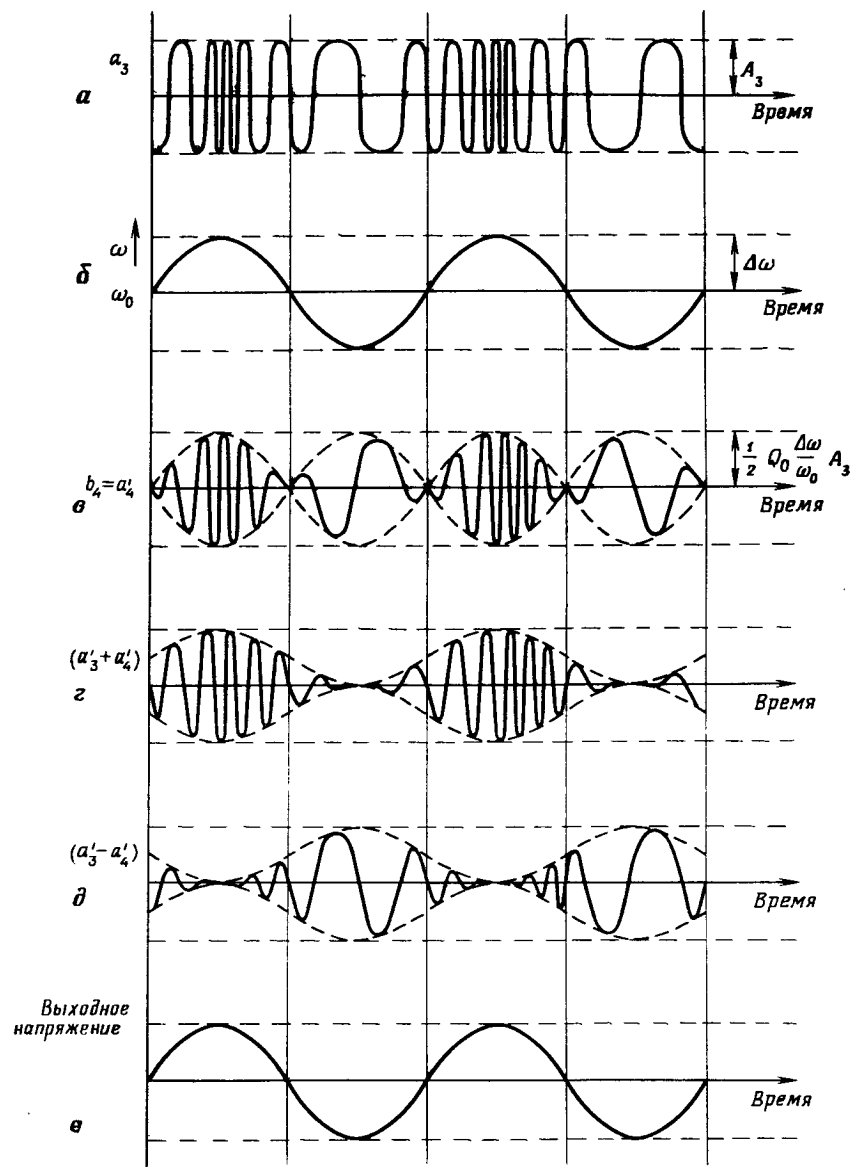


Ф и г. XIX.1. Схема дискриминатора.

величине $A_3 [1/2 Q_0 (\Omega/\omega_0)]$ и может превосходить ее. Однако разность фаз между сигналами a'_4 и a'_3 должна быть вполне определенной.

Чтобы понять, почему такая система не чувствительна к амплитудной модуляции, целесообразно рассмотреть векторные диаграммы, полагая в соответствии с выражением (8.2.1), что выходное напряжение каждого кристаллического детектора пропорционально некоторой степени амплитуды СВЧ-сигнала.

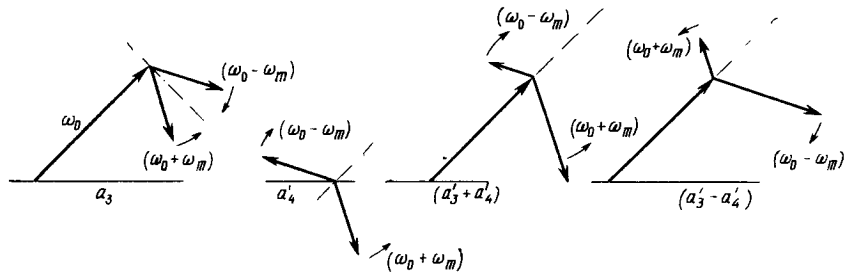
Рассмотрим вначале ЧМ-сигнал a_3 , изображаемый вектором несущей, вращающимся против часовой стрелки с угловой скоростью ω_0 , а также векторами верхней и нижней боковых составляющих, вращающимися со скоростями $(\omega_0 + \omega_m)$ и $(\omega_0 - \omega_m)$ соответственно (фиг. XIX.3). Фактически в сигнале содержится много пар боковых составляющих, зависящих от величины индекса модуляции $a_0 = \Omega/\omega_m$, но геометрическая сумма векторов несущей и всех боковых должна совершенно не зависеть от времени — это одна из отличительных особенностей частотной модуляции. Упростим рассмотрение, полагая индекс модуляции малым, что позволяет учитывать только одну пару боковых составляющих. Кроме того, для упрощения векторной диаграммы вектор несущей будем считать неподвижным. Тогда векторы верхней и нижней боковых будут



Ф и г. XIX.2. Формы сигналов в дискриминаторе.

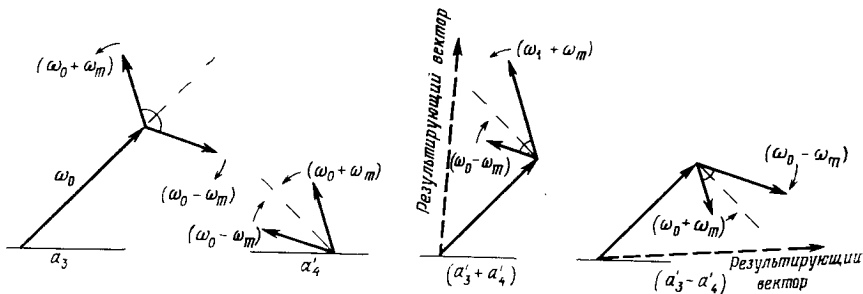
вращаться с угловой скоростью ω_m соответственно против и по часовой стрелке.

Основное назначение первого моста состоит в подавлении несущей и изменении знака нижней боковой составляющей. Когда колебания от генератора приходят во второй мост в виде сигнала a_3 , на



Ф и г. XIX.3. Преобразование ЧМ-сигнала.

входе детектора 1' верхние боковые складываются в фазе, а нижние боковые — в противофазе. На входе детектора 2' они складываются соответственно в противофазе и в фазе. В итоге как в плече 1', так и в плече 2' получаются амплитудно-модулированные



Ф и г. XIX.4. Преобразование АМ-сигнала.

колебания с некоторой остаточной частотной модуляцией, исчезающей в процессе детектирования.

Если сигнал a_3 амплитудно модулирован, то его опять-таки можно представить в виде несущей с двумя боковыми, но теперь фазовые соотношения таковы, что пара боковых составляющих на векторной диаграмме всегда симметрична относительно несущей. И в этом случае основная функция первого моста заключается в подавлении несущей и изменении знака нижних боковых. Следовательно, принимая во внимание установленные фазовые соот-

ношения для сигналов a_3 и a_4 , нетрудно показать, что и на этот раз на входе детектора 1' верхние боковые составляющие сложатся в фазе, а нижние боковые — в противофазе. На выходе детектора 2' наблюдается обратная картина (фиг. XIX.4).

В плечах 1' и 2' модуляция является почти полностью частотной. Но еще важнее неизменное равенство амплитуд колебаний в плечах 1' и 2'. Выходное напряжение дифференциального усилителя равно нулю.

В общем случае, когда сигнал модулирован как по амплитуде, так и по частоте, описанным выше способом можно отдельно рассмотреть соответствующие боковые составляющие. К результирующим колебаниям равной амплитуды (составляющие АМ) добавляются в соответствующих соотношениях боковые от ЧМ.

Для уменьшения шумов кристаллов можно осуществить гетеродинное преобразование частоты сигналов a_4 и a_3 , получая сигнал промежуточной частоты с помощью общего гетеродина и производя балансное подавление шумов (см. § 8.2, п. «в»).

Наконец, если резонатор согласован не полностью, несущую можно все же подавить, обеспечив в плече 2 такой же коэффициент отражения, как у резонатора на резонансной частоте.

ЛИТЕРАТУРА

1. Huxley L. G. H., A Survey of the Principles and Practice of Wave Guides, Univ. Press, Cambridge, 1947.
2. Ramo S., Whinnery J. R., Fields and Waves in Modern Radio, Second Ed., Wiley, New York, 1953; русский перевод: Рамо С., Уиннери Дж., Поля и волны в современной радиотехнике, Гостехиздат, 1950.
3. Adler R. B., Chu L. J., Fano R. M., Electromagnetic Energy Transmission and Radiation, Wiley, New York, 1960.
4. Montgomery C. G., Dicke R. H., Purcell E. M., Principles of Microwave Circuits, Vol. 8, MIT Radiation Lab. Series, McGraw-Hill, New York, 1948; русский перевод: Теория линий передачи сверхвысоких частот, изд-во «Советское радио», 1950.
5. Southworth G. C., Principles and Applications of Waveguide Transmission, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1950; русский перевод: Саусворт Дж. К., Принципы и применения волноводной передачи, изд-во «Советское радио», 1955.
6. Reich H. J., Ordung P. F., Krauss H. L., Skalnik J. G., Microwave Theory and Techniques, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1953.
7. Skilling H. H., Fundamentals of Electric Waves, Second Ed., Wiley New York, 1948.
8. Guillemin E. A., Communication Networks, Vol II, Chap. V., Wiley, New York, 1935.
9. Reference Data for Radio Engineers, Fourth Ed., International Telephone and Telegraph Corp., New York, 1957.
10. Marcuvitz N., Waveguide Handbook, Vol 10, MIT Radiation Lab. Series, Chap. 5, McGraw-Hill, New York, 1951; русский перевод: Справочник по волноводам, изд-во «Советское радио», 1952.
11. Mogeno T., Microwave Transmission Design Data, Chap. 9, Dover Publ., New York, 1958.
12. The Microwave Engineers, Handbook and Buyers Guide, Horizon House-Microwave, Brookline, Mass., 1963.
13. Pannenberg A. E., *Philips Research Repts.*, 7, 169—188, 270—302 (June, Aug. 1952).
14. Riblet H. J., пат. США 2739287, March 20, 1956.
15. Cohn S. B., *IRE Trans.*, **MTT-3**, 16—21 (Apr. 1955).
16. Hensperger E. S., *Microwave J.*, 2, (8), 38—42 (1959).
17. Reed J., Wheeler G. J., *IRE Trans.*, **MTT-4**, 246—252 (Oct. 1956).
18. Bethe H. A., MIT Radiation Lab., Rept. № 43-30.
19. Bethe H. A., MIT Radiation Lab., Rept. № 43-22.
20. Watkins D. A., Topics in Electromagnetic Theory, Wiley, New York, 1958.
21. Fox A. G., *IRE Proc.*, pp. 1489—1598 (Dec. 1947).
22. Ayres W. P., *IRE Trans.*, **MIT-5**, 258—261 (1957).
23. Lax B., Button K., Microwave Ferrites and Ferromagnetics, Lincoln Lab. Series, McGraw-Hill, New York, 1962; русский перевод: Лакс Б., Баттон К., Сверхвысокочастотные ферриты и ферромагнетики, изд-во «Мир», 1965.
24. Montgomery C. G., Technique of Microwave Measurements, vol 11, MIT Radiation Lab. Series, McGraw-Hill, 1947, pp. 751—774; русский перевод: Техника измерений на сантиметровых волнах, изд-во «Советское радио», 1949.
25. Slater J. C., Microwave Electronics, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1950; русский перевод: Слэтер Дж., Электроника сверхвысоких частот, изд-во «Советское радио», 1948.
26. Bethe H. A., MIT Radiation Lab., Rept. № 43-27.
27. Cohn S. B., *Proc. IRE*, 45, 187—196 (Febr. 1957).
28. Whitwell A. L., Williams N., *Microwave J.*, 2, (11), 27—32 (1959).
29. Altman J. L., *IRE Trans.*, **MTT-1**, 16—25 (July 1954).
30. Sternberg B. J., Shipman J. S., Thurston W. B., *Quarterly Journ. Mech. and Appl. Math.*, 7, 505—511 (1954).
31. Pound R. V. et al., Microwave Mixers, MIT Radiation Lab. Series, vol. 16, McGraw-Hill, New York, 1948, pp. 275—279.
32. Nelson C. E., *IRE Trans.*, **MTT-5**, 136—147 (Apr. 1957).
33. Sokolnikoff I. S., Sokolnikoff E. S., Higher Mathematics for Engineers and Physicists, Second Ed., McGraw-Hill, New York, 1941, pp. 160, 161.
34. Guillemin E. A., Synthesis of Passive Networks, Wiley, New York, 1957.
35. Belevitch V., Tchebycheff Filters and Amplifier Networks, *Wireless Engineer*, p. 106—110 (Apr. 1952).

Дополнительная литература

36. Ширман Я. Д., Радиоволноводы и объемные резонаторы, Связь-издат, 1959.
37. Лебедев И. В., Техника и приборы сверхвысоких частот, том I, Госэнергоиздат, 1961; изд-во «Высшая школа», 1968 (второе издание).
38. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П., Справочник по элементам волноводной техники, изд-во «Советское радио», 1967.

39. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Синтез четырехполюсников и восьмиполусников на СВЧ, изд-во «Связь», 1965.
40. Ефимов И. Е., Радиочастотные линии передачи, изд-во «Советское радио», 1964.
41. Микаэлян А. Л., Теория и применение ферритов на сверхвысоких частотах, Госэнергоиздат, 1963.
42. Силин Р. А., Сазонов В. П., Замедляющие системы, изд-во «Советское радио», 1966.
43. Тараненко З. И., Трохименко Я. К., Замедляющие системы, изд-во «Техника», 1965.
44. Сушкевич В. И., Нерегулярные линейные волноводные системы, изд-во «Советское радио», 1967.
45. Машковцев Б. М., Цибизов К. Н., Емелин Б. Ф., Теория волноводов, изд-во «Наука», 1966.
46. Коган Н. Л., Машковцев Б. М., Цибизов К. Н., Сложные волноводные системы, Судпромгиз, 1963.
47. Гантмахер Ф. Р., Теория матриц, изд-во «Наука», 1966.
48. Харвей А., Техника сверхвысоких частот (перевод с англ. под ред. Сушкевича В. И.), изд-во «Советское радио», т. I, II, 1965.
49. Schrank H. E., Grauling G. H., «Phase relationships in short-slot hybrid couplers», *Pros. IRE*, 47 (11) 2017 (1959).

О Г Л А В Л Е Н И Е

Предисловие редактора	5
Из предисловия автора	7
Список основных обозначений	11
Гл. 1. ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ СВЧ	17
§ 1.0. Введение	17
§ 1.1. Основные уравнения электромагнитного поля	18
§ 1.2. Бесконечный волновод	22
§ 1.3. Двухполюсник	27
§ 1.4. Напряжения и токи на входе многополюсников	34
§ 1.5. Основные теоремы СВЧ-цепей	41
§ 1.6. Соединение двух волноводов различных сечений	53
Гл. 2. МАТРИЦА РАССЕЯНИЯ	57
§ 2.0. Введение	57
§ 2.1. Нормированные волны и матрицы рассеяния [4]	58
§ 2.2. Основные свойства матрицы рассеяния	62
§ 2.3. Некоторые следствия из основных свойств матрицы рассеяния	67
§ 2.4. Измерение коэффициентов матрицы рассеяния	72
§ 2.5. Определение матрицы рассеяния двойного тройника	78
§ 2.6. Пример использования матрицы рассеяния [S]	84
Гл. 3. СИММЕТРИЧНЫЕ УСТРОЙСТВА	90
§ 3.0. Введение	90
§ 3.1. Коммутативное свойство матрицы рассеяния [S] и матрицы симметрического оператора [G]	91
§ 3.2. Собственные значения	94
§ 3.3. Симметричный четырехполюсник	102
§ 3.4. Параллельные T-образные соединения (тройники в плоскости H)	108
§ 3.5. Симметричные Y-соединения в плоскости H	121
§ 3.6. Последовательные T- и Y-образные соединения (тройники в плоскости E)	124
§ 3.7. Симметричные восьмиполусники: направленные ответвители	135
§ 3.8. Турникетное соединение [4]	146
Гл. 4. ПРОХОДНЫЕ УСТРОЙСТВА	155
§ 4.0. Введение	155
§ 4.1. Широкополосное согласование	156

§ 4.2.	Многоступенчатый переход	165	
§ 4.3.	Многодырочный направленный ответвитель	167	
§ 4.4.	Синтез и анализ ответвителей и гибридных соединений	171	
§ 4.5.	Обзор направленных ответвителей	184	
§ 4.6.	Фазовращатели и аттенюаторы	196	
§ 4.7.	Четвертьволновые и полуволновые пластины [4, 5, 21]	202	
§ 4.8.	Прецизионные фазовращатели и аттенюаторы	210	
§ 4.9.	Невзаимные ферритовые устройства	216	
Гл. 5.	РЕЗОНАТОРЫ	226	
§ 5.0.	Введение	228	
§ 5.1.	Резонаторы с одним элементом связи. Явление резонанса	229	
§ 5.2.	Резонаторы бегущей волны	234	
§ 5.3.	Резонатор с одним элементом связи. Эквивалентные схемы и измерения	239	
§ 5.4.	Добротность резонатора с одним элементом связи	246	
§ 5.5.	Переходные процессы в резонаторе с одним элементом связи	258	
§ 5.6.	Волноводный резонатор с одним элементом связи	261	
§ 5.7.	Пролодной резонатор с двумя элементами связи. Эквивалентная схема и добротность	264	
§ 5.8.	Резонатор с двумя элементами связи. Эффект затягивания при реактивной нагрузке	272	
§ 5.9.	Волноводный пролодной резонатор	276	
§ 5.10.	Полосковые пролодные резонаторы. Последовательная связь	284	
<i>Series</i>	Гл. 6.	СВЧ-ФИЛЬТРЫ	287
§ 6.0.	Введение	287	
§ 6.1.	Каскадное включение двух резонаторов. Эквивалентные схемы с сосредоточенными параметрами	288	
§ 6.2.	Каскадное включение двух объемных резонаторов. Четвертьволновая и непосредственная связи	298	
§ 6.3.	Каскадное включение двух волноводных резонаторов. Расчет параметров системы	303	
§ 6.4.	Многорезонаторные полосковые фильтры	306	
§ 6.5.	Нормированные фильтры нижних частот (прототипы)	310	
§ 6.6.	Фильтры нижних и верхних частот	316	
§ 6.7.	Полосковые и заграждающие фильтры	320	
<i>Hand</i>	Гл. 7.	ПЕРИОДИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ	329
§ 7.0.	Введение	329	
§ 7.1.	Теорема Флоке	330	
§ 7.2.	Эквивалентная схема бесконечной периодической системы	335	
§ 7.3.	Периодические системы конечной длины	339	
§ 7.4.	Матрица сопротивлений каскадного соединения нескольких идентичных ячеек	343	
§ 7.5.	Гладкий волновод с периодическими неоднородностями	347	
§ 7.6.	Периодическая система с полужайками на концах	351	
Гл. 8.	ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИМЕНЕНИЯ СИСТЕМ	355	
§ 8.0.	Введение	355	
§ 8.1.	Применение мостовых соединений	356	
§ 8.2.	Другие применения мостовых соединений	360	

§ 8.3.	Ферритовые и механические модуляторы	374
§ 8.4.	Применение турникетных соединений	378
§ 8.5.	Специальные фильтры и устройства для разделения частот	383
Приложение I.	Элементы матричной алгебры	391
Приложение II.	Теорема Фостера	396
Приложение III.	Матрицы рассеяния простейших четырехполюсников	400
Приложение IV.	Определение матрицы рассеяния четырехполюсника методом Дешана и методом S-кривой	406
Приложение V.	Согласование неоднородности с помощью чисто реактивной шунтирующей проводимости	415
Приложение VI.	Экспериментальное определение параметров эквивалентной схемы неоднородности в волноводе	417
Приложение VII.	Круговая поляризация	419
Приложение VIII.	Трехплечевой циркулятор	422
Приложение IX.	Коэффициент отражения каскадного соединения	426
Приложение X.	Разложение $\cos n\theta$ в ряд и полиномы Чебышева	429
Приложение XI.	Классическая матрица передачи (матрица ABCD). Основные параметры цепи	432
Приложение XII.	Круговая поляризация магнитного поля для волны типа TE_{10} в прямоугольном волноводе	441
Приложение XIII.	Теория возмущений для резонаторов и волноводов	443
Приложение XIV.	Дифференциальная секция	451
Приложение XV.	Добротность и переходный процесс в резонаторе с одним элементом связи	455
Приложение XVI.	Каскадное включение двух резонаторов. Связи, близкие к полуволновой и четвертьволновой	462
Приложение XVII.	Диафрагма, эквивалентная двум неодинаковым диафрагмам, связанным четвертьволновой линией	466
Приложение XVIII.	Фильтр нижних частот	468
Приложение XIX.	Частотный дискриминатор с подавлением несущей и ее последующим восстановлением	477
Литература		482

Дж. Альтман

УСТРОЙСТВА СВЧ

Редактор *Н. В. Серегина*
Художник *А. В. Шипов*
Художественный редактор *Н. А. Фильчагина*
Технический редактор *А. Г. Резоухова*
Корректор *Р. Я. Новик*

Сдано в производство 15/1 1968 г.
Подписано к печати 25/VII 1968 г.
Бумага кама № 2. 60 × 90^{1/16} = 15,25 бум. л.
Усл. печ. л. 30,5.
Уч.-изд. л. 24,22. Изд. № 20/4125
Цена 1 р. 87 к. Зак. 139

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография № 16 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР
Москва, Трехпрудный пер., 9